УДК 517.9

А. К. Лопатин

Асимптотическая декомпозиция дифференциальных систем с малым параметром в пространстве представлений конечномерной группы Ли

В предлагаемой работе алгоритм асимптотической декомпозиции [1—3] применяется к дифференциальным системам, нулевое приближение которых порождает конечномерную группу Ли. Использование пространства представления этой группы позволяет свести все алгоритмы метода к простейшим задачам линейной алгебры.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = \omega(x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x = \mathrm{colon}\,\| x_1, \ldots, x_n \|$, $\omega = \mathrm{colon}\,\| \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x) \|$, $\omega_i \in \mathfrak{O}(G)$, $i = \overline{1, n}$, $G_0 = \mathcal{J} \times G$, $G \in R^n$, $t \in \mathcal{J}$, — область существования и единственности задачи Коши системы (1), $\mathfrak{O}(G)$ — многообразие аналитических функций, определенное на G. Предположим, что обертывающей алгеброй Ли $\mathfrak{L}_h$ системы (см. [4, 5]) является конечномерная алгебра с базисными операторами

$$\mathbf{X}_j = \xi_{j1}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_{jn}(x) \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad j = \overline{1, h}. \tag{2}$$

Это значит, что для элементов (2) выполняются соотношения $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = \sum_{\mu=1}^{h} c_{ij}^{\mu} \mathbf{X}_{\mu}$, где c_{ij}^{μ} — постоянная, принадлежащая полю P (P — поле действительных R или комплексных K чисел), и оператор

$$\mathbf{U}(x) = \omega_1(x)\,\partial/\partial x_1 + \ldots + \omega_n(x)\,\partial/\partial x_n, \tag{3}$$

ассоциированный с системой (1), принадлежит $\mathfrak{L}_h$ и, следовательно, может быть выражен через базис (2)

$$\mathbf{U} = c_1\mathbf{X}_1 + \ldots + c_h\mathbf{X}_h, \quad c_i \in P, \quad j = \overline{1, h}. \tag{4}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{L}_h$ определяет конечную группу Ли $\mathfrak{G}(\mathfrak{L}_h)$, элементы которой можно задать сходящимися рядами Ли (см., например, [6])

$$x' = e^{(s_1\mathbf{X}_1 + \ldots + s_h\mathbf{X}_h)}\, x, \tag{5}$$

где $s = \| s_1, \ldots, s_h \|$ — параметры группы, изменяющиеся в некоторой окрестности точки $s = 0$.

Воспользуемся разложением (4) и запишем решение системы (1) в виде ряда Ли

$$x = e^{((t-t_0)\mathbf{U}(x_0))} x_0. \tag{6}$$

Следовательно, решение (6) системы (1) является элементом группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{L}_h)$ при достаточно малом $t - t_0$. Это свойство решения системы (1) можно принять в качестве общей характеристики данной системы при изучении влияния возмущающих факторов на поведение системы.

Далее будем предполагать, что группе $\mathfrak{G}(\mathfrak{L}_h)$ можно сопоставить гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ представления, равное прямой ортогональной сумме линейных подпространств $\mathfrak{H}_{\nu}$: $\mathfrak{H} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{H}_{\nu}$. Каждое линейное подпространство над $P\mathfrak{H}_{\nu}$ размерности m_{ν} с базисом, состоящим из m_{ν} функций

$$f^{(\nu)} \overset{\text{def}}{=} \| f_{1m_{\nu}}(x), \ldots, f_{m_{\nu}m_{\nu}}(x) \|, \tag{7}$$

является инвариантным относительно преобразований группы, т. е. если $f(x') \in \mathfrak{H}_{\nu}$, то после замены переменной x', согласно формулам (5), $f(e^{(s_1\mathbf{X}_1 + \ldots + s_h\mathbf{X}_h)} x) \in \mathfrak{H}_{\nu}$.

Предположим, что размерность минимального пространства из $\mathfrak{H}$ равна n, т. е. $m_1 = n$.

Необходимым и достаточным условием инвариантности подпространства $\mathfrak{H}_{\nu}$ относительно группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{L}_h)$ является инвариантность подпространства $\mathfrak{H}_{\nu}$ относительно базисных операторов (2) алгебры $\mathfrak{L}_h$, т. е. выполнение условий

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_j f_{1m_{\nu}} &= c_{j1m_{\nu}}^{1} f_{1m_{\nu}} + \ldots + c_{j1m_{\nu}}^{m_{\nu}} f_{m_{\nu}m_{\nu}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{X}_j f_{m_{\nu}m_{\nu}} &= c_{jm_{\nu}m_{\nu}}^{1} f_{1m_{\nu}} + \ldots + c_{jm_{\nu}m_{\nu}}^{m_{\nu}} f_{m_{\nu}m_{\nu}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Соотношения (8) можно представить в компактном виде $\mathbf{X}_j f^{(\nu)} = f^{(\nu)} C_j^{(\nu)}$, где $C_j^{(\nu)}$ — квадратная матрица размерности $m_{\nu} \times m_{\nu}$. Матрицу $C_j^{(\nu)}$ будем называть представлением оператора $\mathbf{X}_j$, $j = \overline{1, h}$, в инвариантном подпространстве $\mathfrak{H}_{\nu}$.

Пусть система (1), которую в дальнейшем будем называть системой нулевого приближения, подвергнута малым возмущениям $\varepsilon\tilde{\omega}(x')$

$$dx'/dt = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x'), \quad x'(t_0) = x_0, \tag{9}$$

где $\tilde{\omega}(x') = \operatorname{colon} \| \tilde{\omega}_1(x'), \dots, \tilde{\omega}_n(x') \|$, $\tilde{\omega}_i(x') \in \mathfrak{D}(G)$, $i = \overline{1, n}$, ε — малый положительный параметр.

Через $G_{0\varepsilon} = \mathcal{J} \times \mathcal{J}_\varepsilon \times G \in R^{n+2}$ ($\mathcal{J}_\varepsilon = [0, 1]$, $\varepsilon \in \mathcal{J}_\varepsilon$) обозначим область существования и единственности решения задачи Коши системы (8), которую будем называть возмущенной системой.

Относительно свойств коэффициентов возмущенной системы (9) сделаем следующее предположение. Пусть базис подпространства $\mathfrak{H}_1$ задан n независимыми в G функциями

$$v_1(x), \dots, v_n(x). \tag{10}$$

Обозначим через $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_n$ дифференциальные операторы $\partial/\partial v_1, \dots, \partial/\partial v_n$, записанные в переменных x. Оператор $\mathbf{U}$, входящий в сумму

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon \tilde{\mathbf{U}}(x), \tag{11}$$

где $\tilde{\mathbf{U}}(x) = \tilde{\omega}_1(x)\,\partial/\partial x_1 + \dots + \tilde{\omega}_n(x)\,\partial/\partial x_n$, ассоциированный с системой (9), представим в виде $\mathbf{U} = g_1(x)\,\mathbf{L}_1 + \dots + g_n(x)\,\mathbf{L}_n$, где $g_1(x), \dots, g_n(x) \in \mathfrak{H}_1$.

Будем предполагать, что для $\tilde{U}(x)$ справедливо разложение $\tilde{U} = q_1(x)\,\mathbf{L}_1 + \dots$ $\dots + q_n(x)\,\mathbf{L}_n$, где коэффициенты $q_1(x), \dots, q_n(x)$ представимы в виде рядов по базису $\mathfrak{H}$: $q_j(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} q_j^{(\nu)}(x)$, $q_j^{(\nu)}(x) \in \mathfrak{H}_\nu$.

Обозначим через $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_\nu)$ линейное пространство операторов вида

$$\mathbf{L}^{(\nu)} = q_1^{(\nu)}(x)\,\mathbf{L}_1 + \dots + q_n^{(\nu)}(x)\,\mathbf{L}_n, \tag{12}$$

коэффициенты которых $q_1^{(\nu)}, \dots, q_n^{(\nu)} \in \mathfrak{H}_\nu$. В этом случае

$$\mathbf{L}^{(\nu)} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_\nu). \tag{13}$$

Основная идея алгоритма асимптотической декомпозиции состоит в преобразовании возмущенной системы (9) к некоторой эталонной системе

$$dx_j/dt = \omega_j(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu b_{\nu j0}(x), \quad j = \overline{1, n}, \tag{14}$$

называемой централизованной [1—3].

Переход от системы (9) к системе (10) осуществляется с помощью замены переменных в виде рядов Ли

$$x_j' = \exp(\varepsilon \mathbf{S})\, x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{15}$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \varepsilon \mathbf{S}_2 + \dots$, $\mathbf{S}_i = \gamma_{i1}\partial/\partial x_1 + \dots + \gamma_{in}\partial/\partial x_n$.

Интегрирование централизованной системы (14) проще по сравнению с исходной возмущенной системой (9) за счет того, что в ней существенно используются свойства системы нулевого приближения. Если ввести дифференциальные операторы $\mathbf{N}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{N}_k(x)$, $\mathbf{N}_k = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{kj0}(x)\,\partial/\partial x_j$, то централизованную систему можно представить в виде

$$dx_j/dt = \omega_j(x) + \mathbf{N}(x)\, x_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{16}$$

Связь между системами (9) и (16) легко устанавливается, если записать оператор (11), ассоциированный с возмущенной системой, в новых переменных после замены (15): $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon(-[\mathbf{U}, \mathbf{S}_1] + F_1) + \dots + \varepsilon^\nu(-\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] + \mathbf{F}_\nu) + \dots$, где $\mathbf{F}_1 = \tilde{\mathbf{U}}$, $\mathbf{F}_2 = -[\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{S}_1] + \frac{1}{2}[\mathbf{U}[\mathbf{U}, \mathbf{S}_1]], \dots, \mathbf{F}_\nu$ — известная функция от операторов $\mathbf{U}$, $\tilde{\mathbf{U}}$, $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_{\nu-1}$.

Операторы $S_1, S_2, \ldots$, входящие в преобразование (15), определяются из системы операторных уравнений

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu - \operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где $\operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu$ — проекция оператора $\mathbf{F}_\nu$ на алгебру централизатора*, определяемую решениями однородного уравнения $[\mathbf{U}, \mathbf{S}] = 0$.

Если положить

$$\operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu \equiv \mathbf{N}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

то после выбора операторов $\mathbf{S}_\nu$ как решений неоднородных операторных уравнений (17) оператор $\mathbf{U}_0$ примет вид

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{N}_1(x) + \varepsilon^2 \mathbf{N}_2(x) + \ldots . \tag{19}$$

Оператору $\mathbf{U}_0$ (19) соответствует централизованная система (16), причем $[\mathbf{U}, \mathbf{N}_\nu] \equiv 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Перейдем к решению системы операторных уравнений (17) и нахождению проекции $\operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu$ оператора $\mathbf{F}_\nu$ на основе использования пространства представления $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{L}_h)$. В силу сделанных предположений с учетом обозначений (12), (13) представим операторы $\mathbf{F}_\nu$ в правых частях уравнений (17) в виде сумм

$$\mathbf{F}_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{F}_\nu^{(j)}, \ \mathbf{F}_\nu^{(j)} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_j). \tag{20}$$

Решения S_ν уравнений (17) будем искать в виде разложений

$$\mathbf{S}_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{S}_\nu^{(j)}, \ \mathbf{S}_\nu^{(j)} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_j). \tag{21}$$

Оператор $\mathbf{F}_\nu^{(j)}$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{F}_\nu^{(j)} = f^{(j)} \mathcal{B}_{\nu j} \mathbf{L}, \tag{22}$$

где $\mathbf{L} = \operatorname{colon} \| \mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_n \|$, $\mathcal{B}_{\nu j}$ — известная матрица размерности $m_j \times n$, $f^{(j)}$ — базисный вектор подпространства $\mathfrak{H}_j$.

Аналогично оператор $\mathbf{S}_\nu^{(j)}$ можно представить в виде $\mathbf{S}_\nu^{(j)} = f^{(j)} \Gamma_{\nu j} \mathbf{L}$, где $\Gamma_{\nu j}$ — неизвестная постоянная матрица размерности $m_j \times n$.

Обозначим через $\mathcal{F}_j$ матрицу представления оператора $\mathbf{U}$ в $\mathfrak{H}_j$, определяемую тождеством

$$\mathbf{U} f^{(j)} = f^{(j)} \mathcal{F}_j. \tag{23}$$

Для $\mathcal{F}_1$ введем отдельное обозначение $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{A}$. Тогда для оператора $\mathbf{U}$ справедлива векторная запись

$$\mathbf{U} = f^{(1)} \mathcal{A} \mathbf{L}. \quad f^{(1)} = \| v_1(x), \ldots v_n(x) \|. \tag{24}$$

Теорема 1. *Решение операторного уравнения*

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu] = \mathbf{F}_\nu \tag{25}$$

равносильно решению системы независимых линейных матричных уравнений

$$\mathcal{F}_j \Gamma_{\nu j} - \Gamma_{\nu j} \mathcal{A} = \mathcal{B}_{\nu j}, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{26}$$

Доказательство. Подставим выражения (20), (21) в уравнение (25):

$$\sum_{j=1}^{\infty} [\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu^{(j)}] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{F}_\nu^{(j)}. \tag{27}$$

---

* Здесь и всюду в дальнейшем рассматриваются алгебры централизатора первой степени.

Вычислим скобку Пуассона $[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu^{(j)}]$, приняв во внимание соотношения (22), (24): $[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu^{(j)}] = \mathbf{U}f^{(j)}\Gamma_{\nu j}\mathbf{L} - \mathbf{S}_\nu^{(j)}f^{(1)}\mathcal{A}\mathbf{L}$. Далее, использовав тождество (23) и тождество $\mathbf{S}_\nu^{(j)}f^{(1)} \equiv f^{(j)}\Gamma_{\nu j}$, окончательно получим

$$[\mathbf{U}, \mathbf{S}_\nu^{(j)}] = f^{(j)}\mathcal{F}_j\Gamma_{\nu j}\mathbf{L} - f^{(j)}\Gamma_{\nu j}\mathcal{A}\mathbf{L}. \tag{28}$$

Подставив выражения (22), (28) в (27) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(f^{(j)}\mathcal{F}_j\Gamma_{\nu j}\mathbf{L} - f^{(j)}\Gamma_{\nu j}\mathcal{A}\mathbf{L}) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f^{(j)}\mathcal{B}_{\nu j}\mathbf{L}$ и приравняв коэффициенты при векторах $f^{(j)}$, $\mathbf{L}$, получим уравнения (26).

Обозначим через $\mathfrak{R}^{(k,n)}$ линейное пространство над P прямоугольных матриц размерности $k\times n$ и через $\widehat{\mathfrak{R}}^{(k,n)}$ изоморфное ему линейное пространство, составленное из векторов столбцов, образованных из строк матриц, входящих в $\widehat{\mathfrak{R}}^{(k,n)}$. Таким образом, если матрица $\mathcal{Q} \in \mathfrak{R}^{(k,n)}$, $\mathcal{Q} = \| q_{ij} \|$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$, то в $\widehat{\mathfrak{R}}^{(k,n)}$ ей соответствует вектор $\widehat{\mathcal{Q}} = \operatorname{colon} \| q_{11}, \ldots \ldots, q_{1n}; \ldots; q_{k1} \ldots, q_{kn} \|$.

Обозначим через $G_A^{(j)}$ матрицу $G_A^{(j)} = \mathcal{F}_j \otimes \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{m_j} \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{т}}$, где $\mathcal{E}_{m_j}$, $\mathcal{E}_n$ — единичные матрицы размерностей $m_j\times m_j$, $n\times n$, т — знак транспонирования, $\otimes$ — знак прямого произведения матриц.

В силу предположения о рассмотрении алгебр централизатора первой степени матрица $\mathcal{A}$ является матрицей простой структуры. Следовательно, матрицы $\mathcal{F}_j$ и $G_A^{(j)}$ также являются таковыми.

Как известно из линейной алгебры, матричное уравнение (26) равносильно системе линейных алгебраических уравнений

$$G_A^{(j)}\widehat{\Gamma}_{\nu j} = \widehat{\mathcal{B}}_{\nu j}. \tag{29}$$

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Следствие. *Решение операторного уравнения* (25) *равносильно решению линейной алгебраической системы* (29).

Перейдем к построению проекции $\operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu$. Рассмотрим соответствующее системе (29) однородное уравнение

$$G_A^{(j)}\widehat{\Gamma}_{\nu j} = 0 \tag{30}$$

и сопряженное уравнение

$$G_A^{(j)*}\widehat{\Gamma}_{\nu j} = 0, \tag{31}$$

где $G_A^{(j)*} = \mathcal{F}_j^* \otimes \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{m_i} \otimes (\mathcal{A}^*)^{\mathrm{т}}$ — комплексно сопряженная по отношению к $G_A^{(j)}$ матрица.

Обозначим через $\widehat{N}_A^{(j)}, \widehat{N}_{A^*}^{(j)}$ ядра матриц $G_A^{(j)}$, $G_A^{(j)*}$ и через $\widehat{T}_A^{(j)}, \widehat{T}_{A^*}^{(j)}$ образы этих матриц. Пространство $\mathfrak{R}^{(m_j,n)}$ может быть разложено единственным образом в прямую сумму подпространств $\widehat{N}_A^{(j)}, \widehat{T}_A^{(j)}$:

$$\widehat{\mathfrak{R}}^{(m_j,n)} = \widehat{N}_A^{(j)} \oplus \widehat{T}_A^{(j)}. \tag{32}$$

В соответствии с (32) представим правую часть уравнения (29) в виде суммы

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\nu j} = \widehat{\mathcal{B}}_{\nu Nj} + \widehat{\mathcal{B}}_{\nu Tj}, \quad \widehat{\mathcal{B}}_{\nu Nj} \quad \widehat{N}_A^{(j)}, \ \widehat{\mathcal{B}}_{\nu Tj} \in \widehat{T}_A^{(j)}. \tag{33}$$

Вектору $\widehat{\mathcal{B}}_{\nu Nj}$ в пространстве $\mathfrak{R}^{(m_j,n)}$ соответствует прямоугольная матрица $\mathcal{B}_{\nu Nj}$, которая, в свою очередь, определяет дифференциальный оператор $\mathbf{N}_{\nu j} = f^{(j)}\mathcal{B}_{\nu Nj}\mathbf{L}$. Построенные операторы $\mathbf{N}_{\nu j}$ коммутируют с оператором $\mathbf{U}: [\mathbf{U}, \mathbf{N}_{\nu j}] \equiv 0$.

Определение. *В качестве проекции* $\operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu$ *от оператора* $\mathbf{F}_\nu$ *примем*

$$\operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{N}_{\nu j}.$$

Таким образом, после нахождения в явном виде операторов $\operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, определяется централизованная система (см. формулы (18), (19)). Перейдем к фактическому нахождению матриц $\mathcal{B}_{\nu Nj}$. Пусть $\mathcal{C} = \| c_{lr} \|$, $\mathcal{Q} = \| q_{lr} \|$, $l = \overline{1, m_j}$, $r = \overline{1, n}$, — произвольные матрицы из пространства $\mathfrak{R}^{(m_j, n)}$. В пространстве $\widehat{\mathfrak{R}}^{(m_j, n)}$ введем скалярное произведение обычным образом: $\langle \widehat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{Q}} \rangle \equiv \sum\limits_{l=1}^{m_j} c_{l1} \bar{q}_{l1} + \ldots + c_{ln} \bar{q}_{ln}$, где «—»— знак комплексного сопряжения.

Легко убедиться, что

$$\langle \widehat{\mathcal{C}}, \widehat{\mathcal{Q}} \rangle \equiv \operatorname{tr} (\mathcal{C} \cdot \overline{\mathcal{Q}}^{\mathrm{T}}) \tag{34}$$

(tr — след матрицы).

Предположим, что система (30 имеет k_j линейно независимых решений $\widehat{Z}_{1j}, \ldots, \widehat{Z}_{k_j j}$, которые можно принять в качестве базиса пространства $N_A^{(j)}$. Тогда уравнение (31) также имеет k_j линейно независимых решений $\widehat{Z}_{1j*}, \ldots, \widehat{Z}_{k_j j*}$, которые можно принять в качестве базиса $\widehat{N}_{A*}^{(j)}$. Разложим составляющую $\widehat{\mathcal{B}}_{\nu Nj}$ в сумме (33) по базису $\widehat{N}_A^{(j)}$: $\widehat{\mathcal{B}}_{\nu Nj} = \sum\limits_{i=1}^{k_j} \alpha_{\nu ji} \widehat{Z}_{ij}$. Разность $\widehat{\mathcal{B}}_{\nu j} - \widehat{\mathcal{B}}_{\nu Nj} = \widehat{\mathcal{B}}_{\nu Tj}$ принадлежит образу $\widehat{T}_A^{(j)}$ и, сле овательно, ортогональна подпространству $\widehat{N}_{A*}^{(j)}$: $\langle \mathcal{B}_{\nu j} - \sum\limits_{i=1}^{k_j} \alpha_{\nu ji} \widehat{Z}_{ij}, \widehat{Z}_{lj*} \rangle \equiv 0$, $l = \overline{1, k_j}$. Данные тождества приводят к системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $\alpha_{\nu ji}$:

$$\sum_{i=1}^{k_j} \alpha_{\nu ji} \langle \widehat{Z}_{ij}, \widehat{Z}_{lj*} \rangle = \langle \widehat{\mathcal{B}}_{\nu j}, \widehat{Z}_{lj*} \rangle, \quad l = \overline{1, k_j}. \tag{35}$$

Определитель системы (35) (определитель Грамма) не равен нулю и, следовательно, эта система имеет единственное решение. Воспользовавшись тождеством (34), систему уравнений (35) можно представить в виде матричной системы в пространстве $\mathfrak{R}^{(m_j, n)}$:

$$\sum_{i=1}^{k_j} \alpha_{\nu ji} \operatorname{tr} (Z_{ij} \overline{Z}_{lj*}^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr} (\mathcal{B}_{\nu j} \overline{Z}_{lj*}^{\mathrm{T}}), \quad l = \overline{1, k_j}. \tag{36}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Нахождение проекции оператора* $\operatorname{pr} \mathbf{F}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *от правых частей уравнений* (25) *сводится к решению последовательности независимых между собой систем неоднородных алгебраических уравнений вида* (35) *или* (36). *Решение этих уравнений существует и единственно.*

Оператор $\mathbf{S}_\nu$ определяется совокупностью матриц $\Gamma_{\nu j}$, $j = 1, 2, \ldots$, которые находятся как решения уравнений

$$G_A^{(j)} \widehat{\Gamma}_{\nu j} = \widehat{\mathcal{B}}_{\nu Tj}. \tag{37}$$

Система (37) совместна и содержит $m_j \times n$ уравнений от $\rho_j = m_j \times n - k_j$ переменных (k_j — размерность ядра $\widehat{N}_A^{(j)}$). Чтобы избавиться от лишних уравнений и исключить в решении составляющие, входящие в ядро $\widehat{N}_A^{(j}$, можно поступить следующим образом. Пусть $\hat{\mathcal{Y}}_{1\rho_j}, \dots, \hat{\mathcal{Y}}_{\rho_j\rho_j}$ — базис пространства $\hat{T}_A^{(j)}$, тогда вектор $\hat{\Gamma}_{\nu j}$ можно разложить по этому базису: $\hat{\Gamma}_{\nu j} = \gamma_{1\rho_j}^{(\nu j)}\hat{\mathcal{Y}}_{1\rho_j} + \dots + \gamma_{\rho_j\rho_j}^{(\nu j)}\hat{\mathcal{Y}}_{\rho_j\rho_j}$. Введя вектор $\gamma_{\nu j} = \operatorname{colon} \| \gamma_{1\rho_j}^{(\nu j)}, \dots, \gamma_{\rho_j\rho_j}^{(\nu j)} \|$ и матрицу $\mathcal{a}_{\nu j}$, столбцы которой образованы векторами $\hat{\mathcal{Y}}_{1\rho_j}, \dots, \hat{\mathcal{Y}}_{\rho_j\rho_j}$, представим уравнение (37) в матричном виде $G_A^{(j)}\mathcal{a}_{\nu j}\gamma_{\nu j} = \hat{\mathcal{B}}_{\nu Tj}$. Умножив полученное уравнение на матрицу $\overset{*}{\mathcal{a}}_{\nu j}G_A^{(j)*}$, сопряженную по отношению к $G_A^{(j)}\mathcal{a}_{\nu j}$, получим систему $\overset{*}{\mathcal{a}}_{\nu j}G_A^{(j)*}G_A^{(j)}\mathcal{a}_{\nu j}\gamma_{\nu j} = \overset{*}{\mathcal{a}}_{\nu j}G_A^{(j)*}\hat{\mathcal{B}}_{\nu Tj}$, эквивалентную по отношению к исходной, но содержащую ровно ρ_j уравнений.

Применим к централизованной системе (16) общие теоремы, упрощающие ее интегрирование [3].

Теорема 3. *Пусть в централизованной системе* (16) *коэффициенты оператора* $\mathbf{N}(x)$ *являются аналитическими функциями в области* $\overline{G}_{0\varepsilon} = \overline{\mathcal{I}} \times \overline{\mathcal{I}}_{0\varepsilon} \times \overline{G} \in R^{n+2}$, $(\mathcal{I}_\varepsilon = [0, 1],\ \varepsilon \in \mathcal{I}_\varepsilon,\ t \in \overline{\mathcal{I}} = [a, b])$. *Тогда можно указать такое положительное число* T_0, *что решение системы представимо рядом Ли*

$$x_j = \exp(\tau\mathbf{N}(z))\, z_j,\ \ \tau = \varepsilon(t - t_0),\ \ j = \overline{1, n}, \tag{38}$$

где $z = \operatorname{colon} \| z_1, \dots, z_n \|$ — *решение системы нулевого приближения*

$$dz/dt = \omega(z),\ \ z(t_0) = x_0. \tag{39}$$

Ряд Ли сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{G}_{0\varepsilon T} = [t_0, t_0 + T_0/\varepsilon] \times \times \mathcal{I}_\varepsilon \times \overline{G}$.

Замечание. В силу сделанных предположений о свойствах системы нулевого приближения (1) систему (39) можно эффективно проинтегрировать и, следовательно, формулы (39) приобретают законченный аналитический вид.

Действительно, используем функции (10) в качестве замены переменных

$$y_1 = v_1(z), \dots, y_n = v_n(z) \tag{40}$$

в системе (39). Эта система функций предполагается обратимой в рассматриваемой области G: $z_1 = \varphi_1(y), \dots, z_n = \varphi_n(y)$. Замена (40) сводит систему (39) к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами $dy/dt = \mathcal{A}_0 y,\ y(t_0) = y_0$, где $\mathcal{A}_0 \equiv \mathcal{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{A}$ — матрица оператора (24).

Выясним условия, при которых в централизованной системе выделяются медленные и быстрые переменные. Рассмотрим уравнение для определения интегралов системы нулевого приближения

$$\mathbf{U}\rho = 0, \tag{41}$$

где $\mathbf{U}$ — оператор (3).

Интегралы будем искать в подпространствах $\mathfrak{H}_j$ в виде векторного произведения

$$\rho = f^{(j)}\alpha^{(j)}. \tag{42}$$

Здесь $f^{(j)}$ — базис $\mathfrak{H}_j$, $\alpha^{(j)} = \operatorname{colon} \| \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_{m_j}^{(j)} \|$ — вектор коэффициентов.

Подстановка соотношений (42) в уравнения 41) приводит к матричному уравнению $\mathcal{F}_j\alpha^{(j)} = 0$, где $\mathcal{F}_j$ — матрица представления оператора $\mathbf{U}$ в $\mathfrak{H}_j$ (см. (23)).

Аналогично уравнение для собственных векторов оператора

$$\mathbf{U}g = \lambda g,\quad \lambda = \mathrm{const}, \tag{43}$$

где $g = f^{(j)}\beta^{(j)}$, $\beta^{(j)} = \operatorname{colon} \| \beta_1^{(j)}, \dots, \beta_{m_j}^{(j)} \|$, приводит к матричному уравнению $\mathcal{F}_j\beta^{(j)} = \lambda\beta^{(j)}$.

По предположению матрица $\mathcal{A}$ оператора простой структуры и, следовательно, имеет в $\mathfrak{H}_1$ m_i собственных векторов $g_1^{(i)}, \ldots, g_{m_i}^{(i)}$, соответствующих корню λ_i кратности m_i, $i = \overline{1, k}$, $m_1 + \ldots + m_k = n$, т. е. $\mathrm{U}g_1^{(i)} = \lambda_i g_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{U}g_{m_i}^{(i)} = \lambda_i g_{m_i}^{(i)}$. Как легко видеть, функции

$$\rho_1 g_1^{(i)}, \ldots, \rho_{m_i} g_{m_i}^{(i)}, \tag{44}$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_{m_i}$ — произвольные интегралы уравнения (43) из пространства $\mathfrak{H}$, также являются собственными функциями

$$\mathrm{U}(\rho_1 g_1^{(i)}) = \lambda_i (\rho_1 g_1^{(i)}), \ldots, \mathrm{U}(\rho_{m_i} g_{m_i}^{(i)}) = \lambda_i (\rho_{m_i} g_{m_i}^{(i)}).$$

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Т. е. собственный вектор $g \in \mathfrak{H}$ с собственным числом λ_i не обязательно представим в виде (44). Обозначим множество функций (44) через Υ_i, а число m_i назовем его размерностью.

Сформулируем следующий достаточный признак разделения переменных на быстрые и медленные в системе централизатора (16).

Теорема 4. *Пусть для системы централизатора* (16) *выполняются следующие условия*:

1) *любой интеграл* $\rho(x) \in \mathfrak{H}$ *системы нулевого приближения, определяемый уравнением* (41), *выражается через конечную совокупность независимых интегралов*

$$\rho_1(x), \ldots, \rho_m(x) \in \mathfrak{H}, \tag{45}$$

т. е. $\rho(x) = w(\rho_1(x), \ldots, \rho_m(x))$, *где* $w(\rho_1, \ldots, \rho_m)$ — *аналитическая функция, обращающаяся в нуль при* $\rho_1 = \ldots = \rho_m \equiv 0$;

2) *собственные функции с собственными числами* λ_i, $i = \overline{1, k}$, *имеют вид* (44);

3) *функции* (45) *можно дополнить собственными функциями* $\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_r$ *до полной системы независимых функций в* G, *т. е.* $m_1 + \ldots + m_r = n$. *Тогда централизованная система с помощью замены переменных*

$$z_1 = \rho_1(x), \ldots, z_m = \rho_m(x), \quad y_1^{(i)} = g_1^{(i)}(x), \ldots, y_{m_i}^{(i)} = g_{m_i}^{(i)}(x), \quad i = \overline{1, r},$$

преобразуется к разделенной системе для m медленных

$$dz_1/dt = \varepsilon\Phi_{11}(z) + \varepsilon^2\Phi_{12}(z) + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dz_m/dt = \varepsilon\Phi_{m1}(z) + \varepsilon^2\Phi_{m2}(z) + \ldots$$

и $n - m$ быстрых переменных

$$dy_1^{(i)}/dt = \Psi_1^{(i)}(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu (\rho_{\nu 1}^{(i1)} y_1^{(i)} + \ldots + \rho_{\nu m_i}^{(i1)} y_{m_i}^{(i)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$dy_{m_i}^{(i)}/dt = \Psi_{m_i}^{(i)}(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu (\rho_{\nu 1}^{(im_i)}(z) y_1^{(i)} + \ldots + \rho_{\nu m_i}^{(im_i)}(z) y_{m_i}^{(i)}), \quad i = \overline{1, r}.$$

Система для быстрых переменных интегрируется после системы для медленных переменных и, в свою очередь, распадается на r независимо интегрируемых подсистем порядков m_i, $i = \overline{1, r}$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству соответствующей более общей теоремы [3].

1. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1984.— 36, № 1.— С. 35—45.

2. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Теоретико-групповые аспекты методов нелинейной механики // Мат. физика и нелинейн. механика. — 1986. — Вып. 5.— С. 34—45.
3. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Киев, 1986.— 60 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 86. 71).
4. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Векторные поля, алгебры и группы, порождаемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений и их свойства.— Киев, 1985.— 63 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 85. 73).
5. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Киев, 1985.— 64 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 85. 74).
6. *Чеботарев Н. Г.* Теория групп Ли.— М.; Л.: Гостехиздат, 1940.— 336 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 03.06.86