УДК 517.949.2

Д. И. Мартынюк, В. А. Данканич

Периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием

При исследовании периодических решений квазилинейных систем с запаздыванием эффективными методами являются метод Пуанкаре, асимптотические методы Крылова—Боголюбова — Митропольского и др. [1—4]. Для изучения периодических решений нелинейных систем с запаздыванием применение этих методов, ставших уже классическими, не всегда возможно. В данной работе периодические решения нелинейных автономных систем с запаздыванием изучаются с помощью численно-аналитического метода [5, 7].

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений вида

$$dx(t)/dt = f(x(t), x(t-\Delta)), \tag{1}$$

где $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, Δ — постоянная величина, характеризующая запаздывание в системе. Для системы (1) поставим задачу определения периодических с периодом T решений. Эту задачу определяют краевые условия вида

$$x(0) = x(T). \tag{2}$$

Заметим, что система (1) является частным случаем неавтономной системы с запаздыванием, периодические решения различных классов которых достаточно полно исследованы [6]. Однако эти системы имеют существенные особенности, отличающие их от неавтономных систем. Так, для неавтономных систем любое периодическое решение имеет вполне определенный, наперед заданный период, равный или кратный периоду правой части системы. Своеобразие периодической задачи для системы (1) заключается в том, что ее разрешимость в общем случае возможна лишь для дискретного набора значений T, которые являются периодами решения системы (1). Исключая тривиальные решения системы (1), задачу о периодических решениях системы (1) можно классифицировать как краевую задачу (1), (2), в которой ищутся значения периода T и ее решения. Своеобразие периодической задачи для автономной системы с запаздыванием требует поэтому ее самостоятельного изучения.

Предположим, что правая часть системы (1) определена и непрерывна в замкнутой, ограниченной области $D \times D \subset E_n$. Следуя [7], выполним замену переменных

$$t\omega = \theta, \quad \omega = 2\pi/T, \quad \mu = 1/\omega. \tag{3}$$

В результате замены (3), задачу (1), (2) приведем к задаче отыскания периодических с периодом 2π решений системы дифференциальных уравнений

$$dx(\theta)/d\theta = \mu f(x(\theta), x(\theta - \Delta/\mu)), \tag{4}$$

$$x(0) = x(2\pi). \tag{5}$$

Предположим, что задача (4), (5) имеет нетривиальное решение

$$x = x^0(\theta) \tag{6}$$

при значении

$$\mu = \mu_0 > 0. \tag{7}$$

В силу автономности системы (4) наряду с решением (6) эта система имеет решение

$$x = x^0(\theta + \tau), \tag{8}$$

где τ — произвольная постоянная, принадлежащая отрезку $I_0 = [0, 2\pi]$.

Поскольку функция $x^0(\theta)$ является непрерывной и периодической, то выбором параметра τ всегда можно добиться того, что экстремальное значение фиксированной координаты $i = j$ решения $x = x^0(\theta + \tau)$ достигается в точке $\theta = 0$. Следовательно [7], краевая задача (4), (5) может иметь решение лишь при дополнительном условии: значение $x^0(0) = x_0$ находится на поверхности

$$f_i(x, x) = 0. \tag{9}$$

Предположим, что уравнение (9) для $x \in D$ имеет заданное параметрически решение

$$x = x_0(c), \tag{10}$$

где $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$ изменяется в области $G_1 \subset E_{n-1}$. Поэтому решение периодической задачи (4), (5) будем искать на множестве начальных значений решения задачи Коши для уравнения (4) с начальными данными

$$\theta = 0, \quad x(0) = x_0(c). \tag{11}$$

Преобразуем автономную систему (1) в неавтономную периодическую с периодом 2π систему и применим для полученной системы численно-аналитический метод [5, 7].

Сделаем замену

$$x(t) = \Phi(\theta, y(\theta)), \tag{12}$$

в которой вектор-функция $\Phi(\theta, y)$ определена в области

$$(\theta, y) \in I_0 \times D_1, \tag{13}$$

непрерывно дифференцируема по θ, y, периодическая по θ с периодом 2π, принимает значения в области D и удовлетворяет условию

$$\det\left[\frac{\partial\Phi(\theta, y)}{\partial y}\right] \neq 0 \tag{14}$$

для всех θ, y, принадлежащих области (13).

В результате замены (12) краевая задача (4), (5) переходит в задачу о периодических с периодом 2π решениях неавтономной системы

$$dy(\theta)/d\theta = F(\theta, y(\theta), y(\theta - \Delta/\mu)), \tag{15}$$

где

$$F(\theta, y(\theta), y(\theta - \Delta/\mu)) = \left[\frac{\partial\Phi(\theta, y)}{\partial y}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\mu f(\theta, y(\theta), y(\theta - \Delta/\mu)) - \frac{\partial\Phi(\theta, y(\theta))}{\partial\theta}\right]. \tag{16}$$

Начальные значения $x_0(c)$, для которых возможно решение задачи (4), (5), при замене (12) переходит в начальное значение периодического решения системы (15):

$$y = y_0(c), \tag{17}$$

где $y_0(c)$ определяется как решение $y = y_0(c)$ уравнения

$$x_0(c) = \Phi(0, y). \tag{18}$$

Предположим, что для значений μ, принадлежащих отрезку

$$I_\mu = [\mu_1, \mu_2], \quad \mu_2 > \mu_1 > 0, \tag{19}$$

и значений $y(\theta)$, $y(\theta - \Delta/\mu) \in D_1$ правая часть системы (15) удовлетворяет следующим условиям:

1) $$|F(\theta, y(\theta), y(\theta - \Delta/\mu), \mu)| \leqslant M, \tag{20}$$

где $M = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$ — вектор с неотрицательными координатами;

2) $$|F(\theta, y'(\theta), y'(\theta - \Delta/\mu), \mu) - F(\theta, y''(\theta), y''(\theta - \Delta/\mu), \mu)| \leqslant$$
$$\leqslant K_1 |y'(\theta) - y''(\theta)| + K_2 |y'(\theta - \Delta/\mu) - y''(\theta - \Delta/\mu)|, \tag{21}$$

где $K_1 = \{k'_{ij}\}$, $K_2 = \{k''_{ij}\}$; $i, j = 1, \ldots, n$, — матрицы с неотрицательными элементами;

3) множество точек $y_0 \in E_n$, содержащееся в области D_1 вместе со своей πM-окрестностью, не пусто;

4) наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ матрицы

$$Q = (K_1 + K_2)\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3}{4\pi}\frac{\Delta^2}{\mu_1^2}\left(1 - \frac{\Delta}{\mu_1}\right)^2\right)$$

не превышает единицу: $\lambda_{\max} < 1$.

Предположим, что система (15) имеет периодическое периода 2π решение, которое при $\theta = 0$ принимает значение $y_0(c)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $y^0(\theta, c, \mu)$ — *периодическое по* θ *с периодом* 2π *решение системы* (15), *удовлетворяющей условиям* 1—4.

Тогда справедливо соотношение

$$y^0(\theta, c, \mu) = \lim_{m\to\infty} y_m(\theta, c, \mu), \tag{22}$$

где $y_m(\theta, c, \mu)$ $(y_0(\theta, c, \mu) = y_0(c))$ *являются периодическими с периодом* 2π *функциями, определяемыми соотношением*

$$y_m(\theta, c, \mu) = y_0(c) + \int_0^\theta \left[F\left(\theta, y_{m-1}(\theta, c, \mu), y_{m-1}\left(\theta - \frac{\Delta}{\mu}, c, \mu\right), \mu\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(s, y_{m-1}(s, c, \mu), y_{m-1}\left(s - \frac{\Delta}{\mu}, c, \mu\right), \mu\right) ds\right] d\theta, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{23}$$

Обозначим через $T(c, \mu)$ величину, определяемую выражением

$$T(c, \mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, y^0(\theta, c, \mu), y^0(\theta - \Delta/\mu, c, \mu), \mu)\, d\theta. \tag{24}$$

Переходя в соотношении (23) к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся что предельная функция $y^0(\theta, c, \mu)$ определяет периодическое с периодом 2π решение уравнения

$$y^0(\theta, c, \mu) = y_0(c) + \int_0^\theta [F(\theta, y^0(\theta, c, \mu), y^0(\theta - \Delta/\mu, c, \mu), \mu) - T(c, \mu)]\, d\theta, \tag{25}$$

а следовательно, дифференциального уравнения

$$dy(\theta)/d\theta = F(\theta, y(\theta), y(\theta - \Delta/\mu), \mu) - T(c, \mu) \tag{26}$$

для всех $(c, \mu) \in G_1' \times I_\mu$, принимающее при $\theta = 0$ значение $y = y_0(c)$.

Из соотношения (26) следует, что если выбрать точку $(c_0, \mu_0) \in G_1' \times I_\mu$ таким сбразсм, чтобы $T(c_0, \mu_0) = 0$, то эта точка будет определять проходящее при $\theta = 0$ через точку $y = y^0(\theta, c_0, \mu_0) = y_0(c_0)$ периодическое решение $y = y^0(\theta, c_0, \mu_0)$ системы (15) при значении $\mu = \mu_0$.

Согласно замене (12), эти значения (c_0, μ_0) и функция $y^0(\theta, c_0, \mu_0)$ определяют решение

$$x^0(t) = \Phi(t/\mu_0, y^0(t/\mu_0, c_0, \mu_0)) \tag{27}$$

и период

$$T_0 = 2\pi\mu_0 \tag{28}$$

краевой задачи (1), (2).

Поэтому достаточные условия разрешимости периодической краевой задачи (1), (2), нахождение периода $T^0 = 2\pi\mu_0$ и начального значения $x = x_0(c_0)$ решения этой задачи состоят в разрешимости и нахождении корней (c_0, μ_0) уравнения

$$T(c, \mu) = 0, \tag{29}$$

которое будем называть определяющим уравнением периодической краевой задачи (1), (2).

Эту задачу будем решать, исходя из приближений $y_m(\theta, c, \mu)$. Обозначим

$$T_m(c, \mu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(\theta, y_m(\theta, c, \mu), y_m(\theta - \Delta/\mu, c, \mu), \mu)\, d\theta. \tag{30}$$

Аналогично [6] для разности $T(c, \mu) - T_m(c, \mu)$ справедлива оценка

$$|T(c, \mu) - T_m(c, \mu)| \leqslant \varepsilon_m, \tag{31}$$

где $\varepsilon_m = Q^m(E - Q)^{-1}(K_1 + K_2)\,\dfrac{2\pi}{3}\,M$, из которой следует неравенство

$$|T(c, \mu)| \geqslant \varepsilon_m - |T_m(c, \mu)|. \tag{32}$$

Неравенство (32) позволяет сделать вывод, что определяющая функция $T(c, \mu)$ не имеет нулей в области $G_1' \times I_\mu$, когда

$$\sup_{G_1' \times I_\mu} |T_m(c, \mu)| > \varepsilon_m, \tag{33}$$

для некоторого $m = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, неравенство (33) дает достаточное условие отсутствия периодических периода 2π решений системы (15).

Поскольку решение краевой задачи (1), (2) с периодом $T = 2\pi\mu_0$ при $\mu_0 \in I_\mu$ и начальным значением $x = x_0(c_0)$, $c_0 \in G_1'$ приводит к периодическому периода 2π решению системы (15) при $\mu = \mu_0$ и с начальным условием $y = y_0(c_0)$, то можно сделать вывод, что выполнение неравенства (33) для некоторого целого m гарантирует неразрешимость краевой задачи (1), (2) при

$$2\pi\mu_1 \leqslant T \leqslant 2\pi\mu_2 \tag{34}$$

для всех $x(0) = x_0(c)$ при $c \in G_1'$.

Достаточные условия для существования решений задачи (1), (2) со значениями из области (34) указывает теорема 2 [7].

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 501 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М.: Наука, 1964.— 431 с.

3. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев : Вища шк., 1979.— 248 с.
4. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1969.— 309 с.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 180 с.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами.— Киев : Наук. думка, 1985.— 213 с.
7. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.— Киев : Наук. думка, 1986.— 220 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 10.06.86