УДК 517.911

Н. А. Перестюк, М. У. Ахметов

О почти периодических решениях импульсных систем

Многие задачи нелинейной механики [1—3] приводят к необходимости исследовать разрывные почти периодические решения дифференциальных уравнений, подверженных импульсному воздействию.

В настоящей работе получены аналоги некоторых результатов из [4—6] для систем с импульсным воздействием и продолжены исследования разрывных почти периодических решений, развивающие и дополняющие результаты работ [7—9].

Пусть $\{\tau_i\}$, $\tau_i > \tau_{i-1}$, — последовательность действительных чисел, $\tau_i \to -\infty$ при $i \to -\infty$, $\tau_i \to +\infty$ при $i \to \infty$; кусочно-непрерывная функция $\varphi(t): R\setminus\{\tau_i\} \to R^n$ ограничена и равномерно непрерывна на множестве $R\setminus\{\tau_i\}$. Для любых целых i и j положим $\tau_i^j = \tau_{i+j} - \tau_i$ и предположим, что последовательности $\{\tau_i^j\}$, $j \in Z$, равностепенно почти периодические (р. п. п).

Кусочно-непрерывная функция $\varphi_1(t): R\setminus\{\tau_i^{(1)}\} \to R^n$ находится в ε-окрестности кусочно-непрерывной функции $\varphi(t)$, если при всех $t \in R$, $|t - \tau_i| > \varepsilon$, $i \in Z$ $\|\varphi(t) - \varphi_1(t)\| < \varepsilon$ и, кроме того, для всех $i \in Z$ справедливо $|\tau_i - \tau_i^{(1)}| < \varepsilon$. Здесь через $\tau_i^{(1)}$ обозначены точки разрыва функции $\varphi_1(t)$.

Последовательность кусочно-непрерывных функций $\{\varphi_n(t)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, назовем B-сходящейся на промежутке $I \subseteq R$ к кусочно-непрерывной функции $\varphi(t): R\setminus\{\tau_i\} \to R^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что $\|\varphi(t) - \varphi_n(t)\| < \varepsilon$ для всех $n > N$, $|t - \tau_i| > \varepsilon$, $i \in Z$, и точки разрывов функций $\varphi_n(t)$, содержащиеся в I, при $n \to \infty$ равномерно по i сходятся к точкам разрыва функции $\varphi(t)$.

Можно убедиться, что последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ кусочно-непрерывных ограниченных в совокупности функций B-сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ и $p = 1, 2, \ldots$ функции $\varphi_n(t)$ находятся в ε-окрестности функций $\varphi_{n+p}(t)$.

Кусочно-непрерывную функцию $\varphi(t)$ назовем почти периодической (п. п.), если для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество ε-почти периодов τ таких, что каждая функция $\varphi(t + \tau)$ находится в ε-окрестности функции $\varphi(t)$.

Лемма 1. *Пусть $\{h_n\}$ — последовательность действительных чисел. Из любой бесконечной последовательности $\{\varphi(t + h_n)\}$ сдвигов кусочно-непрерывной функции $\varphi(t)$ можно извлечь подпоследовательность, локально B-сходящуюся к кусочно-непрерывной функции.*

Лемма 1 доказывается одновременным применением теоремы Больцано — Вейерштрасса к точкам разрыва и теоремы Арцела — Асколи на каждом интервале непрерывности с последующим переходом к диагональному процессу.

Теорема 1. *Кусочно-непрерывная функция $\varphi(t)$ является почти периодической тогда и только тогда, когда любое бесконечное множество сдвигов $\{\varphi(t + h_n)\}$ компактно относительно B-сходимости.*

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — п. п. функция. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon_1 > 0$ и выберем для функции $\varphi(t)$ определенное леммой 3.4 [9] действительное число ν, $0 < \nu < \varepsilon_1/8$, и множества $\mathrm{T} = \mathrm{T}(\varepsilon_1/8)$ и $Q = Q(\varepsilon_1/8)$. Пусть l_1 — показатель плотности множества Т. Согласно лемме 1, из последовательности сдвигов $\{\varphi(t + h_n)\}$ извлекается подпоследовательность $\{\varphi(t + h_s^{(1)})\}$, которая B-сходится на промежутке $[-l_1/2; l_1/2]$. Функции $\varphi(t + h_s^{(1)})$ таковы, что для ε_1 существует натуральное число S такое, что для всех $s > S$ при любом натуральном p и $t \in [-l_1/2, l_1/2]$ выполняется $\|\varphi(t + h_s^{(1)}) - \varphi(t + h_{s+p}^{(1)})\| < 3\varepsilon_1/4$, если $|t - \tau_i^{(s+p)}| > 3\varepsilon_1/4$, $\tau_i^{(s+p)}$ — точки разрыва функции $\varphi(t + h_{s+p}^{(1)})$. Кроме того, можно считать, что $|\tau_i^{(s)} - \tau_i^{(s+p)}| < \varepsilon_1/8$, $i \in Z$.

Пусть $t \in R$ и $|t - \tau_i^{(s+p)}| > \varepsilon_1$. По лемме 3.4 [9] можно выбрать $\tau \in \mathrm{T}$ и $q \in Q$ такими, что $t + \tau \in [-l_1/2, l_1/2]$ и $\|\varphi(t + h_s^{(1)} + \tau) - \varphi(t + h_s^{(1)})\| < \varepsilon_1/8$ при $|t - \tau_i^{(s)}| > \varepsilon_1/8$, $\|\varphi(t + h_{s+p}^{(1)} + \tau) - \varphi(t + h_{s+p}^{(1)})\| < \varepsilon_1/8$ при $|t - \tau_i^{(s+p)}| > \varepsilon_1/8$.

Из неравенства $\|t - \tau_i^{(s+p)}| > \varepsilon_1/8$ следует, что $|t + \tau - \tau_i^{(s+p)}| > 7\varepsilon_1/8$ $|t - \tau_i^{(s)} - \tau| > 3\varepsilon_1/4$, $|t - \tau_i^{(s)}| > 5\varepsilon_1/4$. Поскольку $t + \tau \in [-l_1/2, l_1/2]$, то $\|\varphi(t + h_{s+p}^{(1)}) - \varphi(t + h_s^{(1)})\| \leqslant \|\varphi(t + \tau + h_{s+p}^{(1)}) - \varphi(t + h_{s+p}^{(1)})\| + \|\varphi(t + \tau + h_{s+p}^{(1)}) - \varphi(t + \tau - h_s^{(1)})\| + \|\varphi(t + \tau + h_s^{(1)}) - \varphi(t + h_s^{(1)})\| < \varepsilon_1/8 + \varepsilon_1/8 + 3\varepsilon_1/4 = \varepsilon_1$ при всех $s > S$ и $|t - \tau_i^{(s+p)}| > \varepsilon_1$.

Зафиксируем сходящуюся к нулю последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$. Выберем из последовательности $\{\varphi(t + h_s^{(1)})\}$ так же, как и для ε_1, подпоследовательность $\{\varphi(t + h_s^{(2)})\}$, которая на всей оси R B-сходится с точностью до ε_2. Продолжая этот процесс, можно затем построить диагональную последовательность $\{\varphi(t + h_s^{(s)})\}$, которая B-сходится к некоторой п. п. функции $\varphi_0(t)$.

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть множество сдвигов $\{\varphi(t + h_n)\}$ функции $\varphi(t)$ компактно относительно B-сходимости при любой последовательности $\{h_n\}$ и сама функция $\varphi(t)$ не является п. п. Для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ найдется последовательность отрезков $[h_n - l_n, h_n + l_n]$ такая, что для всех точек ξ, $\xi \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$, справедливо $\sup \|\varphi(t + \xi) - \varphi(t)\| \geqslant \varepsilon_0$. При этом l_1 можно выбирать произвольно, а все остальные l_n удовлетворяют соотношению $l_n > \max\limits_{m<n} l_m$ и поэтому $h_n - h_m \in [h_n - l_n, h_n + l_n]$ при $m < n$.

Для любой последовательности $\{\varphi(t + h_{n_i})\}$, $i = 1, 2, \ldots$, при $n_m > n_p$ имеем

$$\sup_{|t - h_{n_m} - \tau_i| > \varepsilon_0} \|\varphi(t + h_{n_p}) - \varphi(t + h_{n_m})\| = \sup_{|t - \tau_i| > \varepsilon_0} \|\varphi(t) - \varphi(t + h_{n_p} - h_{n_m})\| \geqslant \varepsilon_0,$$

т. е. последовательность $\{\varphi(t+h_{n_i})\}$ не является B-сходящейся. Теорема доказана.

Рассмотрим систему уравнений

$$dx/dt = f(t, x),\ t \neq \tau_i,\ \Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x), \tag{1}$$

в которой функция $f(t, x)$ и последовательность $\{I_i(x)\}$ почти периодические по t и i соответственно равномерно относительно x на каждом компакте $\mathcal{K} \subset R^n$ и равномерно непрерывны по x на этом компакте. Последовательность точек разрыва $\{\tau_i\}$ функции $f(t, x)$ такова, что

$$\inf_i \tau_i^1 > 0. \tag{2}$$

Условие разрыва решения $x(t)$ в этой системе определяется следующим образом: $\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i+) - x(\tau_i-) = I(x(\tau_i))$. Поэтому ограниченными решениями системы (1) являются кусочно-непрерывные функции $x(t): R \setminus \setminus \{\tau_i\} \to R^n$.

Обозначим через $\mathfrak{R}(\mathcal{K})$ топологическое пространство функций $f(t, x)$, кусочно-непрерывных по t и равномерно непрерывных по x с топологией, определенной B-сходимостью равномерно по $x \in \mathcal{K}$. Пусть также $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ — пространство последовательностей $\{I_i(x)\}$, ограниченных при каждом $x \in \mathcal{K}$, каждый элемент которых является равномерно непрерывным отображением $R^n \to R^n$, с топологией, определяемой метрикой $\rho(I^{(1)}, I^{(2)}) = \sup_i \max_{x \in \mathcal{K}} \| I_i^{(1)}(x) - - I_i^{(2)}(x)\|$. Пусть $\mathfrak{U}(\mathcal{K})$ — хаусдорфово пространство-произведение $\mathfrak{R}(\mathcal{K}) \times \times \mathfrak{M}(\mathcal{K})$.

Если θ — фиксированное действительное число, то функция $f(t+\theta, x)$ имеет точки разрыва $\tau_i - \theta$, $i \in Z$. Пусть $\tau_i = \tau_{i-q(\theta)} + \theta$, где $q(\theta)$ — целое число, которое зависит только от θ.

Можно рассматривать сдвиг уравнений (1)

$$dx/dt = f(t+\theta, x),\ t \neq \tau_i - \theta,\ \Delta x|_{t=\tau_i} = I_{i-q(\theta)}(x), \tag{3}$$

решением которого является функция $x(t+\theta)$.

В дальнейшем для простоты будем отождествлять систему (3) с элементом $B_\theta = (f(t+\theta, x), \{I_{i-q(\theta)}(x)\})$ пространства $\mathfrak{U}(\mathcal{K})$.

Согласно теореме 1, лемме 3.4 [9] и условию (2) из любой последовательности $\{h_n\}$ действительных чисел можно выделить подпоследовательность $\{h_s\}$, для которой последовательность $\{B_{h_s}\}$ сходится в $\mathfrak{U}(\mathcal{K})$ к элементу $B^h = (f_h(t, x), \{I_i^{(h)}(x)\})$, имеющему равномерно по $x \in \mathcal{K}$ почти периодические проекции на пространства $\mathfrak{R}(\mathcal{K})$ и $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$.

Обозначим через H множество всех сдвигов B_θ, $\theta \in R$, и предельных точек B^h в пространстве $\mathfrak{U}(\mathcal{K})$.

Пусть $B^h \in H$ и H^h — множество всех сдвигов B_θ^h, $\theta \in R$, и предельных точек этих сдвигов.

На основании леммы 3.4 [9] непосредственно проверяется, что $H^h = H$.

Ограниченное решение $x_0(t)$ системы уравнений из H называется разделенным, если неравенство $\inf_{t \in R} \| x(t) - x_0(t) \| > 0$ выполняется для любого другого ограниченного решения $x(t)$ этой системы.

Если некоторая система $B^h \in H$ имеет конечное число k ограниченных решений и все они разделены, то из равенства $H^h = H$ следует, что все уравнения из H имеют ровно k ограниченных решений и существует постоянная $\rho > 0$ такая, что для любых двух ограниченных решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ каждой системы из H справедливо неравенство

$$\inf_{t \in R} \| x_1(t) - x_2(t) \| \geqslant \rho. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть некоторая система B^h из H имеет конечное число ограниченных решений и все ограниченные решения каждой системы из H разделены. Тогда ограниченные решения почти периодичны.*

Доказательство. Если предположить, что при выполнении условий теоремы некоторое ограниченное решение $x = \xi(t)$ системы B_0 не является почти периодическим, то некоторая последовательность сдвигов $\{\xi(t + h_n)\}$ на каждом промежутке вещественной оси B-сходится, но не является B-сходящейся на всей оси R. Поэтому существуют такие последовательности действительных чисел $\{t_r\}$, $\{\varepsilon_r\}$, $\varepsilon_r \to 0$ при $r \to \infty$, $\{h_{p_r}\}$, $\{h_{q_r}\}$, $q_r > p_r$, что для некоторого числа γ, $0 < \gamma < \rho$, выполняется неравенство $\gamma/2 \leqslant \| \xi(t_r + h_{p_r}) - \xi(t_r + h_{q_r})\| < \rho/2$, $|t_r - h_{q_r} - \tau_i| > \varepsilon_r$, $i \in Z$.

Не нарушая общности, можно считать, что последовательности $\{\xi(t + t_r + h_{p_r})\}$, $\{\xi(t + t_r + h_{q_r})\}$ локально B-сходятся к различным ограниченным решениям $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ одной и той же системы из H. Но это противоречит неравенству (4), что и доказывает теорему.

Исследуем вопрос существования почти периодических решений линейных систем с импульсным воздействием.

Рассмотрим систему

$$dx/dt = A(t)x, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x, \tag{5}$$

в которой $A(t)$ — кусочно-непрерывная ограниченная матрица, последовательность матриц $\{B_i\}$ ограничена и $\inf\limits_i |\det(E + B_i)| > 0$, а последовательность моментов импульсного воздействия $\{\tau_i\}$ такова, что равномерно относительно $t_0 \in R$ существует конечный предел

$$\lim_{t \to \infty} i(t_0, t)/(t - t_0) = p, \tag{6}$$

где $i(t_0, t)$ — число точек разрыва τ_i, принадлежащих промежутку $[t_0, t]$.

Обозначим через $\mathfrak{R}^n$ банахово пространство ограниченных кусочно-непрерывных функций, имеющих общую последовательность $\{\tau_i\}$ точек разрыва, с равномерной нормой $\|f\|_{\mathfrak{R}^n} = \sup\limits_{t \in R \setminus \{\tau_i\}} \|f(t)\|$, а через $\mathfrak{M}^n$ — пространство ограниченных последовательностей $\{a_i\}$, полагая в нем $\|a_i\|_{\mathfrak{M}^n} = \sup\limits_i \|a_i\|$.

Определим теперь линейный дифференциальный оператор с условием разрыва $L: \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{M}^n$, положив $Lx = (dx/dt - A(t)x,\ \Delta x|_{t=\tau_i} - B_i x)$.

Пусть $X(t, t_0)$ — матрица Коши системы (5). Тогда

$$X(t, t_0) = E + \int_{t_0}^{t} A(\tau) X(\tau, t_0)\, dt + \sum_{t_0 < \tau_i < t} B_i X(\tau_i, t_0).$$

Применяя здесь аналог леммы Гронуолла — Беллмана [10] и условие (6), находим

$$\|X(t, t_0)\| \leqslant K e^{m(t - t_0)}, \quad t \geqslant t_0, \tag{7}$$

где $K \geqslant 1$, $m > 0$ — некоторые постоянные.

Введем во множестве $\mathfrak{U}^{(n)} = \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{M}^n$ норму $\|(f, I)\|_{\mathfrak{U}^n} = \|f\|_{\mathfrak{R}^n} + \|I\|_{\mathfrak{M}^n}$.

Оператор L называется регулярным, если для всякого элемента $(f, I) \in \mathfrak{U}^n$ уравнение

$$Lx = (f, I) \tag{8}$$

однозначно разрешимо в $\mathfrak{R}^n$. Для регулярного оператора из теоремы Банаха получаем существование ограниченного обратного оператора и оценку

$$\|x\|_{\mathfrak{R}^n} \leqslant k \|Lx\|_{\mathfrak{U}^n}. \tag{9}$$

Оператор L называется корректным, если из $x \in \mathfrak{R}^n$, $Lx \in \mathfrak{U}^n$ следует неравенство (9) с одной и той же для всех x постоянной k.

Для оператора L имеет место экспоненциальная дихотомия на множестве R, если пространство R^n разложимо в прямую сумму $R_1(t)+R_2(t)$, $t \in R$, и справедливы соотношения:

а) $X(t, t_0) R_i(t_0) \subset R_i(t)$, $t \geqslant t_0$, $i = 1, 2$;

б) $\sup\limits_{t_0 \in R} \| P(t_0) \| < \infty$;

в) $\| x(t) \| \leqslant l_1 \| x(t_0) \| \exp(-c_1(t-t_0))$, $t \geqslant t_0$, $x(t_0) \in R_1(t_0)$;

г) $\| x(t) \| \leqslant l_1 \| x(t_0) \| \exp(c_1(t-t_0))$, $t \leqslant t_0$, $x(t_0) \in R_2(t_0)$, где $x(t)$ — решение уравнения $Lx = 0$, $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — соответствующие пространствам $R_1(t)$ и $R_2(t)$ проекторы, c_1 и l_1 — положительные постоянные.

Согласно следствию теоремы 2, для того, чтобы уравнение (8) с почти периодическими $f(t)$ и $\{I_i\}$ имело п.п. решение, достаточно, чтобы оператор L был регулярным. Теоремы 3 и 4 определяют условия регулярности оператора L.

Теорема 3. *Регулярность оператора L эквивалентна экспоненциальной дихотомии этого оператора.*

Доказательство. Положим для любых $t, \tau \in R$

$$G(t, \tau) = \begin{cases} X(t, \tau) P_1(\tau), & t \geqslant \tau; \\ -X(t, \tau) P_2(\tau), & t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Из условий б), в) вытекает, что $\| G(t, \tau) \| \leqslant l \exp(-c_1 |t-\tau|)$. Поэтому, если $(f, I) \in \mathfrak{U}^n$, то

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t, \tau_i) I_i \tag{10}$$

— ограниченная функция. Подстановкой убеждаемся, что функция (10) — единственное в $\mathfrak{R}^n$ решение уравнения (8).

Для завершения доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. *Из устойчивости вправо (влево) корректного оператора L следует его экспоненциальная устойчивость вправо (влево).*

Доказательство. Рассмотрим только устойчивость вправо. Пусть для любого решения $x(t)$ уравнения (8) справедливо неравенство $\| x(t) \| \leqslant l \| x(\tau) \|$, $t \geqslant \tau$. Найдутся такие решения $x(t)$ и отрезок $[a, b] \subset [t_0, \infty[$, что $\|x(a)\| = 1$, $\|x(b)\| \geqslant 1/2$, $i(a, b) > (p+1)(b-a)$. Тогда

$$l/2 \leqslant \| x(t) \| \leqslant l, \quad t \in [a, b]. \tag{11}$$

Пусть функция $\varphi(t)$ такая, что $\operatorname{supp} \varphi(t) \subset [a, b]$, $\varphi(t) = 1/2$ для $t \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, $f(t) = \varphi(t) x(t) \| x(t) \|^{-1}$, $I_i = \varphi(\tau_i) x(\tau_i) \| x(\tau_i) \|^{-1}$, $u(t) = x(t) \left[\int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(s) \| x(s) \|^{-1} ds + \sum\limits_{-\infty < \tau_i < t} \varphi(\tau_i) \| x(\tau_i) \|^{-1} \right.$.

Из (11) следует, что $\| u(t) \|_{\mathfrak{R}^n} \geqslant (2+p)(b-a-2\varepsilon)/2l^2$. Кроме того, $\| (f, I) \|_{\mathfrak{U}^n} = 1$, $Lu = (f, I)$. Поэтому $b - a < 2kl^2/(2p+1)$. Отсюда следует, что при всех $s \geqslant t_0$, $t > 2kl/(p+1)$ верно неравенство $\| x(t+s) \| \geqslant \| x(s) \|/2$. Если положить $l_1 = 2l$, $c_1 = (2+p) \ln 2/2kl^2$, то для любых $t, s \in [t_0, \infty[$, $t \geqslant s$, выполняется $\| x(t) \| \leqslant l_1 \| x(s) \| \exp(-c_1(t-s))$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь точечные многообразия

$$R_1(t_0) = \{ x(t_0) \in R^n,\ Lx = 0,\ \sup_{t \geqslant t_0} \| x(t) \| < \infty \},$$

$$R_2(t_0) = \{ x(t_0) \in R^n,\ Lx = 0,\ \sup_{t \leqslant t_0} \| x(t) \| < \infty \}.$$

Пусть функция $\varphi(t)$ такая, что $\operatorname{supp} \varphi(t) \subset [t_0, \infty[$, $\varphi(t) = 1$ при $t \geqslant t_0 + 1$, $\| \varphi'(t) \| \leqslant 2$. Если $x(t_0) \in R_1(t_0)$, то для $v = \varphi x$ имеем $Lv = (\varphi' x, 0) = (f, 0)$, $t \in R$. Поэтому из (7) и (9) получаем

$$\sup_{t \geqslant t_0 + 1} \| x(t) \| \leqslant \| v \|_{\mathfrak{R}^n} \leqslant k \| f \|_{\mathfrak{R}^n} \leqslant 2k \| x(t_0) \| e^m,$$

откуда с учетом (7) следует неравенство

$$\| x(t)\| \leqslant l \| x(t_0)\|, \quad t \geqslant t_0. \tag{12}$$

Если же $x(t_0) \in R_2(t_0)$, то, полагая $v = (1 - \varphi) x$, находим

$$\| x(t)\| \leqslant l \| x(t_0)\|, \quad t \leqslant t_0. \tag{13}$$

По лемме 2 оценки (12) и (13) влекут за собой соответствующие экспоненциальные оценки. Теперь так же, как и в [5, с. 171], доказывается, что прямая сумма $R_1(t) + R_2(t)$ есть все пространство R^n. Теорема доказана.

Определим топологию $\mathfrak{U}$ как топологию, в которой последовательность B_{h_n} сходится к системе B^h тогда, когда она сходится к этой системе в каждой топологии $\mathfrak{U}(K)$, где K — произвольный компакт в R^n.

Обозначим систему (5) через C_0. Пусть система C_0 п.п., т. е. $A(t)$ — — п. п. матрица, а $\{B_i\}$ — п. п. последовательность матриц, последовательности $\{\tau_i^j\}$ — р. п. п. Можно проверить, что существует последовательность действительных чисел $\{\omega_n\}$, для которой последовательность $C_{\omega h}$ сходится к C_0 в топологии $\mathfrak{U}$ (свойство возвращаемости).

Теорема 4. *Пусть каждая система C^h не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда оператор L, соответствующий системе C_0, регулярен.*

Доказательство. Построим последовательность операторов $L_n = (d/dt - A_n(t), \Delta|_{t=\tau_i} - B_i^n)$ так, что каждый оператор L_n периодичен с периодом ω_n, $n = 1, 2, \ldots$,

$$A_n(t) = \begin{cases} A(t), & 1/n \leqslant t \leqslant \omega_n, \\ nt(A(t) - A(\omega_n)) + A(\omega_n), & 0 < t \leqslant 1/n. \end{cases} \quad B_i^n = B_i, \quad 0 \leqslant \tau_i \leqslant \omega_n.$$

В дальнейшем будем говорить о сходимости последовательности операторов L_n, если в топологии $\mathfrak{U}$ сходятся соответствующие им однородные системы.

В силу свойства возвращаемости последовательность операторов L_n локально сходится к оператору L. Покажем, что при достаточно больших n операторы L_n^{-1} существуют и существует постоянная M такая, что

$$\| L_n^{-1} \| \leqslant M. \tag{14}$$

Из противного следует существование функций $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что $\| x_k(t) \|_{\mathfrak{R}^n} = 1$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \| L_{n_k} x_k(t) \|_{\mathfrak{R}^n} = 0$.

Выберем теперь точки θ_k, $k = 1, 2, \ldots$, для которых $\| x_k(\theta_k) \| \geqslant 1/2$. Так как функции $y_k(t) = x_k(t + \theta_k)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на совокупности интервалов, не содержащих точек разрыва, то рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 1, можно извлечь из $\{y_k(t)\}$ локально B-сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что последовательность $\{y_k(t)\}$ сходится к некоторой функции $x_0(t) \in \mathfrak{R}^n$. Обозначим сдвиги операторов L_{n_k} на постоянные θ_k через $L_{n_k}^{\theta}$. Тогда считая, что последовательность $\{C_k^{\theta}\}$ сходится в топологии $\mathfrak{U}$ к некоторой системе C^{θ}, можно заключить, что $\{L_{n_k}^{\theta}\}$ сходится локально к оператору L^{θ}, соответствующему системе C^{θ}.

Тогда в силу выбора функций $x_k(t)$ $\lim\limits_{k \to \infty} \| L_{n_k} y_k(t) \|_{\mathfrak{U}^n} = 0$ и поэтому C^{θ} имеет ненулевое ограниченное решение $x_0(t)$. Это противоречие доказывает, что начиная с некоторого n_0 справедливы неравенства (14) и уравнение $L_n x = 0$ не имеет ненулевого решения из $\mathfrak{R}^n$. Согласно результату об обратимости периодического оператора с условием разрыва [10], для произвольного элемента $(f, I) \in \mathfrak{U}^n$ уравнение $L_k x = (f, I)$, $k > n_0$, имеет единственное решение $x_n \in \mathfrak{U}^n$, для которого верно неравенство $\| x_k \|_{\mathfrak{R}^n} \leqslant$

$\leqslant M \| (f, I) \|_{\mathfrak{A}^n}$. Отсюда следует, что последовательность $x_k(t)$ при $k \to \infty$ локально B-сходится к некоторой функции $x^*(t)$ — единственному ограниченному решению системы (8). Теорема доказана.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— Киев : Изд-во АН УССР, 1937.— 363 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории не линейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.— 410 с.
3. *Hsu C. S., Cheng W.-H.* Applications of the theory of impulsive parametric excitation and new tredments of general parametric excitation problems // Trans. ASME.— 1973.— **E 40**, N 1.— P. 78—86.
4. *Amerio L.* Soluzioni quasi pericdishe o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi—periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed Appl.— 1955.— 39.— P. 97—119.
5. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 204 с.
6. *Мухамадиев Э.* Об обратимости дифференциального оператора в пространстве непрерывных ограниченных на всей оси функций // Докл. АН СССР.— 1971. — **196**, № 1.— С. 47—49.
7. *Ахметов М. У.* Почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 1984.— **20**, № 5.— С. 911—912.
8. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* О почти периодических решениях одного класса систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 4.— С. 486—490.
9. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* Почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Киев, 1983.— 50 с.— (Препринт / Ин-т математики АН УССР; 83.26).
10. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием : Метод. пособие.— Киев : Киев. ун-т, 1980.— 80 с.

Киев. ун-т

Получено 05.12.85