УДК 519.41/47

В. В. Атамась

Группы, все не вполне факторизуемые подгруппы которых имеют примарное добавление

Получено описание строения конечных неразрешимых групп, все подгруппы непримарного индекса которых вполне факторизуемы, и бесконечных локально конечных групп, не вполне факторизуемые подгруппы которых имеют примарное добавление.

Одержано опис будови скінченних нерозв'язних груп, всі підгрупи непримарного індексу яких цілком факторизовані, і нескінченних локально скінченних груп, в яких не цілком факторизовані підгрупи мають примарний додаток.

В работе [1] описано строение конечных разрешимых групп, все подгруппы непримарного индекса которых вполне факторизуемы. Цель настоящей статьи — провести подобное исследование в случае конечных неразрешимых и бесконечных локально конечных групп.

Рассмотрим сначала конечные неразрешимые группы, все подгруппы непримарного индекса которых вполне факторизуемы (для краткости вполне факторизуемые группы будем называть также c-группами).

Теорема 1. *Пусть G—неразрешимая конечная группа, все подгруппы непримарного индекса которой вполне факторизуемы. Тогда*

$$G \simeq A_5 \times F,$$

где A_5 — знакопеременная группа степени 5, F — элементарная абелева 5-группа.

Верно обратное утверждение: *в группе указанного вида все подгруппы непримарного индекса вполне факторизуемы.*

Доказательство. Необходимость. Заметим, что порядок группы G ввиду ее неразрешимости и теоремы Бернсайда делится по крайней мере на три различных простых числа. Поэтому ее силовские подгруппы имеют в G непримарный индекс и, следовательно, вполне факторизуемы, а значит, элементарные абелевы.

Рассмотрим случай, когда G — простая группа. Из результатов работы [2] вытекает, что простая группа, все силовские подгруппы которой абелевы, изоморфна либо группе Янко J_1, либо PSL $(2, q)$, $q > 3$, $q \equiv 0, 3, 5\ (8)$. Группа Янко, как известно (см., например, [3]), содержит знакопеременную группу A_5, имеющую в ней непримарный индекс. Группа A_5 не является c-группой, и поэтому группа Янко J_1 не удовлетворяет требованиям теоремы.

Пусть $G \simeq$ PSL $(2, q)$, $q > 3$, $q \equiv 3, 5\ (8)$. Как следует из описания подгрупп группы PSL $(2, q)$ (см., например, [4]), группа G содержит подгруппу, изоморфную A_5. Последняя не является c-группой и имеет в G непримарный индекс, за исключением случая $q = 5$. Так как PSL $(2,5) \simeq A_5$, то группа G изоморфна знакопеременной группе A_5.

Пусть $G \simeq$ SL $(2, q)$, $q \equiv 0\ (8)$. Тогда $|G| = (q - 1)\, q\, (q + 1)$, а нормализатор N силовской 2-подгруппы группы G является группой Фробениуса с инвариантным элементарным множителем порядка q и дополнительным циклическим множителем порядка $q - 1$ [4]. Подгруппа N не является c-группой. Индекс $|G : N|$ равен $q + 1$. Поэтому если $q + 1$ делится на два различных простых числа, то подгруппа N имеет непримарный индекс в G, и группа G не удовлетворяет условиям теоремы. Если $q + 1$ — степень простого числа, то в группе G есть циклическая подгруппа порядка $q + 1$ [4]. Она не является c-группой и имеет, очевидно, непримарный индекс в G. Если же $q + 1$ — простое число, то из трех последовательных чисел $q + 1$, $q = 2^n$, $n \geqslant 3$, и $q - 1$ последнее обязательно делится на 3. Поэтому в группе N можно выделить собственную подгруппу N_1 порядка qd, где $d \mid q - 1$, $d \neq 1$. Как следует из описания подгрупп группы PSL $(2, q)$, подгруппа N_1 является группой Фробениуса и имеет непримарный индекс в группе G. Таким образом, и в этом случае группа G не удовлетворяет требованиям теоремы. Поэтому группа G изоморфна лишь группе A_5.

Пусть теперь группа G не простая. Как отмечалось, ее силовские подгруппы абелевы, и в силу результатов работы [2], она представима в виде

$$G = H \leftthreetimes (S \leftthreetimes K), \tag{1}$$

где H, K — разрешимые A-группы (т. е. разрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами), S — прямое произведение простых неабелевых групп. Из рассмотренного выше случая простых групп вытекает, что $S \simeq A_5$. Группа A_5 содержит подгруппу A_4, не являющуюся c-группой и имеющую индекс $|A_5 : A_4|$ равный 5. Так как по условию теоремы подгруппа A_4

должна иметь примарный индекс в G, то подгруппы H и K из разложения (1) — 5-группы. Более того, ввиду полной их факторизуемости они элементарные абелевы.

Произведение HP подгруппы H и силовской 3-подгруппы P группы S имеет непримарный индекс в G и, значит, подгруппа HP является c-группой. Так как $3 \nmid 5 - 1$, то эта подгруппа должна быть абелевой. Следовательно, $P \leqslant C_s(H)$ и $C_s(H) \neq 1$. Ввиду того, что $C_s(H) \lhd S$, имеем $C_s(H) = S$. Отсюда заключаем, что $[H, S] = 1$.

Группа автоморфизмов группы A_5, как известно [3], изоморфна симметрической группе степени 5. Из этого заключаем, что произвольный автоморфизм порядка 5 подгруппы S является внутренним, и поэтому подгруппы S, K поэлементно перестановочны: $[S, K] = 1$.

Таким образом, разложение (1) может быть записано так: $G = H \times S \times K$. Положив $F = H \times K$, получим утверждение теоремы. Необходимость условия теоремы доказана.

Достаточность легко проверяется непосредственно.

Понятие непримарного индекса теряет смысл для подгрупп бесконечного индекса, поэтому для того, чтобы распространить результаты о конечных группах, подгруппы непримарного индекса которых вполне факторизуемы, на случай бесконечных групп, необходимо воспользоваться иным определением изучаемого класса конечных групп.

Пусть H — подгруппа конечной группы G и индекс $|G : H|$ примарен, т. е. $|G : H| = p^k$, p— некоторое простое число. Возьмем силовскую p-подгруппу P_1 из H и вложим ее в некоторую силовскую p-подгруппу P группы $G : P_1 \leqslant P$. Ввиду того, что $|P| = |P_1| p^k$ и $H \cap P = P_1$, имеем

$$|HP| = \frac{|H||P|}{|H \cap P|} = \frac{|H||P|}{|P_1|} = |H| p^k = |H||G:H| = |G|.$$

Таким образом, $G = HP$ и, значит, подгруппа H обладает примарным по p добавлением в группе G. Здесь добавлением подгруппы A в группе G называется такая подгруппа B, что $G = AB$.

Верно и обратное утверждение: если подгруппа H группы G обладает в G примарным по некоторому простому числу p добавлением, то индекс $|G : H|$ есть степень простого числа p.

Отсюда следует, что для конечной группы следующие два условия равносильны:

1) все подгруппы непримарного индекса вполне факторизуемы;

2) все не вполне факторизуемые подгруппы имеют примарное добавление.

Поэтому результаты, полученные для конечных групп, удовлетворяющих условию 1, можно распространить, пользуясь условием 2, на случай произвольных групп.

Отметим, что группы, удовлетворяющие условию 2, периодические. Действительно, если $\langle a \rangle$ — бесконечная циклическая подгруппа группы G, то подгруппа $\langle a^6 \rangle$ имеет непримарный индекс в $\langle a \rangle$ и, следовательно, не может иметь примарное добавление в группе G. В то же время подгруппа $\langle a^6 \rangle$ не является c-группой, так как она бесконечная циклическая.

Полное описание строения произвольных (периодических) групп, удовлетворяющих условию 2, представляет существенные трудности, так как бесконечные периодические группы с циклическими подгруппами простых порядков, построенные А. Ю. Ольшанским [5], удовлетворяют этому условию. Поэтому ограничимся случаем локально конечных групп.

Заметим, что условие 2 наследуется подгруппами и фактор-группами группы. Поэтому произвольная конечная подгруппа K группы G, не вполне факторизуемые подгруппы которой имеют примарное добавление, либо вполне факторизуема, либо принадлежит к одному из типов конечных групп, описанных в работе [1] и теореме 1 настоящей статьи.

Рассмотрим сначала случай, когда все конечные подгруппы локально конечной группы G вполне факторизуемы, т. е. G локально вполне факторизуемая группа.

Т е о р е м а 2. *Пусть G — бесконечная локально вполне факторизуемая группа, все не вполне факторизуемые подгруппы которой имеют примарное добавление. Тогда группа G является с-группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть D — непримарная подгруппа группы G; a, b — элементы различных простых порядков из D. Как известно [6], в локально вполне факторизуемой группе конечные подгруппы дополняемы, поэтому конечная группа $\langle a, b\rangle$ дополняема в группе G:

$$G = \langle a, b\rangle K, \quad \langle a, b\rangle \cap K = 1. \tag{2}$$

Из дополняемости подгруппы $\langle a, b\rangle$ в группе G следует ее дополняемость в подгруппе D:

$$D = \langle a, b\rangle (D \cap K), \quad \langle a, b\rangle \cap (D \cap K) = 1. \tag{3}$$

Подгруппа K вполне факторизуема, так как ее индекс $|G:K|$, равный порядку подгруппы $\langle a, b\rangle$, не является степенью простого числа, и, значит, K не может иметь примарное добавление в группе G. Пусть K_1 — дополнение подгруппы $K \cap D$ в K:

$$K = (K \cap D) K_1, \quad (K \cap D) \cap K_1 = 1. \tag{4}$$

Из соотношений (2) — (4) получаем

$$G = \langle a, b\rangle K = \langle a, b\rangle (K \cap D) K_1 = DK_1, \quad D \cap K_1 = 1.$$

Это показывает, что подгруппа K_1 является дополнением подгруппы D в группе G.

Таким образом, в группе G дополняема произвольная непримарная подгруппа. В силу теоремы 1 из [7] группа G вполне факторизуема. Теорема доказана.

Перейдем теперь к описанию групп, обладающих конечными не вполне факторизуемыми подгруппами.

Т е о р е м а 3. *Пусть G — не вполне факторизуемая бесконечная локально конечная непримарная группа, все не вполне факторизуемые подгруппы которой имеют примарное добавление. Тогда группа G принадлежит одному из следующих типов (здесь P, Q, R, S — силовские p-, q-, r-, s-подгруппы группы G соответственно):*

1) $G = (P \times S_0) \leftthreetimes (QR \times \langle x\rangle)$, где P — минимальный элементарный нормальный делитель группы G, $|P| = p^r$, QR — неабелева группа порядка qr, $qr|p-1$, $S = S_0 \times \langle x\rangle$, элемент x действует на P как степенной автоморфизм (возможно $x = 1$), подгруппа S_0 разложима в прямое произведение бесконечного числа инвариантных в G подгрупп простого порядка s;

2) $G = (P_0 \times P_1) \leftthreetimes (QR)$, где QR — неабелева группа, Q — ее минимальная элементарная нормальная подгруппа, $|R| = r$, $P = P_0 \times P_1$ — бесконечная элементарная абелева группа, подгруппа P_0 разложима в прямое произведение циклических подгрупп порядка p, инвариантных в G, подгруппа P_1 разложима в прямое произведение минимальных инвариантных в G подгрупп порядка p^r, $[P_0, Q] = 1$;

3) $G = P \leftthreetimes (Q \leftthreetimes R)$, где P — минимальная нормальная элементарная подгруппа группы G, $|P| = p^r$, QR — неабелева бесконечная с-группа, $qr|p-1$, причем или $|R| = r$, или $|Q| = q$;

4) $G = (P \times Q_0) \leftthreetimes (R \times \langle x\rangle)$, где P — конечная минимальная нормальная элементарная подгруппа группы G, $|P| > p$, $|R| = r$, $Q = Q_0 \times \langle x\rangle$, элемент x индуцирует в P степенной автоморфизм (возможно $x = 1$), подгруппа Q_0 разложима в прямое произведение бесконечного числа инвариантных в G подгрупп простого порядка q;

5) $G = (P \leftthreetimes ((Q \leftthreetimes \langle x\rangle) \times \langle y\rangle)) \times R_0$, где P — конечная минимальная нормальная элементарная подгруппа группы G, $|P| > p$, подгруппа Q индуцирует в P неприводимую группу автоморфизмов, $R = R_0 \times \langle x\rangle \times \langle y\rangle$ — бесконечная элементарная абелева r-группа, $Q \leftthreetimes \langle x\rangle$ — неабелева группа порядка qr, элемент y индуцирует в P степенной автоморфизм (возможно $y = 1$);

6) $G = P \leftthreetimes Q$, где одна из подгрупп P, Q — бесконечная элементарная *абелева группа, а вторая — или конечная элементарная, или циклическая порядка равного квадрату простого числа, или неабелева порядка равного кубу простого числа и простого периода. При этом если P — конечная элементарная абелева группа, то она является минимальным нормальным делителем группы G и $|P| > p$, если P — бесконечная элементарная абелева группа, то либо $|Q| = q$, G — неабелева группа и $q \nmid p-1$, либо Q — не элементарная группа и $q | p-1$ в случае, когда $[P, Q] \neq 1$;*

7) $G = A \times P_0$, где $A \simeq A_5$, P_0 — бесконечная элементарная абелева 5-группа.

Верно и обратное утверждение: *в любой из групп указанных типов не вполне факторизуемые подгруппы имеют примарное добавление.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — бесконечная локально конечная не вполне факторизуемая непримарная группа, все не вполне факторизуемые подгруппы которой имеют примарное добавление. Из работы [1] следует, что порядок любой конечной не вполне факторизуемой подгруппы G_1 группы G делится не более, чем на четыре различных простых числа. Поэтому множество $\pi(G)$ простых делителей порядков элементов группы G состоит из двух, трех или четырех простых чисел.

Далее, по условию теоремы группа G представима в виде $G = G_1P_1$, где P_1 — примарная по некоторому простому числу p подгруппа группы G. Так как G — бесконечная группа, а подгруппа G_1 конечна, то силовская p-подгруппа группы G бесконечна, а силовские подгруппы по другим простым числам из множества $\pi(G)$ конечны. Таким образом, группа G содержит бесконечные силовские подгруппы лишь по одному простому числу p.

Кроме того, покажем, что если P — бесконечная силовская p-подгруппа группы G, то она элементарная абелева. Действительно, если это не так, то в подгруппе P можно выбрать конечную подгруппу K, не являющуюся элементарной абелевой. Последняя не является c-группой и по условию теоремы обладает примарным добавлением в группе $G : G = KH$, где H — примарная бесконечная подгруппа группы G. Отсюда $P = K(P \cap H)$, где $P \cap H$ — бесконечная p-подгруппа и, следовательно, H — p-подгруппа. Ввиду этого группа $G = KH$ также является p-группой. Полученное противоречие доказывает, что бесконечная силовская p-подгруппа P группы G — элементарная абелева группа.

Пусть G — локально разрешимая группа. Рассмотрим сначала случай, когда множество $\pi(G)$ состоит из четырех простых чисел: $\pi(G) = \{p, q, r, s\}$. Выберем в группе G не вполне факторизуемую конечную подгруппу F такую, что $\pi(F) = \pi(G)$. Из работы [1] следует, что подгруппа F содержит минимальную не вполне факторизуемую подгруппу K (для краткости минимальные не вполне факторизуемые группы будем называть min-$\bar{c}$-группами, их строение описано в работе [8]). Множество $\pi(K)$ всех делителей порядков элементов подгруппы K состоит из трех простых чисел. Будем считать, что $\pi(K) = \{p, q, r\}$. По условию теоремы группа G представима в виде

$$G = KS, \tag{5}$$

где S — бесконечная примарная подгруппа. Ясно, что подгруппа S должна быть примарной по простому числу s.

Заметим, что если L — другая конечная min-$\bar{c}$-подгруппа группы G, то $\pi(K) = \pi(L)$. Действительно, предположим, что это не так, и пусть, например, $\pi(L) = \{p, r, s\}$. Тогда ввиду условия теоремы $G = LQ$, где Q — q-группа. Но, как показано выше, в группе G не может быть двух бесконечных силовских подгрупп по различным простым числам. Таким образом, $\pi(K) = \pi(L)$.

Из доказательства теоремы 1 работы [1] видно, что группы типа 2, 3 этой теоремы содержат по две min-$\bar{c}$-подгруппы с различными наборами простых делителей, поэтому подгруппа F группы G принадлежит типу 1 теоремы 1 из [1].

Рассмотрим множество $\{G_\alpha\}$ всех конечных подгрупп группы G, содержащих подгруппу K и таких, что $\pi(G_\alpha) = \pi(G)$. Подгруппа G_α, как это видно из доказанного выше утверждения о подгруппе F, принадлежит типу 1 теоремы 1 из работы [1]. Из соотношения (5) вытекает, что $G_\alpha = KS_\alpha$. Так как подгруппа G_α принадлежит типу 1, то она представима в виде

$$G_\alpha = (P \times S_\alpha^*)(QR \times \langle x_\alpha \rangle),$$

где P — минимальная нормальная элементарная подгруппа группы G, $|P| = p^r$, $S_\alpha = S_\alpha^* \times \langle x_\alpha \rangle$, QR — неабелева группа порядка qr, $qr \mid p-1$, элемент x_α индуцирует в P степенной автоморфизм, подгруппа S_α^* разложима в прямое произведение инвариантных в G_α подгрупп порядка s, S_α^* — подгруппа бесконечной элементарной абелевой силовской s-подгруппы S группы G. При этом можно считать, что $K = PQR$.

Учитывая, что $\{G_\alpha\}$ — локальная система подгрупп, приходим к выводу о том, что силовская s-подгруппа S группы G может быть представлена в виде $S = S_0 \times \langle x \rangle$, где $S_0 = \bigcup\limits_\alpha S_\alpha^*$, в качестве элемента x можно выбрать один из элементов x_α. Так как подгруппы S_α^* разложимы в прямое произведение инвариантных в группе G циклических подгрупп порядка s, то и подгруппа S_0 разложима в прямое произведение инвариантных в G циклических подгрупп простых порядков. Поэтому группа G может быть представлена в виде

$$G = (P \times S_0)(QR \times \langle x \rangle),$$

причем выполняются все соотношения из условия п. 1 теоремы.

Таким образом, в рассмотренном случае приходим к группам, имеющим строение по существу такое же, как и конечные группы типа 1 теоремы 1 из [1]. Отличие заключается лишь в том, что подгруппа S_0 в рассматриваемом случае является бесконечной элементарной абелевой.

Аналогично с использованием локальных систем подгрупп, содержащих некоторую конечную $\min$-$\bar{c}$-подгруппу группы G, доказывается теорема в случае, когда множество $\pi(G)$ состоит из трех простых чисел. Заметим при этом, что группа G не может содержать конечных групп типа 3, 6 теоремы 2 из [1], так как тогда группа G имела бы две конечные $\min$-$\bar{c}$-подгруппы (см. доказательство теоремы 2 из [1]), что, как отмечалось выше, невозможно. При этом группам типа 1, 2, 4, 5 теоремы 2 из [1] соответствуют группы типа 2, 3, 4, 5 доказываемой теоремы.

Предположим теперь, что множество $\pi(G)$ состоит из двух простых чисел. В этом случае из теоремы 3 работы [1] вытекает, что группа G представима в виде полупрямого произведения своих силовских подгрупп $G = P \leftthreetimes Q$. Как было отмечено выше, одна из силовских подгрупп P, Q является бесконечной элементарной абелевой, вторая удовлетворяет требованиям теоремы 3 из [1].

Если P — конечная элементарная абелева группа, то Q — бесконечная элементарная абелева и, как следует из теоремы 3 работы [1], P — минимальный нормальный делитель группы G.

Если P — бесконечная элементарная абелева группа, то тогда, исключая случай вполне факторизуемых групп и используя теорему 3 из [1], приходим к выводу, что либо $|Q| = q$, $q \nmid p-1$ и G — неабелева группа, либо Q не элементарная, и тогда $q \mid p-1$ в случае, когда $[P, Q] \neq 1$.

Пусть G — не локально разрешимая группа. Из теоремы 1 нетрудно заключить, что группа G тогда представима в виде $G = A \times P_0$, где $A \simeq A_5$, P — бесконечная элементарная абелева 5-группа. Необходимость теоремы доказана.

Достаточность легко проверяется непосредственно.

1. *Атамась В. В.* Конечные разрешимые группы, все подгруппы непримарного индекса которых вполне факторизуемы // Исследования групп с ограничениями для подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 4—16.
2. *Broshi A.* Finite groups whose Sylow subgroups are abelian // J. Algebra.—1971.—**17**, N 1.— P. 74—82.
3. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию.— М. : Мир, 1985.— 352 с.

4. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы.— М. : Наука, 1968.— 112 с.
5. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР. Сер. мат.— 1979.— **245**, № 4.— С. 785—787.
6. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Учен. зап. Перм. ун-та.— 1960.— **17**.— С. 15—31.
7. *Алексеева Э. С.* Бесконечные непримарно факторизуемые группы // Некоторые вопросы теории групп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1975.— С. 123—140.
8. *Маланьина Г. А., Хлебутина В. И., Шевцов Г. С.* Конечные минимальные не вполне факторизуемые группы // Мат. заметки.— 1972.— **12**, № 2.— С. 157—162.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 01.06.88