УДК 517.938

В. Л. Кулик

Знакопеременные функции Ляпунова и сохранение инвариантных торов при возмущениях

Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений $dz/dt = X_0(z)$, $z \in R^k$, описывающая некоторый колебательный процесс (см. [1, 2]), имеет квазипериодическое решение $z = z_0(t)$, порожденное непрерывной 2π-периодической функцией многих переменных $F_0(\varphi) \equiv F_0(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, т. е. $z_0(t) \equiv F_0(\omega_1 t, \omega_2 t, \ldots, \omega_m t)$, где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — частотный базис квазипериодической функции $z_0(t)$. Траектория $z = z_0(t)$ в фазовом пространстве R^k расположена на поверхности $z = F_0(\varphi)$, которая гомеоморфна m-мерному тору $\mathcal{T}_m$. Одной из важных задач является изучение устойчивости этой поверхности при малых возмущениях правой части исходной системы дифференциальных уравнений. При этом обычно вводятся фазовые $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и нормальные $x_1, \ldots, x_n$ координаты на торе $\mathcal{T}_m$, $m + n = k$, так, чтобы возмущенную систему уравнений $dz/dt = X_0(z) + X_1(z)$ можно было бы представить в виде

$$d\varphi/dt = a(\varphi, x), \quad dx/dt = A(\varphi, x)x + c(\varphi), \qquad (1)$$

где вектор-функция $a(\varphi, x)$ и матричная функция $A(\varphi, x)$ определены при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и $\| x \| \leqslant d_0$. Однако введению фазовых и нормальных координат в окрестности тора $\mathcal{T}_m$ препятствуют некоторые топологические факторы (см. [3, 4]), которые не всегда позволяют ввести такие координаты. В работе [5] изучались общие условия, при которых система уравнений (1) имеет инвариантный тор, и предложен итерационный метод его отыскания. На каждом шаге итераций требовалось иметь некоторую информацию об инвариантных торах $x = u^i(\varphi)$ линеаризованных систем уравнений $d\varphi/dt = a(\varphi, u^{i-1}(\varphi))$, $dx/dt = A(\varphi, u^{i-1})x + c(\varphi)$, $i = 1, 2, \ldots, u^0 = 0$. Поэтому стало необходимым решить возникшие вопросы для фиксированной линеаризованной системы дифференциальных уравнений вида

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx/dt = A(\varphi)x + c(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \quad x \in R^n. \tag{2}$$

Обычно в литературе такую систему принято называть линейным расширением динамической системы на торе (см. [6, 7]). Отметим, что изучению систем уравнений (1), (2) посвящены многочисленные работы Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко и их учеников.

Настоящая работа является продолжением исследований системы уравнений (2) с помощью знакопеременных квадратичных форм. Предполагаем, что вектор-функции $a(\varphi)$, $c(\varphi)$ и матричная функция $A(\varphi)$ непрерывны по совокупности переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и 2π-периодические по каждой переменной φ_j, $j = \overline{1, m}$, т. е. заданы на m-мерном торе $\mathcal{T}_m$. При этом относительно функции $a(\varphi)$ дополнительно предполагаем, что задача Коши $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$ имеет единственное решение $\varphi_t(\varphi_0)$ и оно непрерывно зависит от φ_0. Для этого, очевидно, достаточно предполагать выполнение условий известной теоремы Осгуда. Напомним, что через $C^0(\mathcal{T}_m)$ обозначается пространство непрерывных функций $F(\varphi)$, заданных на $\mathcal{T}_m$, т. е. 2π-периодических по каждой переменной φ_j, $j = \overline{1, m}$; $C'(\mathcal{T}_m)$ — подпространство пространства $C^0(\mathcal{T}_m)$ функций $F(\varphi)$ таких, что суперпозиция $F(\varphi_t(\varphi_0))$, как функция переменной $t \in R$, является непрерывно дифференцируемой по t, причем $dF(\varphi_t(\varphi_0))/dt|_{t=0} \overset{\text{df}}{=} \dot{F}(\varphi_0) \in C^0(\mathcal{T}_m)$. Угловыми скобками $\langle\cdot, \cdot\rangle$ будем обозначать обычное скалярное произведение в R^n, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$. Говорят, что система уравнений (2) имеет инвариантный тор $x = u(\varphi)$, если $u(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$ и выполняется тождество $\dot{u}(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + c(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Обозначим через $\Omega_\tau^t(\varphi)$ матрицант линейной системы уравнений $dx/dt = A(\varphi_t(\varphi))x$, $x \in R^n$, $\Omega_\tau^t(\varphi)|_{t=\tau} = I_n$ — n-мерная единичная матрица, и предположим, что существует $n \times n$-мерная матрица $C(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ такая, что для функции

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leqslant 0; \\ \Omega_\tau^0(\varphi)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n), & \tau > 0 \end{cases} \tag{3}$$

выполняется экспоненциальная оценка

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \leqslant K \exp\{-\gamma|\tau|\} \tag{4}$$

с положительными постоянными K, γ, не зависящими от $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\tau \in R$. Тогда, очевидно, система уравнений (2) при каждой вектор-функции $c(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ имеет инвариантный тор $x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi)c(\varphi_\tau(\varphi))d\tau$. Функцию (3) обычно называют функцией Грина задачи об инвариантных торах для системы уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx/dt = A(\varphi)x. \tag{2'}$$

Пусть существует знакопеременная квадратичная форма $V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x\rangle$, $S^T(\varphi) \equiv S(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$, имеющая знакоопределенную производную $\dot{V}(\varphi, x)$ вдоль решений системы (2'), т. е.

$$\dot{V}(\varphi, x) = \langle(\dot{S}(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi))x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2. \tag{5}$$

Тогда известно [8], что невырожденность симметричной матрицы $S(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$ обеспечивает существование единственной функции Грина (3) и при этом матрица $C(\varphi)$ является проектирующей: $C^2(\varphi) \equiv C(\varphi)$. Если же существует значение $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ такое, что $\det S(\varphi_0) = 0$, то система уравнений (2') не имеет функции Грина и уже не при каждой вектор-функции $c(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ существует инвариантный тор системы (2). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть существует n-мерная симметричная матрица $S(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$, удовлетворяющая условию (5), и $\det S(\varphi_0) = 0$ при некотором $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$. Тогда необходимым и достаточным условием существования инвариантного тора системы (2) является выполнение тождества*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle C(\varphi_\sigma(\varphi)),\ v(\varphi_\sigma(\varphi))\rangle\, d\sigma \equiv 0 \tag{6}$$

при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и для каждой функции $y = v(\varphi)$, определяющей нетривиальный тор системы уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dy/dt = -A^T(\varphi)\, y. \tag{2*}$$

Доказательство. Сперва отметим, что в работе [8] доказано существование нетривиальных инвариантных торов $y = v(\varphi)$ системы (2*) в случае вырождения матрицы $S(\varphi)$. При этом $v(\varphi_t(\varphi_0)) \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0$. Расширенная система уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx/dt = A(\varphi)\, x - y, \quad dy/dt = -A^T(\varphi)\, y \tag{7}$$

имеет единственную функцию Грина

$$\overline{G}(\tau, \varphi) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi) & \omega(\tau, \varphi) \\ 0 & (\Omega_0^\tau(\varphi))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{12}(\varphi_\tau(\varphi)) \\ C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{22}(\varphi_\tau(\varphi)) \end{bmatrix}, & \tau \leqslant 0 \\ \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi) & \omega(\tau, \varphi) \\ 0 & (\Omega_0^\tau(\varphi))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n & C_{12}(\varphi_\tau(\varphi)) \\ C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{22}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n \end{bmatrix}, & \tau > 0, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\omega(\tau, \varphi) = -\int_\tau^0 \Omega_\sigma^0(\varphi)\, (\Omega_\sigma^0(\varphi))^T d\sigma, \tag{8'}$$

$C(\varphi) = \| C_{ij} \|_{i,j=1}^2$ — $2n$-мерная проектирующая матрица. Для функции Грина (8) также выполняется оценка (4). При любой фиксированной вектор-функции $c(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ система уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx/dt = A(\varphi)\, x - y + c(\varphi), \quad dy/dt = -A^T(\varphi)\, y \tag{7'}$$

имеет единственный инвариантный тор

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\varphi) \\ v(\varphi) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}_0(\tau, \varphi) \begin{bmatrix} c(\varphi_\tau(\varphi)) \\ 0 \end{bmatrix} d\tau,$$

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} (\Omega_\tau^0(\varphi)\, C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) + \omega(\tau, \varphi)\, C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)))\, c(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau +$$

$$+ \int_0^{\infty} \Omega_\tau^0(\varphi)\, (C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n + \omega(\tau, \varphi)\, C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)))\, c(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau,$$

$$v(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_0^\tau(\varphi))^T C_{21}(\varphi_\tau(\varphi))\, c(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau. \tag{9}$$

В силу единственности функции Грина (8) справедливо тождество

$$\begin{bmatrix} C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{12}(\varphi_\tau(\varphi)) \\ C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{22}(\varphi_\tau(\varphi)) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi) & \omega(\tau, \varphi) \\ 0 & (\Omega_0^\tau(\varphi))^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{11}(\varphi) & C_{12}(\varphi) \\ C_{21}(\varphi) & C_{22}(\varphi) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi) & \omega(\tau, \varphi) \\ 0 & (\Omega_0^\tau(\varphi))^T \end{bmatrix}$$

при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\tau \in R$. Поэтому

$$C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)) \equiv (\Omega_\tau^0(\varphi))^T C_{21}(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi) \tag{10}$$

и второе из равенств (9) можно представить в виде

$$v(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{21}(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi)\,c(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau. \tag{9'}$$

Очевидно, если система (2) имеет инвариантный тор $x = u_0(\varphi)$, то и система (7′) также имеет инвариантный тор $x = u_0(\varphi)$, $y = 0$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_{21}(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi)\,c(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau \equiv 0. \tag{11}$$

С другой стороны, если для некоторой вектор-функции $c(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ выполняется тождество (11), то в силу представлений (9), (9′) система (7′) имеет инвариантный тор $x = u(\varphi)$, $y = 0$, поэтому и система (2) имеет тор $x = u(\varphi)$. Таким образом, условие (10) является необходимым и достаточным для существования инвариантного тора системы (2). Теперь покажем, что условие (11) эквивалентно (6). Пусть для некоторой вектор-функции $c(\varphi)$ выполнено тождество (11). Каждый нетривиальный инвариантный тор системы (2*) можно записать в виде $y = v(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_{21}(\varphi)\,\Omega_\tau^0(\varphi)\,f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau$, где $f(\varphi)$ — произвольная вектор-функция из пространства $C^0(\mathcal{T}_m)$ (см. [9]). Учитывая тождество (10), получаем

$$v(\varphi_\sigma(\varphi)) = \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_\sigma^0(\varphi))^T C_{21}(\varphi)\,\Omega_\sigma^0(\varphi)\,\Omega_{\tau+\sigma}^0(\varphi)\,f(\varphi_{\tau+\sigma}(\varphi))\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_\sigma^0(\varphi))^T C_{21}(\varphi)\,\Omega_{t_1}^0(\varphi)\,f(\varphi_{t_1}(\varphi))\,dt_1. \tag{12}$$

Подставляя полученное представление $v(\varphi_\sigma(\varphi))$ в левую часть (6), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} C^T(\varphi_\sigma(\varphi)) \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_\sigma^0(\varphi))^T C_{21}(\varphi)\,\Omega_{t_1}^0(\varphi)\,f(\varphi_{t_1}(\varphi))\,dt_1 d\sigma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} C_{21}^T(\varphi)\,\Omega_\sigma^0(\varphi)\,c(\varphi_\sigma(\varphi))\,d\sigma \Big)^T \Omega_{t_1}^0(\varphi)\,f(\varphi_{t_1}(\varphi))\,dt_1. \tag{13}$$

Для обоснования перестановки интегралов в равенстве (13) покажем, что при каждом фиксированном $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ выполняется оценка

$$\| (\Omega_\sigma^0(\varphi_0))^T C_{21}(\varphi_0)\,\Omega_t^0(\varphi_0) \| \leqslant K(\varphi_0) \exp\{-\gamma|\sigma| - \gamma|t|\}, \tag{14}$$

где $\gamma = \text{const} > 0$, не зависит от $\sigma, t \in R$, а зависит только от $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ и при каждом фиксированном $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$, $K(\varphi_0)$ принимает конечное значение. Зафиксируем некоторое значение $\varphi = \varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ и приведем симметричную матрицу $C_{21}(\varphi_0)$ к жордановой форме $QC_{21}(\varphi_0)\,Q^{-1} = \operatorname{diag}\{\Lambda, 0\}$. Выполнение оценки (4) для функции Грина (8) с постоянными K, γ, не зависящими от φ, указывает на выполнение неравенства

$$\| (\Omega_\sigma^0(\varphi))^T C_{21}(\varphi)\,\Omega_t^0(\varphi) \| \leqslant K \exp\{-\gamma|\sigma - t|\} \tag{15}$$

при всех σ, $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Таким образсм, при фиксированном $\varphi = \varphi_0$ имеем

$$\| (\Omega_\sigma^0(\varphi_0))^T C_{21}(\varphi_0)\,\Omega_t^0(\varphi_0) \| = \| (\Omega_\sigma^0(\varphi_0))^T Q^{-1} \operatorname{diag}\{\Lambda, 0\}\, Q\Omega_t^0(\varphi_0) \| =$$

$$= \| (\Omega_\sigma^0(\varphi_0))^T Q^{-1} \operatorname{diag}\{I_r, 0\}\, QQ^{-1} \operatorname{diag}\{\Lambda, 0\}\, QQ^{-1} \operatorname{diag}\{I_r, 0\}\, Q\Omega_t^0(\varphi_0) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| (\Omega^0_\sigma(\varphi_0))^T Q^{-1} \operatorname{diag}\{I_r, 0\} Q \| \| C_{21}(\varphi_0) \| \| Q^{-1} \operatorname{diag}\{I_r, 0\} Q \Omega^0_t(\varphi_0) \| \leqslant$$
$$\leqslant K_1(\varphi_0) \exp\{-\gamma|\sigma|\} \| C_{21}(\varphi_0) \| K_2(\varphi_0) \exp\{-\gamma|t|\} =$$
$$= K(\varphi_0) \exp\{-\gamma|\sigma| - \gamma|t|\}.$$

Поскольку матрица $C_{21}(\varphi)$ симметричная и для вектор-функции $c(\varphi)$ выполняется тождество (11), то из равенства (13) как раз и следует выполнение тождества (6). Предположим, что выполняется тождество (6) при некоторой вектор-функции $c(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$; тогда, полагая в равенстве (13) $f(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_{21}(\varphi) \Omega^0_\sigma(\varphi) c(\varphi_\sigma(\varphi)) d\sigma$, получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| f(\varphi_\sigma(\varphi)) \|^2 d\sigma \equiv 0$. Отсюда следует $f(\varphi) \equiv 0$. Этим и завершается доказательство теоремы 1.

Обратим внимание на расширенную систему уравнений (7). Ее главная $2n$-мерная матрица имеет специальный вид

$$\mathcal{P}(\varphi) = \begin{bmatrix} A(\varphi) & -I_n \\ 0 & -A^T(\varphi) \end{bmatrix}. \tag{16}$$

В работе [9] отмечено, что эта матрица удовлетворяет тождеству

$$J\mathcal{P}(\varphi) + \mathcal{P}^T(\varphi) J \equiv 0, \tag{17}$$

где $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$. Заметим, что это же тождество может выполняться не только для матрицы $\mathcal{P}(\varphi)$ вида (16), но и для матрицы более общего вида

$$\mathcal{P}(\varphi) = \begin{bmatrix} A(\varphi) & B(\varphi) \\ D(\varphi) & -A^T(\varphi) \end{bmatrix}, \tag{16'}$$

где $B(\varphi)$ и $D(\varphi)$ — произвольные симметричные матрицы. Выполнение тождества (17) указывает на возможность перехода от системы уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi),\ dz/dt = \mathcal{P}(\varphi) z,\ z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{18}$$

к сопряженной системе

$$d\varphi/dt = a(\varphi),\ d\bar{z}/dt = -\mathcal{P}^T(\varphi)\bar{z} \tag{18*}$$

с помощью невырожденной замены переменных $\bar{z} = Jz$. Поэтому существование квадратичной формы $V(\varphi, z)$, имеющей знакоопределенную производную вдоль решений системы (18), влечет за собой существование такой же формы для сопряженной системы (18*) $\bar{V}(\varphi, \bar{z}) = V(\varphi, J^{-1}\bar{z})$, а наличие двух таких форм исключает их вырождение (см. [10]). Теперь, несмотря на тождество (17), предположим, что система уравнений (18) с помощью невырожденной замены переменных $\bar{z} = X(\varphi)Z$, $\det X(\varphi) \neq 0$, $X(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$ преобразуется к сопряженной системе (18*). Тогда, очевидно, матричная функция $X(\varphi)$ удовлетворяет уравнению $\dot{X} + X\mathcal{P}(\varphi) + \mathcal{P}^T(\varphi) X = 0$. Поэтому особый интерес представляют решения матричного уравнения

$$\dot{X} + XA(\varphi) + A^T(\varphi) X = 0. \tag{19}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть матричное уравнение* (19) *имеет невырожденное решение* $X = L(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$, $\det L(\varphi) \neq 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{T}_m$, *где* $n \times n$-*мерная матрица* $L(\varphi)$ *не обязательно симметричная, и существует* n-*мерная симметричная матрица* $S(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$, *удовлетворяющая условию* (5). *Тогда* $\det S(\varphi) \neq 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{T}_m$ *и система уравнений* (2) *имеет единственную функцию Грина* (3) *с оценкой* (4). *При этом* n *четно и для функции Грина* $G_0(\tau, \varphi)$ *выполняется тождество*

$$G_0(\tau, \varphi) \equiv -L^{-1}(\varphi)\ G^T_\tau(0, \varphi) L(\varphi_\tau(\varphi)). \tag{20}$$

Доказательство. Проверим, что производная квадратичной формы $\overline{V}(\varphi, y) = \langle (L^{-1}(\varphi))^T S(\varphi) L^{-1}(\varphi) y, y\rangle$ вдоль решений системы (2) является отрицательно определенной. Исходя из неравенства (5), имеем

$$\langle (L^{-1})^T (\dot{S} + SA^T + AS) L^{-1} y, y\rangle \leqslant -\| L\|^{-2} \| y\|^2. \tag{21}$$

Обозначая $\overline{S} = (L^{-1})^T S L^{-1}$ и учитывая тождество $\dot{L}^{-1} \equiv - L^{-1}\dot{L}L^{-1}$, левую часть неравенства (21) преобразуем следующим образом:

$$\langle [(L^{-1})^T \dot{S} L^{-1} + (L^{-1})^T S L^{-1} LAL^{-1} + (L^{-1})^T A^T L^T (L^{-1})^T S L^{-1}] y, y\rangle =$$

$$= \langle [\dot{\overline{S}} - (\dot{L}^{-1})^T L^T \overline{S} - \overline{S} L \dot{L}^{-1} + \overline{S} LAL^{-1} + (LAL^{-1})^T \overline{S}] y, y\rangle =$$

$$= \langle [\dot{\overline{S}} + \overline{S}(LAL^{-1} + \dot{L}L^{-1}) + (\dot{L}L^{-1} + LAL^{-1})^T \overline{S}] y, y\rangle =$$

$$= \langle (\dot{\overline{S}} - \overline{S}A^T - A\overline{S}) y, y\rangle.$$

Таким образом, одновременное выполнение неравенств (21) и (5) возможно только в том случае, когда матрица $S(\varphi)$ невырождена при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Поэтому система (2′) имеет единственную функцию Грина (3), удовлетворяющую оценке (4).

Решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ взаимно сопряженных линейных систем

$$dx/dt = A(\varphi_t(\varphi_0)) x, \tag{22}$$

$$dy/dt = - A^T(\varphi_t(\varphi_0)) y \tag{22*}$$

связаны между собой равенством $x(t) = L(\varphi_t(\varphi_0)) y(t)$, т. е. если $y = y(t)$ — некоторое решение системы (22*), то, домножая $y(t)$ на матричную функцию $L(\varphi_t(\varphi_0))$, получаем решение системы (22). Отсюда следует, что если некоторое решение системы (22*) затухает на $+\infty$, то и соответствующее решение системы (22) также затухает на $+\infty$. Но с другой стороны $\langle L(\varphi_t(\varphi_0)) x(t), x(t)\rangle \equiv \text{const}\ \forall t \in R$ для любых решений $x = x(t)$ системы (22). Поэтому система (22) имеет столько линейно независимых затухающих на $+\infty$ решений, сколько возрастающих. Отсюда следует, что n четно. Докажем тождество (20). Для этого рассмотрим функцию Грина $G_t(\tau, \varphi_0)$ задачи об ограниченных решениях системы (22)

$$G_t(\tau, \varphi_0) = \begin{cases} \Omega_0^t(\varphi_0) C(\varphi_0) \Omega_\tau^0(\varphi_0), & \tau \leqslant t; \\ \Omega_0^t(\varphi_0)(C(\varphi_0) - I_n) \Omega_\tau^0(\varphi_0), & \tau > t \end{cases} \tag{23}$$

и запишем выражение $- L^{-1}(\varphi_t(\varphi_0)) G_\tau^T(t, \varphi_0) L(\varphi_\tau(\varphi_0)) = G$. Тогда имеем

$$G = \begin{cases} - L^{-1}(\varphi_t(\varphi_0)) (\Omega_t^0(\varphi_0))^T L(\varphi_0) L^{-1}(\varphi_0)(C^T(\varphi_0) - I_n) L(\varphi_0) L^{-1}(\varphi_0) \times \\ \times (\Omega_0^\tau(\varphi_0))^T L(\varphi_\tau(\varphi_0)), \quad \tau < t, \\ - L^{-1}(\varphi_t(\varphi_0)) (\Omega_t^0(\varphi_0))^T L(\varphi_0) L^{-1}(\varphi_0) C^T(\varphi_0) L(\varphi_0) L^{-1}(\varphi_0) \times \\ \times (\Omega_0^\tau(\varphi_0))^T L(\varphi_\tau(\varphi_0)), \quad \tau > t. \end{cases} \tag{24}$$

Учитывая взаимосвязь между матрицантами систем (22), (22*) $\Omega_\tau^t(\varphi_0) \equiv L^{-1}(\varphi_t(\varphi_0))(\Omega_t^\tau(\varphi))^T L(\varphi_\tau(\varphi_0))$, равенство (24) представим в виде

$$G = \begin{cases} \Omega_0^t(\varphi_0) P(\varphi_0) \Omega_\tau^0(\varphi_0), & \tau < t; \\ \Omega_0^t(\varphi_0)(P(\varphi_0) - I_n) \Omega_\tau^0(\varphi_0), & \tau > t, \end{cases} \tag{24′}$$

где $P(\varphi_0) = -(L^{-1}(\varphi_0) C^T(\varphi_0) L(\varphi_0) - I_n)$. В силу единственности функции Грина (23) равенство (24) совпадает с равенством (23). Поэтому $G_t(\tau, \varphi) \equiv$

$\equiv -L^{-1}(\varphi_t(\varphi_0))\, G_\tau^T(t, \varphi_0)\, L(\varphi_\tau(\varphi_0))$ и матрица проектирования $C(\varphi)$ удовлетворяет тождеству

$$L(\varphi) C(\varphi) + C^T(\varphi) L(\varphi) \equiv L(\varphi), \tag{25}$$

что и завершает доказательство теоремы 2.

Следствие. *При выполнении условий теоремы* 1 *матричное уравнение* (19) *не имеет невырожденных решений, оно имеет нетривиальные вырождающиеся решения* $X = C_{21}(\varphi)$, $C_{21}(\varphi) \not\equiv 0$, $\det C_{21}(\varphi_0) = 0$ *при некоторых* $\varphi_0 \in \mathscr{T}_m$.

Замечание. Полагая в (25) $L(\varphi) = J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$, приходим к известному тождеству [9], которое указывает на симметричность матриц C_{12}, C_{21} в равенстве (8).

В связи с тем, что система уравнений (7) имеет единственную функцию Грина (8), возникает вопрос: какими свойствами должны обладать $n \times n$-мерные матрицы $B(\varphi)$, $D(\varphi) \in C^0(\mathscr{T}_m)$, не обязательно симметричные для того, чтобы система уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi),\ dx/dt = A(\varphi)x + B(\varphi)y,\ dy/dt = D(\varphi)x - A^T(\varphi), y \tag{26}$$

имела единственную функцию Грина?

Теорема 3. *Пусть существует n-мерная симметричная матрица* $S(\varphi) \in C'(\mathscr{T}_m)$, *удовлетворяющая условию* (5), *и матрица* $B(\varphi) \in C^0(\mathscr{T}_m)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\langle B(\varphi)\ y, y\rangle \geqslant \beta_0 \| y \|^2, \quad \beta_0 = \mathrm{const} > 0, \tag{27}$$

при всех $y \in R^n$. *Тогда для каждой матрицы* $D(\varphi) \in C^0(\mathscr{T}_m)$, *удовлетворяющей неравенству*

$$\langle D(\varphi)\ x, x\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in R^n, \tag{28}$$

система уравнений (26) *имеет единственную функцию Грина задачи об инвариантных торах.*

Доказательство. Выбираем квадратичную форму в следующем виде

$$V(\varphi, x, y) = \langle S(\varphi)x, x\rangle - \lambda\langle x, y\rangle, \quad \lambda > 0, \tag{29}$$

и вычисляем производную вдоль решений системы (26). При этом получаем

$$\begin{gathered}\dot V(\varphi, x, y) = \langle \dot S x, x\rangle + \langle S(Ax + By), x\rangle + \langle Sx, Ax + By\rangle - \lambda\langle Ax + By, y\rangle - \\ - \lambda\langle x, Dx - A^T y\rangle \leqslant -\|x\|^2 + 2\langle SBy, x\rangle - \lambda\langle By, y\rangle - \lambda\langle Dx, x\rangle \leqslant \\ \leqslant -\|x\|^2 - \beta_0\lambda\|y\|^2 + 2\langle SBy, x\rangle.\end{gathered}$$

Отсюда видно, что при достаточно больших значениях λ производная $\dot V(\varphi, x, y)$ невырожденной квадратичной формы (29), вычисленная вдоль решений системы (26), является отрицательно определенной. Поэтому (см. [8]) система уравнений (26) имеет единственную функцию Грина задачи об инвариантных торах.

Замечание 1. В теореме 3 матрицы $B(\varphi)$, $D(\varphi)$ не обязательно симметричны. Достаточно предполагать, чтобы все собственные числа матрицы $\hat B = B(\varphi) + B^T(\varphi)$ были положительны (отрицательны), а собственные числа матрицы $\hat D = D(\varphi) + D^T(\varphi)$ не отрицательны (не положительны).

Замечание 2. Условие (28) в теореме 3 не есть необходимым. Его можно заменить более слабым требованием: $\langle D(\varphi)\ y, y\rangle \geqslant -\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ — некоторое достаточно малое фиксированное число.

Замечание 3. При условиях теоремы 3 существует невырожденная замена переменных $x = L_{11}(\varphi)u + L_{12}(\varphi)v$, $y = L_{21}(\varphi)u + L_{22}(\varphi)v$,

$L_{ij}(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$, преобразующая систему уравнений (26) к расщепленному виду

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad du/dt = M^{+}(\varphi)\, u, \quad dv/dt = M^{-}(\varphi)\, v, \tag{26'}$$

где $n \times n$-мерные матрицы $M^{\pm}(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m)$ такие, что все нетривиальные решения линейных систем уравнений $du/dt = M^{\pm}(\varphi_t(\varphi_0))\, u$ экспоненциально затухают соответственно на $\pm\infty$ и возрастают на $\mp\infty$.

Действительно, квадратичная форма (29) с помощью невырожденной замены переменных

$$x = u + v, \quad y = \lambda^{-1}(S(\varphi) - I_n)\, u + \lambda^{-1}(S(\varphi) + I_n)\, v \tag{30}$$

преобразуется к алгебраической сумме квадратов: $V(\varphi, u + v, \lambda^{-1}(S - I_n)\, u + \lambda^{-1}(S + I_n)\, v) = \|u\|^2 - \|v\|^2$. Поэтому система уравнений (26) после преобразования (30) $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $du/dt = N_{11}(\varphi)\, u + N_{12}(\varphi)\, v$, $dv/dt = N_{21}(\varphi)\, u + N_{22}(\varphi)\, v$ будет обладать свойством

$$\left\langle \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant -\gamma(\|u\|^2 + \|v\|^2),$$

где $\gamma = \text{const} > 0$. Следовательно, систему уравнений (26) можно преобразовать к расщепленному виду (26').

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Некоторые проблемы теории многочастотных колебаний // VII Int. Konf. üder nichtlineare Schwingungen.— Berlin : Akad.-Verl.— 1977.— S. 107—116.
3. *О топологических* причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, В. Я. Лин, О. В. Локуциевский // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний.— Киев : Наук. думка.— 1977.— С. 54—61.
4. *Самойленко А. М.* Квазипериодические решения системы линейных алгебраических уравнений с периодическими коэффициентами // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР.— 1975.— С. 5—26.
5. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— **34**, № 6.— С. 1219—1240.
6. *Бронштейн И. У.* Линейные расширения и функции Ляпунова // Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук.— 1983.— № 3.— С. 16—20.
7. *Sacker J. R., Sell G. R.* A spectral theory for linear differential systems // J. Different. Equat.— 1978.— **27**, N. 3.— P. 320—358.
8. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Экспоненциальная дихотомия инвариантного тора динамических систем // Дифференц. уравнения.— 1979.— **15**, № 8.— С. 1434—1443.
9. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Множества инвариантных торов линейных расширений динамических систем // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 8.— С. 15—19.
10. *Кулик В. Л.* Квадратичные формы и дихотомия решений систем линейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 1.— С. 43—49.

Ин-т математики АН УССР, Киев — Получено 03.06.86