УДК 517.925

А. М. Самойленко

Асимптотические разложения и дифференцируемость по параметру инвариантного тора квазилинейной системы дифференциальных уравнений

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений вида

$$d\psi/dt = \omega + \varepsilon\Delta + \varepsilon f_1(h) + \varepsilon^2 F_1(\psi, h, \Delta, \varepsilon),$$
$$dh/dt = \varepsilon Hh + \varepsilon f_2(h) + \varepsilon^2 F_2(\psi, h, \Delta, \varepsilon), \tag{1}$$

правая часть которой определена в области

$$\psi \in \mathcal{T}_m, \quad \|h\| \leqslant \delta, \quad \|\Delta\| \leqslant \sigma_0, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \tag{2}$$

при достаточно малых положительных δ, ε_0, периодическая по $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$ с периодсм 2π, l раз непрерывно дифференцируема по ψ, $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_{n_0})$, ε и удовлетворяет условиям

$$f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0, \quad \partial f_2(0)/\partial h = 0. \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{T}_m$ — куб периодов периодической по ψ с периодом 2π функции, H — постоянная матрица, $\omega = (\omega_1, \ldots \omega_m)$ — постоянный вектор с положительными координатами.

Будем предполагать, что вещественные части собственных чисел матрицы H отличны от нуля. При этих предположениях в работе [1] изучено поведение при $\varepsilon\to 0$ производных по ψ, Δ, ε функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$, задающей инвариантный тор

$$h = u(\psi, \Delta, \varepsilon), \quad \psi \in \mathcal{T}_m \tag{4}$$

системы (1) для ψ, Δ, ε из области

$$\psi \in \mathcal{T}_m, \quad \|\Delta\| \leqslant \sigma_0, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{5}$$

Настоящая работа продолжает исследования [1]. В ней рассмотрены вопросы асимптотического представления функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$ как функции параметра ε и дифференцируемости этой функции по переменным ψ, Δ, ε в области

$$\psi \in \mathcal{T}_m, \quad \|\Delta\| \leqslant \sigma_0, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \tag{6}$$

включающей «критическое» значение $\varepsilon = 0$.

1. Определим p-е асимптотическое приближение функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$, заданной в области (5), как функцию $v_p(\psi, \Delta, \varepsilon)$, заданную в этой же области и такую, что

$$\| u(\psi, \Delta, \varepsilon) - v_p(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon^p M \tag{7}$$

для всех ψ, Δ, ε из области (5) и некоторой постоянной M, не зависящей от ε.

Обычно функция $v_p(\psi, \Delta, \varepsilon)$ задается разложением в конечную сумму по степеням параметра ε вида

$$v_p(\psi, \Delta, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{p-1} \varepsilon^\nu u_\nu(\psi, \Delta), \tag{8}$$

где $u_\nu(\psi, \Delta)$ — функции, определенные в области

$$\psi \in \mathcal{T}_m, \quad \|\Delta\| \leqslant \sigma_0. \tag{9}$$

Иногда функция $v_p(\psi, \Delta, \varepsilon)$ задается функциональной суммой вида

$$v_p(\psi, \Delta, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{p-1} u_\nu(\psi, \Delta, \varepsilon), \tag{10}$$

слагаемые которой $u_\nu(\psi, \Delta, \varepsilon)$ определяются, как правило, рекуррентными соотношениями проще, чем функция $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$, и удовлетворяют неравенствам

$$\| u_\nu(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon^\nu M_\nu, \quad \nu = \overline{0, p-1} \tag{11}$$

для всех ψ, Δ, ε из области (5) и некоторых постоянных M_ν, $\nu = \overline{0, p-1}$, не зависящих от ε.

Рассмотрим вопрос о p-м асимптотическом приближении $v_p(\psi, \Delta, \varepsilon)$ вида (10) при $l \geqslant p + 2$, $p \geqslant 1$ для функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$, определяющей инвариатный тор (4) системы (1). Для этого дифференциальное уравнение инвариантного тора (4) представим в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \psi}(\omega + \varepsilon\Delta) = \varepsilon H u - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \psi}[f_1(u) + \varepsilon F_1(\psi, u, \Delta, \varepsilon)] + \varepsilon f_2(u) + \varepsilon^2 F_2(\psi, u, \Delta, \varepsilon) \tag{12}$$

и постараемся подобрать $v_p(\psi, \Delta, \varepsilon)$ так, чтобы удовлетворить уравнению (12) с точностью до величин порядка малости ε^{p+1} включительно. Ввиду неравенства (47) [1], взятого при $\nu = 0$, следует положить

$$u_0(\psi, \Delta, \varepsilon) \equiv 0 \tag{13}$$

и рассмотреть случай $p \geqslant 2$.

Подставим выражения (10), (13) в уравнение (12) и разложим полученное после подстановки выражение правой части уравнения (12) в сумму по величинам одного порядка ε^ν, считая при этом u_ν и его производные $\partial u_\nu/\partial\psi$

величинами порядка ε^ν. Приравнивая выражение $\frac{\partial u_\nu}{\partial \psi}(\omega+\varepsilon\Delta)$ слагаемому порядка малости $\varepsilon^{\nu+1}$ указанного разложения правой части уравнения (12), получаем дифференциальное уравнение для определения функции $u_\nu(\psi, \Delta, \varepsilon)$ при $\nu=\overline{1, p-1}$. Свойства правой части системы уравнений (1), связанные с равенствами (3) и гладкостью ее по всем переменным ψ, h, Δ, ε в области (2), приводят к тому, что уравнение для $u_\nu=u_\nu(\psi, \Delta, \varepsilon)$ имеет вид

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial \psi}(\omega+\varepsilon\Delta)=\varepsilon H u_\nu+\varepsilon g_\nu\left(\psi, u_1, \ldots, u_{\nu-1}, \frac{\partial u_1}{\partial \psi}, \ldots, \frac{\partial u_{\nu-1}}{\partial \psi}, \Delta, \varepsilon\right), \qquad (14)$$

где g_ν — полином относительно $u_1, \ldots, u_{\nu-1}, \partial u_1/\partial\psi, \ldots, \partial u_{\nu-1}/\partial\psi$, ε степени не выше ν, линейно зависящий от $\partial u_1/\partial\psi, \ldots, \partial u_{\nu-1}/\partial\psi$, коэффициенты которого $(l-\nu)$ раз дифференцируемые функции по ψ, Δ в области (9), причем $u_j=u_j(\psi, \Delta, \varepsilon)$ при $j=\overline{1, \nu-1}$, $\nu\leqslant p$ справа в формуле (14). Более того, полином g_ν обладает тем свойством, что если функции $u_j(\psi, \Delta, \varepsilon)$ при любом $1\leqslant j\leqslant \nu-1$ удовлетворяют в области (5) неравенствам

$$\| D^\rho u_j(\psi, \Delta, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^j M_j, \quad \rho=\overline{0, l-j}, \qquad (15)$$

то в этой же области функция $g_\nu(\psi, u_1, \ldots, u_{\nu-1}, \partial u_1/\partial\psi, \ldots, \partial u_{\nu-1}/\partial\psi, \Delta, \varepsilon)$ при $u_j=u_j(\psi, \Delta, \varepsilon)$, $j=\overline{1, \nu-1}$, удовлетворяет неравенству

$$\| D^\rho g_\nu(\psi, u_1, \ldots, \partial u_1/\partial\psi, \ldots, \partial u_{\nu-1}/\partial\psi, \Delta, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^\nu \overline{M}_\nu, \quad \rho=\overline{0, l-\nu}, \qquad (16)$$

где $\overline{M}_\nu$ и M_j, $j=\overline{1, \nu-1}$, — положительные постоянные, не зависящие от ε.

В самом деле, характер выделения из правой части уравнения (12) функции g_ν и неравенство (15), взятое при $\rho=0$, обеспечивают неравенство (16) для $\rho=0$. Гладкость коэффициентов полинома g_ν по ψ, Δ и гладкость функций $u_j(\psi, \Delta, \varepsilon)$ по ψ, Δ, определяемая предположением выполнения неравенства (15) при $j=\overline{1, \nu-1}$, обеспечивают дифференцируемость функции $g_\nu(\psi, u_1, \ldots, \partial u_1/\partial\psi, \ldots, \partial u_{\nu-1}/\partial\psi, \Delta, \varepsilon)$ по ψ, Δ в области (5) до порядка $l-\nu$ включительно. То обстоятельство, что при дифференцировании функции g_ν по ψ, Δ ρ раз величины u_j и $\partial u_j/\partial\psi$ заменяются согласно неравенству (15) величинами того же порядка малости, гарантирует справедливость неравенства (16) с некоторым $\overline{M}_\nu$, зависящим от $M_1, \ldots, M_{\nu-1}$ и не зависящим от ε.

Из уравнения (14) определим $u_\nu(\psi, \Delta, \varepsilon)$ посредством интеграла вида

$$u_\nu(\psi, \Delta, \varepsilon)=\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau)\, g_\nu(\omega\tau/\varepsilon+\Delta\tau, u_1(\omega\tau/\varepsilon+\Delta\tau, \Delta, \varepsilon), \ldots, \Delta, \varepsilon)\, d\tau. \qquad (17)$$

Оценивая этот интеграл таким же образом, как и интеграл (9) [1], с учетом неравенств (15) и (16), находим $\| D^\rho u_\nu(\psi, \Delta, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^\nu M_\nu$, $\rho=\overline{0, l-\nu}$, для всех ψ, Δ, ε из области (5), где M_ν — положительная постоянная, не зависящая от ε. Из уравнения для $u_1(\psi, \Delta, \varepsilon)$, имеющего вид $\frac{\partial u_1}{\partial\psi}(\omega+\varepsilon\Delta)=$ $=\varepsilon H u_1+\varepsilon^2 F_2(\psi, 0, \Delta, 0)$, следует, что $u_1(\psi, \Delta, \varepsilon)$ определяется интегралом (17) при $g_\nu=g_1=F_2(\psi, 0, \Delta, 0)$, так что для этой функции справедлива оценка вида (15) с $j=1$. Этого достаточно в силу метода математической индукции, чтобы утверждать, что интеграл (17) определяет функции $u_\nu(\psi, \Delta, \varepsilon)$, заданные в области (5) и удовлетворяющие там неравенствам

$$\| D^\rho u_\nu(\psi, \Delta, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^\nu M_\nu, \quad \rho=\overline{0, l-\nu}, \qquad (18)$$

для всех $\nu=0, 1, \ldots, p$, где $p\leqslant l-1$, $l\geqslant 2$.

Покажем, что функция $v_p(\psi, \Delta, \varepsilon)$, определяемая формулами (13), (14) и (17), задает p-е асимптотическое приближение к функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$.

С учетом замены переменных (19) это приводит к тому, что функция $u(\psi, \Delta, \varepsilon) = v_p(\psi, \Delta, \varepsilon) + \varepsilon^{p-1} w(\psi, \Delta, \varepsilon)$ определяет инвариантный тор (4) системы уравнений (1), причем такой, что

$$\| D^\rho [u(\psi, \Delta, \varepsilon) - v_n(\psi, \Delta, \varepsilon)] \| \leqslant \varepsilon^p M, \quad \rho = \overline{0, \ l-p}, \tag{26}$$

для всех ψ, Δ, ε из области (5), где D^ρ — любая производная порядка ρ по переменным ψ, Δ. Асимптотический характер функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$ установлен.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть правая часть системы уравнений* (1) *удовлетворяет приведенным выше условиям и* $l \geqslant p+1$ *с целым* $p \geqslant 1$. *Тогда можно указать достаточно малое* $\varepsilon_0 > 0$ *и достаточно большие* M_ν, $\nu = \overline{0, \ p-1}$, *такие, что функция* $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$, *определяющая инвариантный тор* (4) *системы* (1), *имеет асимптотическое разложение* $u(\psi, \Delta, \varepsilon) = v_p(\psi, \Delta, \varepsilon) + w(\psi, \Delta, \varepsilon)$, *функции* $v_p(\psi, \Delta, \varepsilon)$ *и* $w(\psi, \Delta, \varepsilon)$ *которого допускают представление* (10), (13), (17) *и оценки* (11), (26) *для всех* ψ, Δ, ε *из области* (5).

Следует отметить, что функция $v_p(\psi, \Delta, \varepsilon)$ имеет производные по всем переменным ψ, Δ, ε из области (5) до порядка $l-p$. Для этих производных справедлива оценка вида (47) [1] $\| D^\rho v_p^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon) \| \leqslant M_\nu / \varepsilon^{2\nu-1}$, $\rho + \nu \leqslant l - p$, $\nu = \overline{0, \ l-p}$. Однако на основании данной оценки нельзя делать вывод о существовании для функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$ асимптотического разложения вида (8).

2. Наложим на частоты $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ системы уравнений (1) дополнительное условие, потребовав выполнения неравенства

$$|(k, \omega)| \geqslant K \|k\|^{-(m+1)}, \quad \|k\| \neq 0 \tag{27}$$

для любого целочисленного вектора $k = (k_1, \ldots, k_m)$ и некоторого $K > 0$, где $(k, \omega) = \sum_{i=1}^{m} k_i \omega_i$, $\|k\|^2 = \sum_{i=1}^{m} k_i^2$.

При этом предположении для функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$, определяющей инвариантный тор (4) системы (1), выясним вопрос ее асимптотического разложения по степеням параметра ε, а также вопрос о ее гладкости по параметру ε в области (6). Будем искать инвариантный тор (4), положив

$$u(\psi, \Delta, \varepsilon) = \varepsilon u_1(\psi, \Delta) + \ldots + \varepsilon^{p-1} u_{p-1}(\psi, \Delta) + \varepsilon^p w(\psi, \Delta, \varepsilon) \tag{28}$$

и подобрав функции $u_\nu(\psi, \Delta)$, $\nu = \overline{1, p-1}$, $p \geqslant 2$, из условия, чтобы функция

$$v_p(\psi, \Delta, \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{p-1} \varepsilon^\nu u_\nu(\psi, \Delta) \tag{29}$$

удовлетворяла уравнению (12) с точностью до величин порядка ε^{p-1} включительно.

Естественная процедура подстановки разложения (29) в уравнение (12) с последующим выделением коэффициентов при одинаковых степенях ε позволяет получить дифференциальные уравнения, из которых находят функции $u_\nu(\psi, \Delta)$, $\nu = \overline{1, p-1}$. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \psi} \omega = H u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \Delta + F_2(\psi, 0, \Delta, 0), \ldots, \frac{\partial u_{p-1}}{\partial \psi} \omega =$$

$$= H u_{p-2} - \frac{\partial u_{p-2}}{\partial \psi} \Delta + q_{p-1}(\psi, u_1, \ldots, u_{p-3}, \partial u_1/\partial \psi, \ldots, \partial u_{p-3}/\partial \psi, \Delta), \tag{30}$$

где q_{p-1} — полином относительно $u_1, \ldots, u_{p-3}$, линейно зависящий от $\partial u_1/\partial \psi, \ldots, \partial u_{p-3}/\partial \psi$, коэффициенты которого $(l-p+1)$ раз непрерывно дифференцируемые функции переменных ψ, Δ при $\psi \in \mathcal{T}_m$, $\|\Delta\| \leqslant \sigma_0$, периодические по ψ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, с периодом 2π, причем $u_j = u_j(\psi, \Delta)$ при $j = \overline{1, p-2}$. Очевидно, что периодическим периода 2π по ψ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, решением первого из уравнений (30) является произвольная постоянная $u_1 = c_1$. Выберем ее так, чтобы второе из уравнений (30) удовлетворяло необходимому условию его разрешимости в классе периодических по ψ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, периода 2π функций, состоящему в равенстве нулю среднего значения правой части второго из уравнений (30) при $u_1 = c_1$. Этим однозначно определяется выражение для u_1:

$$u_1 = -H^{-1}\overline{F}_2, \quad \overline{F}_2 = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F_2(\psi, 0, \Delta, 0)\, d\psi. \tag{31}$$

Более того, равенство (31) позволяет определить функцию

$$u_2(\psi, \Delta) = c_2 + \tilde{F}_2(\psi, 0, \Delta, 0) = c_2 + \sum_{|k| \neq 0} \frac{F_k(\Delta)}{i(k, \omega)} e^{i(k, \psi)}, \tag{32}$$

«формально» удовлетворяющую второму из уравнений (30). Здесь c_2 — произвольная постоянная, $\sum_k F_k(\Delta) e^{i(k,\psi)}$ — ряд Фурье функции $F_2(\psi, 0, \Delta, 0)$. Простой анализ функции (32) показывает, что при

$$l_1 = l - (m+1) > m/2 + d_1, \quad d_1 \geqslant 1, \tag{33}$$

она задает периодическое периода 2π по ψ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, решение второго из уравнений (30), имеющее непрерывные производные по ψ до порядка d_1 включительно и обобщенные производные по ψ до порядка l_1 включительно.

При выполнении неравенства (33) правая часть третьего из уравнений (30) является функцией, имеющей непрерывные производные по ψ до порядка $d_1 - 1$ включительно и обобщенные производные по ψ до порядка $l_1 - 1$ включительно. Необходимое условие разрешимости этого уравнения в классе периодических периода 2π по ψ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, функций однозначно определяет c_2 в формуле (32):

$$c_2 = -H^{-1}\overline{q}_3, \quad \overline{q}_3 = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} q_3(\psi, u_1(\psi, \Delta), \partial u_1(\psi, \Delta)/\partial\psi, \Delta)\, d\psi.$$

Неравенство вида (33)

$$l_2 = l_1 - 1 - (m+1) > m/2 + d_2, \quad d_2 \geqslant 1, \tag{34}$$

гарантирует существование решения третьего из уравнений (30):

$$u_3(\psi, \Delta) = c_3 + H\tilde{u}_2(\psi, \Delta) - \frac{\partial \tilde{u}_1(\psi, \Delta)}{\partial\psi}\Delta + \tilde{q}_3\left(\psi, u_1(\psi, \Delta), \frac{\partial u_1(\psi, \Delta)}{\partial\psi}, \Delta\right) = c_3 + \sum_{|k| \neq 0} \frac{q'_{k3} e^{i(k,\psi)}}{i(k, \omega)}, \tag{35}$$

имеющего непрерывные производные по ψ до порядка d_2 включительно и обобщенные производные по ψ до порядка l_2 включительно. Правая часть четвертого из уравнений (30) является функцией, имеющей непрерывные производные по ψ до порядка $d_2 - 1$ включительно и обобщенные производные по ψ до порядка $l_2 - 1$ включительно. Это позволяет однозначно найти c_3 в формуле (35) и т. д.

На последнем шаге этого процесса однозначно определяются c_{p-2}:

$$c_{p-2} = -H^{-1}\overline{q}_{p-1}, \quad \overline{q}_{p-1} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} q_{p-1}(\psi, u_1(\psi, \Delta), \dots, \Delta)\, d\psi$$

и функция

$$u_{p-1}(\psi, \Delta) = c_{p-1} + H\tilde{u}_{p-2}(\psi, \Delta) - \frac{\partial \tilde{u}_{p-2}(\psi, \Delta)}{\partial \psi}\Delta + \tilde{q}_{p-1}(\psi, u_1(\psi, \Delta), \ldots, \Delta) =$$

$$= c_{p-1} + \sum_{|k|\neq 0} \frac{q'_{kp-1} e^{i(k,\psi)}}{i(k, \omega)}, \tag{36}$$

задающая «формальное» периодическое решение последнего из уравнений (30) при произвольном значении постоянной c_{p-1}.

Так как правая часть последнего из уравнений (30) является функцией, имеющей непрерывные производные по ψ до порядка $d_{p-2} - 1$ включительно и обобщенные производные по ψ до порядка $l_{p-2} - 1$ включительно, то неравенство вида (33)

$$l_{p-1} = l_{p-2} - 1 - (m+1) > m/2 + d_{p-1}, \quad d_{p-1} \geqslant 1, \tag{37}$$

обеспечивает то, что формальное решение (36) становится решением последнего из уравнений (30), причем имеющим непрерывные производные по ψ до порядка d_{p-1} включительно и обобщенные производные по ψ до порядка l_{p-1} включительно

Определим в формуле (36) c_{p-1}, положив его равным значению

$$c_{p-1} = -H^{-1}\bar{q}_p, \quad \bar{q}_p = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} q_p(\psi, u_1(\psi, \Delta), \ldots, \Delta)\, d\psi, \tag{38}$$

где $q_p(\psi, u_1, \ldots, u_{p-2}, \partial u_1/\partial\psi, \ldots, \partial u_{p-2}/\partial\psi, \Delta)$ — функция, определяющая значение $u_p(\psi, \Delta)$ при построении асимптотического приближения $v_{p+1}(\psi, \Delta, \varepsilon)$ вида (29). Этим однозначно определяется разложение (29) для $p \geqslant 2$.

Из неравенств (33), (34) и (37) находим значения величин l, l_j, d_j:

$$l \geqslant (p-1)(m+2) + m/2 + d, \quad d \geqslant 1, \quad l_j = l - j(m+2) + 1,$$

$$d_j = (p - j - 1)(m+2) + d, \quad j = \overline{1, p-1}, \tag{39}$$

удовлетворяющие этим неравенствам.

Так как дифференцирование по Δ уравнений (30) уменьшает гладкость правой части этих уравнений ровно на столько единиц, сколько раз дифференцируются по Δ эти уравнения, то выполнение неравенств (39) гарантирует непрерывную дифференцируемость по ψ, Δ функций $u_j(\psi, \Delta)$ в области $\psi \in \mathscr{T}_m$, $\|\Delta\| \leqslant \sigma_0$ для $j = \overline{1, p-1}$. Продифференцируем правую часть $(j+1)$-го уравнения (30) $\bar{d}_j$ раз по Δ, выбрав $\bar{d}_j \leqslant d_j$. Для функции $D_\Delta^{\bar{d}_j} u_{j+1}(\psi, \Delta)$ определится тогда уравнение вида (30), правая часть которого будет иметь обобщенные производные по ψ до порядка $l_{j-1} - \bar{d}_j - 1$. При

$$l_{j-1} - \bar{d}_j - 1 > (d_j - \bar{d}_j) + m/2 + (m+1) \tag{40}$$

функция $D_\Delta^{\bar{d}_j} u_{j+1}(\psi, \Delta)$ оказывается $d_j - \bar{d}_j$ раз непрерывно дифференцируемой по ψ, следовательно, функция $u_{j+1}(\psi, \Delta)$ является d_j раз непрерывно дифференцируемой по ψ, Δ в рассматриваемой области. Так как постоянные l_{j-1}, d_j, взятые согласно соотношениям (39), удовлетворяют неравенству (40) для любого $j = \overline{1, p-1}$, то этим доказывается непрерывная дифференцируемость по ψ, Δ до порядка d_j функции $u_{j+1}(\psi, \Delta)$ при $j = \overline{0, p-2}$ в области $\psi \in \mathscr{T}_m$, $\|\Delta\| \leqslant \sigma_0$. Установим асимптотический характер разложения (29), члены которого определены формулами (31), (32), (35) — (38). Для этого в системе уравнений (12) сделаем замену, положив

$$u = v_{p_1+1}(\psi, \Delta, \varepsilon) + \varepsilon^{p_1-1} w, \quad p_1 \geqslant 2. \tag{41}$$

Относительно w получаем уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial \psi}\left(\omega+\varepsilon\Delta+\varepsilon^2 F_5\left(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon), w, \Delta, \varepsilon\right)\right)=\varepsilon H w+\varepsilon^2 F_6(\psi,$$
$$v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon), w, \Delta, \varepsilon), \qquad (42)$$

где

$$F_5(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon), w, \Delta, \varepsilon)=\int_0^1 \frac{\partial f_1\left[t\left(v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon)+\varepsilon^{p_1-1}w\right)\right]}{\partial h}\,dt\times$$
$$\times\left[u_1(\psi,\Delta)+\ldots+\varepsilon^{p_1-1}u_{p_1}(\psi,\Delta)+\varepsilon^{p_1-2}w\right]+$$
$$+F_1(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon)+\varepsilon^{p_1-1}w, \Delta, \varepsilon), \qquad (43)$$

$$F_6(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon), w, \Delta, \varepsilon)=\left[\int_0^1 \frac{\partial f_2^{(1)}(v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\tau\varepsilon), w, \Delta, \tau\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\,d\tau+\right.$$
$$+\int_0^1 \frac{\partial F_2(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon)+t\varepsilon^{p_1-1}w, \Delta, \varepsilon)}{\partial h}\,dt-\sum_{\nu=1}^{p_1+1}\varepsilon^{\nu-1}\frac{\partial u_\nu(\psi,\Delta)}{\partial\psi}\times$$
$$\times\int_0^1 \frac{\partial f_1(v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon)+t\varepsilon^{p_1-1}w)}{\partial h}\,dt-\frac{\partial v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon)}{\partial\psi}\times$$
$$\left.\times\int_0^1 \frac{\partial F_1(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon)+t\varepsilon^{p_1-1}w, \Delta, \varepsilon)}{\partial h}\,dt\right]w+Q\left(\psi, u_1(\psi,\Delta),\ldots\right.$$
$$\left.\ldots, u_{p_1}(\psi,\Delta), \frac{\partial u_1(\psi,\Delta)}{\partial\psi},\ldots,\frac{\partial u_{p_1}(\psi,\Delta)}{\partial\psi}, \Delta, \varepsilon\right),$$

$$f_2^{(1)}(v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon), w, \Delta, \varepsilon)=\int_0^1 \frac{\partial f_2(v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon)+t\varepsilon^{p_1-1}w)}{\partial h}\,dt,\ Q(\psi, u_1(\psi,\Delta),\ldots$$
$$\ldots,\Delta,\varepsilon)=\frac{1}{p_1!}\int_0^1(1-\tau)^{p_1}q^{(p_1+1)}(\psi,\Delta,\tau\varepsilon)\,d\tau,\ q(\psi,\Delta,\varepsilon)=-\frac{\partial v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon)}{\partial\psi}\times$$
$$\times\left[\omega+\varepsilon\Delta+\varepsilon f_1(v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon))+\varepsilon^2F_1(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon),\Delta,\varepsilon)\right]+$$
$$+\varepsilon H v_{p_1+1}(\omega,\Delta,\varepsilon)+\varepsilon f_2(v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon))+\varepsilon^2F_2(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon),\Delta,\varepsilon),$$
$$q^{(p_1+1)}(\psi,\Delta,\varepsilon)=\left[\frac{\partial^{p_1+1}q(\psi,\Delta,\bar\varepsilon)}{\partial\bar\varepsilon^{p_1+1}}\right]_{\bar\varepsilon=\tau\varepsilon}. \qquad (44)$$

Будем предполагать, что число l удовлетворяет неравенству (39) при $p=p_1+1$.

Из формул (43), (44) видно, что функции $F_5(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon), h, \Delta, \varepsilon)$ и $F_6(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon), h, \Delta, \varepsilon)$ определены и $(d-1)$ раз непрерывно дифференцируемы по ψ, h, Δ, ε в области (2) с достаточно малым $\varepsilon_0>0$.

Применяя к системе уравнений вида (23)

$$d\psi/dt=\omega+\varepsilon\Delta+\varepsilon^2F_5(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon), h, \Delta, \varepsilon),$$
$$dh/dt=\varepsilon Hh+\varepsilon^2F_6(\psi, v_{p_1+1}(\psi,\Delta,\varepsilon), h, \Delta, \varepsilon) \qquad (45)$$

теорему 1 [1], убеждаемся, что при $d-1\geqslant 1$ инвариантный тор $h=w(\psi, \Delta,\varepsilon)$, $\psi\in\mathscr{T}_m$ системы (45) существует и удовлетворяет неравенству

$$\|D^\rho w^{(\nu)}(\psi,\Delta,\varepsilon)\|\leqslant M_\nu/\varepsilon^{2\nu-1},\quad \rho+\nu\leqslant d-1,\quad \nu=\overline{0,d-1} \qquad (46)$$

для всех ψ, Δ, ε из области (10), где M_ν — положительные постоянные, не зависящие от ε.

Из неравенства (46) следует

$$\| D^\rho [\varepsilon^{p_1-1} w(\psi, \Delta, \varepsilon)]^{(\nu)} \| \leqslant \overline{M}_\nu \varepsilon^{p_1-2\nu}, \quad \rho+\nu \leqslant d-1, \quad \nu = \overline{0, d-1}, \tag{47}$$

где $\overline{M}_\nu$ не зависит от ε. При

$$p_1 > 2(d-1) \tag{48}$$

функция $\varepsilon^{p_1-1} w(\psi, \Delta, \varepsilon)$ оказывается $(d-1)$ раз непрерывно дифференцируемой по всем своим переменным в области (6), включающей значение $\varepsilon = 0$.

С учетом формулы замены (41) и неравенств (39), (48) изложенное можно резюмировать в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть правая часть системы уравнений* (1) *удовлетворяет приведенным выше условиям и частоты* $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ *удовлетворяют неравенству* (27). *Тогда для любых целых* $p \geqslant 2$, $d \geqslant 1$ *и* $s \geqslant 1$ *можно указать достаточно малое* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p, d, s) > 0$, *достаточно большое* $M = M(\varepsilon_0) > 0$ *и целые* $l_1(p, d)$, $l_2(s)$ $(l_1(p, d) > p, l_2(s) > l_1(s, s))$ *такие, что при* $l \geqslant l_1(p, d)$ *функция* $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$, *определяющая инвариантный тор* (4) *системы* (1), *имеет асимптотическое разложение вида* (29), *допускающее оценку* $\| D^\rho [u(\psi, \Delta, \varepsilon) - v_p(\psi, \Delta, \varepsilon)] \| \leqslant \varepsilon^p M$, $\rho = \overline{0, d}$, *для всех* ψ, Δ, ε *из области* (6), *а при* $l \geqslant l_2(s)$ *функция* $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$ *является* s *раз непрерывно дифференцируемой по* ψ, Δ, ε *в области* (6) *и* $u^{(\nu)}(\psi, \Delta, 0) = \nu!\ u_\nu(\psi, \Delta)$, $\nu = \overline{1, s}$.

Для справедливости утверждений теоремы 2 достаточно положить

$$l_1(p, d) = p(m+2) + m/2 + d + 1, \quad l_2(s) = l_1(2s+1, s) = \\ = s(2m+5) + 3m/2 + 3 \tag{49}$$

и учесть, что при таком выборе $l_1(p, d)$ и $l_2(s)$ справедливы предположения о гладкости правой части системы (1), ведущие к оценке (46) с $d-1$, равным значению d, и оценке (47) с $p_1 = 2s+1$ и $d-1 = s$.

Следует отметить, что потеря гладкости функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ по сравнению с гладкостью правой части системы (1) в этой точке, определяемая вторым из соотношений (49), естественна. Это становится ясным, если учесть, что производные вида $u^{(\nu)}(\psi, \Delta, \varepsilon)$ функции $u(\psi, \Delta, \varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ определяются как решения дифференциального уравнения вида $\partial w / \partial \psi \omega = F(\psi)$, гладкость которого существенно зависит от арифметических свойств базиса частот $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, о чем говорится, например, в [2].

1. *Самойленко А. М.* О гладкости по параметру инвариантного тора квазилинейной системы дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 5.— С. 605—618.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 244 с.

Киев. ун-т

Получено 14.01.86