УДК 517.9

Ю. А. Рябов

Главные двусторонние решения линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием

При анализе ряда задач механики, физики, математической биологии (например, задач динамики вязкоупругих тел, задач о взаимодействии волн в электромагнитных полях, о взаимодействии биологических популяций [1—3]), в которых учитывается эффект последействия, используются математические модели, включающие в качестве основного элемента интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра. При этом рассматриваются уравнения как с бесконечным последействием, так и без последействия. Будем рассматривать системы уравнений первого типа следующего вида (достаточно часто встречающиеся при анализе упомянутых выше задач):

$$dx/dt = Ax + \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{t} R(t-s)\, x(s)\, ds, \tag{1}$$

где интеграл в правой части риманов, x — n-вектор, A — постоянная $(n \times n)$-матрица, $R(t-s)$ — матрица, называемая ядром системы (1), ε — положительный малый параметр, причем $R(t-s)$ удовлетворяет при $t-s>0$ оценке

$$\| R(t-s) \| \leqslant c\, \frac{e^{-\gamma(t-s)}}{(t-s)^{1-\alpha}}. \tag{2}$$

Здесь c, γ, α — положительные постоянные, $0<\alpha\leqslant 1$.

1. Главные двусторонние решения. Теорема об их существовании. Систему (1) можно трактовать как систему функционально-дифференциальных уравнений с бесконечно большим распределенным запаздыванием в аргументе. Постановка задачи Коши для уравнений с запаздывающим аргументом обычно включает в себя задание так называемой начальной функции [4, 5]. Если $t=0$ — начальный момент, то начальная функция $\varphi(t)$ задается на левой полуоси $-\infty<t\leqslant 0$, т. е. принимается

$$x(t) \equiv \varphi(t), \quad -\infty < t \leqslant 0. \tag{3}$$

При условии сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{0} R(t-s)\varphi(s)\,ds \tag{4}$$

к непрерывной при $t \geqslant 0$ функции можно представить систему (1) в виде

$$dx/dt = Ax + \varepsilon \int_0^t R(t-s)\,x(s)\,ds + \varepsilon \int_{-\infty}^{0} R(t-s)\varphi(s)\,ds. \tag{5}$$

Это — линейная неоднородная система интегро-дифференциальных уравнений без последействия. Такая система имеет [6] единственное решение, определенное на правой полуоси t при начальном условии $x(0) = \varphi(0)$. Таким образом, мы получим решение $x(t)$ системы (1), равное заданной функции $\varphi(t)$ на левой полуоси t и определенное единственным образом на правой полуоси t. Такие решения называют в теории уравнений с запаздывающим аргументом односторонними, соответствующими заданным начальным функциям. Данная статья посвящена решениям другого типа, а именно двусторонним решениям. Это — решения системы (1), определенные на всей оси t и удовлетворяющие обычному для задачи Коши начальному условию, которое задается при начальном значении t_0 аргумента t:

$$x(t_0) = x_0. \tag{6}$$

В отношении двусторонних решений возникают прежде всего вопросы их существования и единственности, затем вопросы их асимптотических свойств, их связи с односторонними решениями. В данной статье будем рассматривать вопрос существования и единственности двусторонних решений определенного класса. В отличие от [7, 8] введем понятие главных двусторонних решениях и приведем доказательство единственности таких решений.

Уточним постановку задачи о нахождении двусторонних решений, вводя дополнительное требование — непрерывность решения по ε при $\varepsilon = 0$. Ввиду линейности системы (1) это требование означает, что если $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ — двустороннее решение системы (1), $x^0(t)$ — решение вырожденной системы

$$dx/dt = Ax \tag{7}$$

при одних и тех же начальных условиях, а $\chi(\varepsilon)$, χ^0 — соответственно их характеристические показатели, то не только

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{x}(t, \varepsilon) = x^0(t), \tag{8}$$

но также

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \chi(\varepsilon) = \chi^0. \tag{9}$$

Таким образом, будем рассматривать не все двусторонние решения, а только те, которые удовлетворяют условиям (8), (9). Такие решения назовем главными двусторонними решениями. Именно главные двусторонние решения соответствуют естественному предположению, что влияние интегральной части в (1) на описываемый этой системой процесс тем меньше, чем меньше ε, и исчезающе мало при $\varepsilon \to 0$.

Назовем главной двусторонней фундаментальной матрицей системы (1) такую $(n \times n)$-матрицу $X(t, \varepsilon)$, столбцы которой являются линейно независимыми двусторонними решениями системы (1), причем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} X(t, \varepsilon) = X^0(t), \tag{10}$$

где $X^0(t)$ — фундаментальная матрица вырожденной системы (7) и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\chi_1(\varepsilon), \chi_2(\varepsilon), \ldots) = (\chi_1^0, \chi_2^0, \ldots). \tag{11}$$

Здесь $(\chi_1(\varepsilon), \chi_2(\varepsilon), \ldots)$, $(\chi_1^0, \chi_2^0, \ldots)$ — спектры характеристических показателей матриц $X(t, \varepsilon)$, $X(t)^0$ соответственно. (Последнее свойство относится, естественно, к характеристическим показателям как при $t \to \infty$, так и при $t \to -\infty$.) Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если ядро $R(t)$ системы* (1) *удовлетворяет оценке* (2), *а собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A удовлетворяют условию*

$$\min_j \lambda_j > -\gamma, \tag{12}$$

то система (1) *при значениях ε, не превышающих некоторой границы, имеет главную двустороннюю фундаментальную матрицу вида*

$$X(t\ \varepsilon) = e^{Dt}, \tag{13}$$

где $D = D(\varepsilon)$ — постоянная $(n \times n)$-матрица такая, что $D(\varepsilon) \to A$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Полагая $D = A + Q$, для матрицы Q получаем матричное уравнение

$$Q = \varepsilon \int_0^\infty R(\theta)\, e^{-(A+Q)\theta} d\theta. \tag{14}$$

Следуя методу мажорирующих уравнений Ляпунова [9], ставим в соответствие матричному уравнению (14) алгебраическое уравнение

$$u = \varepsilon \frac{cm\Gamma(\alpha)}{(\gamma + \mu - mu)^\alpha}, \tag{15}$$

где c — постоянная в оценке (2), $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, μ — такая постоянная, что

$$-\gamma < \mu < \min_j \operatorname{Re} \lambda_j \tag{16}$$

и m, $m \geqslant 1$, — постоянная в оценке

$$\| e^{-A\theta} \| \leqslant m e^{-\mu\theta}, \quad \theta \geqslant 0. \tag{17}$$

Уравнение (15) является мажорирующим в смысле Ляпунова по отношению к матричному уравнению (14) в области

$$\| Q \| < \frac{\gamma + \mu}{m}, \tag{18}$$

причем соответствующим аналитической мажоранте. Это вытекает из того, что правая часть уравнения (15) разлагается в области

$$u < \frac{\gamma + \mu}{m} \tag{18'}$$

в ряд по степеням u, являющийся мажорирующим по отношению к ряду по степеням Q, в который разлагается правая часть уравнения (14).

Анализ мажорирующего уравнения (15) показывает, что оно имеет положительное решение $u = u(\varepsilon)$, стремящееся к нулю при $\varepsilon \to 0$, если

$$\varepsilon \leqslant \varepsilon_* = \frac{(\gamma + \mu)^{\alpha+1} \alpha^\alpha}{cm^2 \Gamma(\alpha)(\alpha + 1)^{\alpha+1}}, \tag{19}$$

и при этом

$$u(\varepsilon) \leqslant u(\varepsilon_*) = u_* = \frac{\gamma + \mu}{m(\alpha + 1)}. \tag{20}$$

Согласно теории мажорирующих уравнений Ляпунова

а) матричное уравнение (14) имеет при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ единственное решение $Q = Q(\varepsilon)$ такое, что $Q(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и при этом

$$\| Q(\varepsilon) \| \leqslant u(\varepsilon); \tag{21}$$

б) это решение, а вместе с тем и матрица $Q(\varepsilon)$ представимы при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ степенным рядом по ε.

Таким образом, матрица $D(\varepsilon)$, выписанная в выражении (13), найдена. Из свойств же матричных экспонент вытекает, что матрица $X(t, \varepsilon)$, определяемая согласно (13), является фундаментальной матрицей системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt = Dx \tag{22}$$

и состоит, следовательно, из n линейно независимых столбцов. Свойство (11) характеристических показателей справедливо, поскольку $D(\varepsilon) \to A$ при $\varepsilon \to 0$. Теорема доказана.

2. Единственность главных двусторонних решений. Матрица (13) является нормированной при $t = 0$, и с ее помощью можно построить главное двустороннее решение системы (1) при любом t_0 и любом начальном векторе $x(t_0) = x_0$. Это решение имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = e^{D(t-t_0)}x_0. \tag{23}$$

Возникает вопрос, не существует ли при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ и начальном условии $x(t_0) = x_0$ другое главное решение, кроме решения вида (23). Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1, а* m, μ, ε_*, u_* *— величины, определяемые согласно* (17), (19), (20). *Тогда при всех* $\varepsilon < \varepsilon_*$ *система* (1) *имеет при заданном начальном векторе единственное главное двустороннее решение, принадлежащее множеству непрерывных функций* $U_q = \{\psi(t, \varepsilon) : \|\psi(t, \varepsilon)\|_{t\leqslant 0} e^{qt} < \infty\}$, *для которого* q *— некоторое число в левой окрестности* γ.

Доказательство. Рассмотрим вместо (1) эквивалентное при заданном начальном условии интегральное уравнение

$$x(t) = e^{At}x_0 + \varepsilon \int_0^t e^{A(t-\tau)} \int_0^\infty R(\theta)\, x(\tau - \theta)\, d\theta d\tau \tag{24}$$

или (в операторном виде)

$$x = e^{At}x_0 + \varepsilon Lx, \tag{25}$$

где L — оператор, соответствующий интегралу в правой части (24). Ищем решение этого уравнения при $t \leqslant 0$. С этой целью строим ряд

$$x^0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t, \varepsilon), \tag{26}$$

где

$$x^0(t) = e^{At}x_0, \quad x_1(t, \varepsilon) = \varepsilon L(x^0), \quad x_2(t, \varepsilon) = \varepsilon L(x_1), \ldots \tag{27}$$

Выведем оценки для $x_j(t, \varepsilon)$, $j = 1, 2, \ldots$, с учетом того, что если χ — наибольший характеристический показатель матрицы $\exp(At)$ при $t \to -\infty$, то (см. (17))

$$\|e^{At}\| \leqslant me^{\mu t}, \quad t \leqslant 0, \tag{28}$$

где постоянная m ($\geqslant 1$) зависит от μ, и $\mu = \chi - \delta\ \forall\delta > 0$. Для $x^0(t)$ имеем такую же оценку

$$\|x^0(t)\| = \|e^{At}x_0\| \leqslant Me^{\mu t}, \quad M = m\|x_0\|. \tag{28'}$$

(если начальный вектор x_0 является таким, что $x^0(t)$ содержит все экспоненты, входящие в состав матрицы e^{At}, и $\chi^0 = \chi[x^0(t)] = \chi$). Тогда из (28′) получаем

$$\|x^0(t)\| e^{q} \leqslant M, \tag{29}$$

если число q удовлетворяет неравенству $q + \mu > 0$.

Для $x_j(t, \varepsilon)$, $j \geqslant 1$, находим оценки

$$\begin{gathered}
\| x_1(t, \varepsilon) \|_{t\leqslant 0} = \varepsilon \| L(x^0(t)) \| \leqslant \varepsilon\rho \||| x^0(s)_{s\leqslant 0} e^{qs} |\|| e^{-qt} \leqslant \varepsilon\rho M e^{-qt}, \\
\| x_2(t, \varepsilon) \|_{t\leqslant 0} = \varepsilon \| L(x_1(t, \varepsilon)) \| \leqslant \varepsilon\rho \||| x_1(s, \varepsilon)_{s\leqslant 0} e^{qs} |\|| \leqslant (\varepsilon\rho)^2 M e^{-qt}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{30}$$

где

$$\rho = \frac{cm\Gamma(\alpha)}{(\mu + q)\ (\gamma - q)^{\alpha}}, \quad |\|\cdot\||| = \sup_t \|\cdot\|. \tag{31}$$

Эти оценки свидетельствуют о сходимости ряда (26) к решению $x(t, \varepsilon)$ на левой полуоси $-\infty < t \leqslant 0$, если существует число q такое, что не только $q + \mu > 0$, но также

$$\varepsilon\rho < 1. \tag{32}$$

Можно показать, что для любого значения ε, удовлетворяющего неравенству

$$\varepsilon < \tilde{\varepsilon} = \frac{\alpha^{\alpha}(\gamma + \mu)^{\alpha+1}}{cm\Gamma(\alpha)(1 + \alpha)^{\alpha}}, \tag{33}$$

условие (32) удовлетворяется при

$$q = q_* = \frac{\gamma - \alpha\mu}{1 + \alpha} \tag{33*}$$

и, кроме того, при каждом q в интервале $(v_1(\varepsilon) + \mu, v_2(\varepsilon) - \mu)$, где $v_1(\varepsilon)$, $v_2(\varepsilon)$ — два положительных решения уравнения

$$v = \frac{\varepsilon c\Gamma(\alpha)}{(\gamma + \mu - v)^{\alpha}}, \tag{34}$$

причем $v_1(\varepsilon) \to 0$, $v_2(\varepsilon) \to \gamma + \mu$ при $\varepsilon \to 0$, $q < \gamma$.

Таким образом, доказана сходимость ряда (26) к решению $x(t, \varepsilon)$ исходной системы (1) на левой полуоси t при всех значениях ε, удовлетворяющих оценке (33), более точной, чем оценка (19), при $m > 1$. Это решение является аналитическим относительно ε, принадлежит множеству U_q, $q < \gamma$, и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t, \varepsilon) = x^0(t). \tag{35}$$

При этом справедлива оценка

$$\| x(t, \varepsilon)_{t\leqslant 0} - e^{At}x_0 \| \leqslant \frac{\varepsilon\rho\ M}{1 - \varepsilon\rho} e^{-qt}. \tag{36}$$

Так как при $\varepsilon \to 0$ число q, при котором удовлетворяется неравенство (32), может быть выбрано сколь угодно близким к $-\mu$ справа, а $\mu = \chi^0 - \delta$ $\forall\delta > 0$, $\chi^0 = \chi[x^0(t)]$, $t \to -\infty$, то, согласно (36), характеристический показатель решения $x(t, \varepsilon)$ при $t \to -\infty$ стремится при $\varepsilon \to 0$ к χ^0. Следовательно, $x(t, \varepsilon)$ удовлетворяет на левой полуоси t свойствам главных двусторонних решений.

Ввиду оценок (30) оператор L является сжимающим на подмножестве функций в U_q таких, что на левой полуоси t удовлетворяются свойства главных двусторонних решений. Следовательно, $x(t, \varepsilon)$ — единственное на левой полуоси t решение системы (1), принадлежащее множеству U_q и удовлетворяющее свойствам главных двусторонних решений. К такому же выводу можно прийти, применяя для анализа ряда (26) метод мажорирующих уравнений Ляпунова.

Далее следует продолжить найденное решение $x(t, \varepsilon)$, $t \leqslant 0$, на правую полуось t, т. е. построить решение системы (1) при $t > 0$, если оно задано на левой полуоси t. Это — задача о построении одностороннего решения, имеющая единственное решение. Рассматривая же уравнение (24) и ряд (26) при $t \geqslant 0$, получаем, что при значениях ε, удовлетворяющих (33), этот ряд сходится к решению системы (1), причем к решению, удовлетворяющему свойствам главных двусторонних решений.

Таким образом, мы доказали существование и единственность главных двусторонних решений на всей оси t, принадлежащих множеству U_q. Это решение выражается формулой (23), из которой также вытекает требуемое свойство характеристических показателей этого решения. Теорема доказана.

Из теорем 1, 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Система* (1) *интегро-дифференциальных уравнений эквивалентна на множестве главных двусторонних решений системе* (22) *с постоянной матрицей* D.

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование.— М.: Наука, 1976.— 288 с.
2. *Локшин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.— 152 с.
3. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости.— М.: Наука, 1970.— 280 с.
4. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.— М.: Наука, 1972.— 351 с.
5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 421 с.
6. *Быков Я. В.* О некоторых задачах теории интегродифференциальных уравнений.— Фрунзе : Илим, 1957.— 320 с.
7. *Рябов Ю. А., Хусанов Д. Х.* Двусторонние решения линейных интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечно далеким последействием // Докл. АН УзССР.— 1983.— № 8.— С. 240—244.
8. *Рябов Ю. А.* О существовании двусторонних решений линейных интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра с последействием // Časopis pěst. mat.—1986.—**111**.— С. 26—33.
9. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем.— М.: Наука, 1979.— 431 с.

Моск. автомоб.-дор. ин-т

Получено 03.06.86