УДК 513.88

И.-П. П. Сыроид

Комплексные решения общего уравнения Кортевега — де Фриза: метод обратной задачи

Метод обратной задачи рассеяния применяется к нахождению комплекснозначных решений общего уравнения Кортевега — де Фриза. При этом рассматриваются прямая и обратная задачи для несамосопряженного одномерного оператора Шредингера (с комплексным потенциалом) в $L_2(\mathbb{R})$. Используемая техника обратных задач для несамосопряженных операторов развита В. Э. Лянце и его учениками.

Метод оберненої задачі розсіювання застосовується при знаходженні комплекснозначних розв'язків загального рівняння Кортевега — де Фріза. При цьому розглядаються пряма та обернена задачі для несамоспряженого одновимірного оператора Шредінгера (з комплексним потенціалом) у $L_2(\mathbb{R})$. Використана техніка обернених задач для несамоспряжених операторів розвинута В. Е. Лянце та його учнями.

В настоящее время метод обратной задачи рассеяния, представленный в статье [1], получил широкое развитие (см., например, [2—5, 6]).

В настоящей статье метод обратной задачи рассеяния применяется к нахождению комплексных решений общего уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ). Если в случае вещественных решений уравнения КдФ решается прямая и обратная задача для самосопряженного одномерного оператора Шредингера, то для нахождения комплексных решений уравнения КдФ приходится рассматривать прямую и обратную задачу для несамосопряженного оператора Шредингера (с комплексным потенциалом). Используемая в статье техника обратных задач для несамосопряженных операторов развита В. Э. Лянце [7] и его учениками.

1. Сведения из прямой задачи рассеяния для несамосопряженного оператора Шредингера на всей оси. Пусть $q(x)$ — комплекснозначная функция, определенная на всей вещественной оси и удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|q(x)|\,dx < \infty. \tag{1}$$

Несамосопряженный оператор Шредингера L порождается в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ дифференциальным выражением $l(y)(x) = -y''(x) + q(x)y(x)$ и областью определения $D(L)$, по определению состоящей из всех тех $y \in L_2(\mathbb{R})$, для которых производная y' существует, абсолютно непрерывна в каждом конечном промежутке и $l(y) \in L_2(\mathbb{R})$. Функция $q(x)$ называется потенциалом оператора Шредингера L.

В предположении (1) уравнение Шредингера $l(y) = \lambda^2 y$ имеет решения $e_\pm(x, \lambda)$, обладающие асимптотиками

$$e_+(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + o(1),\ x\to\infty;\ e_-(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + o(1),\ x\to-\infty, \tag{2}$$

где $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. Решения $e_\pm(x,\lambda)$ единственны, голоморфны по λ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, непрерывны вплоть до границы $\operatorname{Im}\lambda = 0$ и представимы через операторы преобразования

$$e_+(x,\lambda) = e^{ix\lambda} + \int_x^{\infty} K_+(x,t)\,e^{it\lambda}dt,\quad e_-(x,\lambda) = e^{-ix\lambda} + \int_{-\infty}^{x} K_-(x,t)\,e^{-it\lambda}dt. \tag{3}$$

При этом

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}K_-(x,x) = -2\frac{d}{dx}K_+(x,x). \tag{4}$$

При вещественных $\lambda \neq 0$ пары $e_+(x,\lambda)$, $e_+(x,-\lambda)$ и $e_-(x,\lambda)$, $e_-(x,-\lambda)$ образуют две фундаментальные системы решений уравнения Шредингера. Переход от одной фундаментальной системы к другой осуществляется по формулам

$$e_+(x,\lambda) = b(\lambda)e_-(x,\lambda) + a(\lambda)e_-(x,-\lambda),\quad e_-(x,\lambda) = \\ = -b(-\lambda)e_+(x,\lambda) + a(\lambda)e_+(x,-\lambda), \tag{5}$$

где коэффициенты перехода $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ выражаются через вронскианы

$$w(\lambda) = \{e_+(x, \lambda), e_-(x, \lambda)\}, \quad v(\lambda) = \{e_+(x, \lambda), e_-(x, -\lambda)\} \tag{6}$$

следующим образом

$$a(\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda} w(\lambda), \quad b(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} v(\lambda). \tag{7}$$

Из свойств решений $e_\pm(x, \lambda)$ следует, что $w(\lambda)$ — аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ функция, непрерывная при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. Функция $w(\lambda)$ обладает асимптотикой $w(\lambda) = 2i\lambda[1 + O(1/\lambda)]$ при $|\lambda| \to \infty$ равномерно во всякой полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > \eta > 0$.

Замечание 1. Если λ_p — невещественный $(\operatorname{Im}\lambda_p > 0)$ корень уравнения $w(\lambda) = 0$, то число λ_p^2 принадлежит дискретному спектру оператора L. Если λ_0 — вещественный корень уравнения $w(\lambda) = 0$, то λ_0^2 называется спектральной особенностью оператора L.

Предполагается, что $w(\lambda) \neq 0$ при $\operatorname{Im}\lambda = 0$, т. е., спектральные особенности у оператора L отсутствуют. В этом случае $w(\lambda)$ имеет конечное число нулей в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Обозначим их через $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ и будем называть сингулярными числами оператора L. Кратность корня λ_p уравнения $w(\lambda) = 0$ будем называть кратностью сингулярного числа λ_p и обозначать через m_p.

Поскольку вронскиан функций $e_+(x, \lambda_p)$ и $e_-(x, \lambda_p)$ равен нулю, то эти функции линейно зависимы. Более того, существуют такие цепочки чисел $\{\chi_0^{p+}, \ldots, \chi_{m_p-1}^{p+}\}$, $p = 1, \ldots, \alpha$, $\chi_0^{p+} \neq 0$, что

$$\frac{1}{\nu!} e_-^{(\nu)}(x, \lambda_p) = \sum_{n=0}^{\nu} \chi_{\nu-n}^{p+} \frac{1}{n!} e_+^{(n)}(x, \lambda_p), \tag{8}$$

где $\nu = 0, \ldots, m_p - 1$, $p = 1, \ldots, \alpha$, $e_\pm^{(\nu)}(x, \lambda_p) = \dfrac{d^\nu}{d\lambda^\nu} e(x, \lambda)|_{\lambda=\lambda_p}$ — цепочки главных функций, соответствующие собственному числу λ_p^2. Набор чисел $\{\chi_0^{p+}, \ldots, \chi_{m_p-1}^{p+}\}$ называется нормировочной цепочкой, соответствующей сингулярному числу λ_p. Функции $e_+^{(\nu)}(x, \lambda_p)$ выражаются через $e_-^{(\nu)}(x, \lambda_p)$ с помощью ассоциированной цепочки $\{\chi_0^{p-}, \ldots, \chi_{m_p-1}^{p-}\}$

$$\frac{1}{\nu!} e_+^{(\nu)}(x, \lambda_p) = \sum_{n=0}^{\mu} \chi_{\nu-n}^{p-} \frac{1}{n!} e_-^{(n)}(x, \lambda_p), \quad \nu = 0, \ldots, m_p - 1.$$

Функция $s(\lambda) = v(\lambda)/w(\lambda) = -b(\lambda)/a(\lambda)$ называется функцией рассеяния оператора L.

Определение 1. *Функцию $s(\lambda)$, сингулярные числа λ_p и отвечающие им нормировочные цепочки $\{\chi_0^{p+}, \ldots, \chi_{m_p-1}^{p+}\}$, $p = 1, \ldots, \alpha$, будем называть данными рассеяния оператора L.*

2. Общее уравнение КдФ и эволюция данных рассеяния в силу общего уравнения КдФ.

Определение 2. *Общим уравнением КдФ называется уравнение*

$$\dot{u} = i[-d^2/dx^2 + u, c_0 M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1], \tag{9}$$

где $[T, S] = TS - ST$, $i = +\sqrt{-1}$, $\dot{u} = \partial u/\partial t$; $c_0 \neq 0, \ldots, cn$ — комплексные параметры; операторы $-d^2/dx^2 + u(x, t)$ образуют пары Лэкса [5] *с операторами M_{2j+1} вида*

$$M_{2j+1} = i^{2j+1} d^{2j+1}/dx^{2j+1} + \sum_{k=0}^{2j-1} U_k(u, u_x', \ldots) d^k/dx^k,$$

где $j = 0, 1, \ldots, n$, U_k — *полиномы от функции* $u(x, t)$ *и ее производных* $u'_x, u''_{xx}, \ldots$ *по* x.

Способы вычисления операторов M_{2j+1} приведены в работах [4, 5].

Обозначим через $u_0(x)$, $-\infty < x < \infty$, комплекснозначную функцию, имеющую производные до порядка $2n+1$ и удовлетворяющую условию (1) вместе со всеми производными ($2n+1$ — порядок уравнения (9)). Предположим, что оператор L с потенциалом $u_0(x)$ не имеет спектральных особенностей на непрерывном спектре ($w(\lambda) \neq 0$ при $\operatorname{Im}\lambda = 0$).

Рассмотрим задачу Коши для общего уравнения КдФ (9) с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{10}$$

Предположим, что она имеет решение $u(x, t)$, удовлетворяющее условиям

$$\max_{t|\leqslant T} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\, |u_x^{(\nu)}(x, t)|\, dx < \infty, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n+1 \tag{11}$$

при всех $T \geqslant 0$. Для вещественных убывающих на $\pm\infty$ решений уравнения КдФ задача существования решена [6, 8]. В случае комплексных решений эти результаты существования решения нуждаются в обобщении, что выходит за рамки настоящей статьи (см. также замечание 3).

З а м е ч а н и е 2. Ограничение задачи Коши (9), (10) только потенциалами $u_0(x)$, для которых оператор L не имеет спектральных особенностей, связано с тем, что она решается в классе комплексных функций, удовлетворяющих условию (11) при всех $T \geqslant 0$. Постановка задачи Коши для обычного уравнения КдФ $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$ в классе экспоненциально убывающих (по x) на $\pm\infty$ функций содержится в [9]. Статья [9] нуждается в примерах, подтверждающих корректность использования спектральных особенностей в постановке задачи Коши. Достаточные условия на параметры $c_0, \ldots, c_n$ в стационарном аналоге уравнения (9), при которых оператор Шредингера L не имеет спектральных особенностей на непрерывном спектре, сформулированы в [10, 11].

Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ однопараметрическое семейство операторов Шредингера с комплексными потенциалами

$$L(t) = -d^2/dx^2 + u(x, t), \tag{12}$$

где $u(x, t)$ — решение задачи (9), (10); $L(0) = L$.

Найдем эволюцию во времени (в силу общего уравнения КдФ) данных рассеяния для оператора (12). Пусть

$$\{s(\lambda);\ \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha;\ \chi_0^{p+}, \ldots, \chi_{m_p-1}^{p+};\ p = 1, \ldots, \alpha\} \tag{13}$$

— данные рассеяния оператора $L(0)$. В отличие от случая действительных потенциалов $u(x, t)$ в комплексном случае операторы $L(t)$ и $L(0)$ не являются унитарно эквивалентными. Однако изоспектральность операторов $L(t)$ сохраняется в комплексном случае и требует особого доказательства. Имеет место теорема.

Т е о р е м а 1. 1) *Все собственные значения оператора* $L(t)$ *от* t *не зависят и являются интегралами уравнения* (9); 2) *данные рассеяния оператора* $L(t)$ (*см.* (12)) *имеют вид*

$$\Big\{s(\lambda, t) = s(\lambda) \exp\Big[\Big(-2i\lambda \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda^{2l}\Big) t\Big];\ \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha;\ \chi_\nu^{p+}(t);$$

$$\nu = 0, \ldots, m_p - 1,\ p = 1, \ldots, \alpha\Big\}, \tag{14}$$

где функции $\chi_\nu^{p+}(t)$ *являются решениями системы уравнений*

$$\nu!\, \dot{\chi}_\nu^{p+}(t) = 2\nu! \Big(i\lambda_p \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda_p^{2l}\Big) \chi_\nu^{p+}(t) + \sum_{q=0}^{\nu-1} C_\nu^q \Big(i\lambda \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda^{2l}\Big)_{\lambda=\lambda_p}^{(\nu-q)} q!\chi_q^{p+}(t) \tag{15}$$

с начальными условиями $\chi_\nu^{p+}(0) = \chi_\nu^{p+}$. В частности, первый член $\chi_0^{p+}(t)$ нормировочной цепочки эволюционирует по закону

$$\chi_0^{p+}(t) = \chi_0^{p+} \exp\left[\left(2i\lambda_p \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda_p^{2l}\right) t\right]. \tag{16}$$

Доказательство. Подставим в уравнение Шредингера

$$L(t)\, y = \lambda^2 y \tag{17}$$

собственную функцию $e_+(x, \lambda_p, t)$, соответствующую собственному значению λ_p^2, и продифференцируем по времени. Получим

$$\dot{L}(t)\, e_+(x, \lambda_p, t) + L(t)\, \dot{e}_+(x, \lambda_p, t) = \frac{\partial\lambda_p^2}{\partial t} e_+(x, \lambda_p, t) + \lambda_p^2 \dot{e}_+(x, \lambda_p, t).$$

Так как $\dot{L}(t) = \dot{u}(x, t)$, то используя уравнение (9) и обозначая $M = c_0M_{2n+1} + c_1M_{2n-1} + \ldots + c_nM_1$, получаем $i(L(t)M - ML(t))\, e_+(x, \lambda_p, t) + (L(t) - \lambda_p^2)\, \dot{e}_+(x, \lambda p, t) = \dfrac{\partial\lambda_p^2}{\partial t} e_+(x, \lambda_p, t)$ и

$$(L(t) - \lambda_p^2)(iMe_+(x, \lambda_p, t) + \dot{e}_+(x, \lambda_p, t) = \frac{\partial\lambda_p^2}{\partial t} e_+(x, \lambda_p, t). \tag{18}$$

Из (18) следует, что $iMe_+(x, \lambda_p, t) + \dot{e}_+(x, \lambda_p, t)$ — присоединенный вектор, соответствующий собственному вектору $\dfrac{\partial\lambda_p^2}{\partial t} e_+(x, \lambda_p, t)$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial\lambda_p}{\partial t} e_+(x, \lambda_p, t) + \frac{\partial\lambda_p^2}{\partial t} e_+'(x, \lambda_p, t)\right) + C(t)\, e_+(x, \lambda_p, t) =$$
$$= iMe_+(x, \lambda_p, t) + \dot{e}_+(x, \lambda_p, t) \tag{19}$$

$\left(\text{слева } 1/2\left(\dfrac{\partial\lambda^2}{\partial t} e_+(x, \lambda, t)\right)'_\lambda\right.$ при $\lambda = \lambda_p$, а $C(t)$ — некоторая функция переменной $\left.t\right)$. Используя условие (11) и свойства операторов M_{2j+1}, получаем

$$Me_+(x, \lambda, t) = -\lambda \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda^{2l} e^{i\lambda x} + o(1), \quad x \to +\infty, \tag{20}$$

$$Me_-(x, \lambda, t) = \lambda \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda^{2l} e^{-i\lambda x} + o(1), \quad x \to -\infty. \tag{21}$$

Так как $\dot{e}_+(x, \lambda_p, t) = \dfrac{\partial\lambda_p}{\partial t} e_+'(x, \lambda_p, t) + o(1)$ при $x \to +\infty$, то, используя (20), получаем

$$(iMe_+(x, \lambda_p, t) + \dot{e}_+(x, \lambda_p, t))_{x\to+\infty} = -i\lambda_p \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda_p^{2l} e^{i\lambda_p x} + \frac{\partial\lambda_p}{\partial t}\, ixe^{i\lambda_p x} + o(1). \tag{22}$$

Для левой части (19) имеем асимптотику

$$\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial\lambda_p}{\partial t} e_+(x, \lambda_p, t) + \frac{\partial\lambda_p^2}{\partial t} e_+'(x, \lambda_p, t) + C(t)\, e_+(x, \lambda_p, t) =\right.$$
$$= \frac{\partial\lambda_p}{\partial t} e^{i\lambda_p x} + \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda_p^2}{\partial t}\, ixe^{i\lambda_p x} + C(t)\, e^{i\lambda_p x} + o(1), \quad x \to +\infty.$$

Сравнивая эту асимптотику с асимптотикой (22), из (19) получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda_p^2}{\partial t} = \frac{\partial\lambda_p}{\partial t}, \quad \frac{\partial\lambda_p}{\partial t} + C(t) = -i\lambda_p \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda_p^{2l}. \tag{23}$$

Из соотношений (23) следует, что $\lambda_p\, \partial\lambda_p/\partial t = \partial\lambda_p/\partial t$ и, значит, $\partial\lambda_p/\partial t = 0$, т. е., все собственные значения оператора $L(t)$ от t не зависят. Утверждение 1 теоремы 1 доказано.

Из соотношений (23) вытекает, что $C(t)$ от t не зависит и $C = -i\lambda_p \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda_p^{2l}$.

Теперь из (18) получаем

$$(L(t) - \lambda_p^2)(iMe_+(x, \lambda_p, t) + \dot{e}_+(x, \lambda_p, t)) = 0, \tag{24}$$

т. е., $iMe_+(x, \lambda_p, t) + \dot{e}_+(x, \lambda_p, t)$ является не присоединенным, а собственным вектором оператора $L(t)$, соответствующим собственному значению λ_p^2. Обратимся теперь к асимптотическому равенству (22). Так как $\partial\lambda_p/\partial t = 0$ и решение уравнения (17) асимптотическим поведением на любой из бесконечностей определяется однозначно, то из (24) и (22) получаем

$$iMe_+(x, \lambda_p, t) + \dot{e}_+(x, \lambda_p, t) = -i\lambda_p \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda_p^{2l} e_+(x, \lambda_p, t). \tag{25}$$

Аналогично, используя (21), получаем формулу

$$iMe_-(x, \lambda_p, t) + \dot{e}_-(x, \lambda_p, t) = i\lambda_p \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda_p^{2l} e_-(x, \lambda_p, t). \tag{25$'$}$$

Формулу (25′) используем для вычисления эволюции нормировочных цепочек $\{\chi_0^{p+}(t), \ldots, \chi_{m_p-1}^{p+}(t)\}$, $p = 1, \ldots, \alpha$. Из (25′) получаем (обозначая через $e_-^{(\nu)}(x, \lambda_p, t)$ значение ν-й производной по λ при $\lambda = \lambda_p$)

$$iMe_-^{(\nu)}(x, \lambda_p, t) + \dot{e}_-^{(\nu)}(x, \lambda_p, t) = \sum_{q=0}^{\nu} C_\nu^q \Big(i\lambda \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda^{2l}\Big)_{\lambda=\lambda_p}^{(\nu-q)} e_-^{(q)}(x, \lambda_p, t). \tag{26}$$

Подставим в равенство (26) выражение (8) для $e_-^{(\nu)}(x, \lambda_p, t)$

$$iM \sum_{j=0}^{\nu} \chi_{\nu-j}^{p+}(t) \frac{\nu!}{j!} e_+^{(j)}(x, \lambda_p, t) + \sum_{j=0}^{\nu} \Big(\dot{\chi}_{\nu-j}^{p+}(t) \frac{\nu!}{j!} e_+^{(j)}(x, \lambda_p, t) +$$
$$+ \chi_{\nu-j}^{p+}(t) \frac{\nu!}{j!} \dot{e}_+^{(j)}(x, \lambda_p, t)\Big) = \sum_{q=0}^{\nu} C_\nu^q \Big(i\lambda \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda^{2l}\Big)_{\lambda=\lambda_p}^{(\nu-q)} \times$$
$$\times \sum_{\mu=0}^{q} \chi_{q-\mu}^{p+}(t) \frac{q!}{\mu!} e_+^{(\mu)}(x, \lambda_p, t).$$

Сравнивая слева и справа коэффициенты при главных членах асимптотики при $x \to +\infty$, получаем

$$\Big(-i\lambda_p \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda_p^{2l}\Big) \frac{\nu!}{j!} \chi_{\nu-j}^{p+}(t) + \frac{\nu!}{j!} \dot{\chi}_{\nu-j}^{p+}(t) =$$
$$= \sum_{q\geqslant j}^{\nu} C_\nu^q \Big(i\lambda \sum_{l=0}^{n} c_{n-l}\lambda^{2l}\Big)_{\lambda=\lambda_p}^{(\nu-q)} \frac{q!}{j!} \chi_{q-j}^{p+}(t)$$

или

$$\frac{\nu!}{j!}\dot{\chi}^{p+}_{\nu-j}(t)=2\frac{\nu!}{j!}\left(i\lambda_p\sum_{l=0}^{n}c_{n-l}\lambda_p^{2l}\right)\chi^{p+}_{\nu-j}(t)+$$

$$+\sum_{q\geqslant j}^{\nu-1}C_\nu^q\left(i\lambda\sum_{l=0}^{n}c_{n-l}\lambda^{2l}\right)^{(\nu-q)}_{\lambda=\lambda_p}\frac{q!}{j!}\chi^{p+}_{q-j}(t),\quad j=0,1,\ldots,\nu;\ \nu=0,\ldots,m_p-1. \tag{27}$$

Полагая в (27) $j=0$, получаем систему (15) с начальными условиями $\chi^{p+}_\nu(0)=\chi^{p+}_\nu$. Для первого члена $\chi^{p+}_0(t)$ нормировочной цепочки из (15) получается $\dot{\chi}^{p+}_0(t)=2i\lambda_p\sum\limits_{l=0}^{n}c_{n-l}\lambda_p^{2l}\chi^{p+}_0(t)$, что и доказывает справедливость (16). Из формулы (15) видно, что для нахождения эволюции каждого последующего члена нормировочной цепочки необходимо знать эволюцию предыдущих членов нормировочной цепочки. Эволюция первого члена вычисляется согласно (16).

Найдем эволюцию функций $b(\lambda,t)$, $a(\lambda,t)$ (см. (7)). Аналогично формуле (25) получается

$$iMe_+(x,\lambda,t)+\dot{e}_+(x,\lambda,t)=-i\lambda\sum_{l=0}^{n}c_{n-l}\lambda^{2l}e_+(x,\lambda,t). \tag{28}$$

Пусть теперь $x\to-\infty$. Так как (см. (5)) $e_+(x,\lambda,t)=b(\lambda,t)e_-(x,\lambda,t)+a(\lambda,t)e_-(x,-\lambda,t)$, то из (28) следует

$$ib(\lambda,t)Me_-(x,\lambda,t)+ia(\lambda,t)Me_-(x,-\lambda,t)+\dot{b}(\lambda,t)e_-(x,\lambda,t)+$$

$$+b(\lambda,t)\dot{e}_-(x,\lambda,t)+\dot{a}(\lambda,t)e_-(x,-\lambda,t)+a(\lambda,t)\dot{e}_-(x,-\lambda,t)=$$

$$=-i\lambda\sum_{l=0}^{n}c_{n-l}\lambda^{2l}\left[b(\lambda,t)e_-(x,\lambda,t)+a(\lambda,t)e_-(x,-\lambda,t)\right].$$

Сравнивая слева и справа коэффициенты при $e^{-i\lambda x}$ и $e^{i\lambda x}$, получаем, используя (21), $\dot{b}(\lambda,t)=-2i\lambda\sum\limits_{l=0}^{n}c_{n-l}\lambda^{2l}b(\lambda,t)$, $\dot{a}(\lambda,t)=0$. Поэтому

$$b(\lambda,t)=b(\lambda)\exp\left[\left(-2i\lambda\sum_{l=0}^{n}c_{n-l}\lambda^{2l}\right)t\right],\quad a(\lambda,t)=a(\lambda,0)=a(\lambda), \tag{29}$$

где $b(\lambda)=b(\lambda,0)$. Используя (29) и определение функции рассеяния, получаем (14) для функции $s(\lambda,t)$. Теорема 1 доказана.

Теперь, чтобы найти комплексные решения общего уравнения КдФ, следует решить обратную задачу: по данным рассеяния (14) восстановить потенциал $u(x,t)$.

3. Условия единственной разрешимости и алгоритм обратной задачи. Сначала выпишем условия, достаточные для единственной факторизации функции рассеяния $s(\lambda,t)$.

Пусть $s(\lambda,t)$ удовлетворяет условиям: 1) $s(\lambda,t)=O(1/\lambda)$ при $\lambda\to\infty$ равномерно по t; 2) $s(0,t)=-1$; 3) $s(\lambda,t)\,s(-\lambda,t)\neq1$, если $\lambda\neq0$. Тогда какова бы ни была функция $s(\lambda,t)$ [12], обладающая свойствами 1—3, числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_\alpha$ из полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$ и натуральные числа $m_1,\ldots,m_\alpha$, существует единственная функция $w(\lambda,t)$, аналитическая в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda>0$, с асимптотикой $w(\lambda,t)=2i\lambda\,[1+O(1/\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty$, имеющая своими нулями точки $\lambda_1,\ldots,\lambda_\alpha$ кратности соответственно $m_1,\ldots,m_\alpha$, которая связана с функцией $s(\lambda,t)$ соотношением $w(\lambda,t)\times w(-\lambda,t)=4\lambda^2/(1-s(\lambda,t)\,s(-\lambda,t))$.

Условия 2 и 3 выполняются. Для того чтобы выполнялось условие 1 при $s(\lambda)\not\equiv0$, предположим, что параметры $c_0,\ldots,c_n$ из уравнения (9) вещественны.

Введем функции

$$s_1(\lambda, t) = \frac{s(-\lambda, t)\, w(-\lambda, t)}{w(\lambda, t)}, \quad f_s^+(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda, t)\, e^{ix\lambda} d\lambda,$$

$$f_s^-(x, t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\lambda, t)\, e^{-ix\lambda} d\lambda, \quad f_p^\pm(x, t) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m_p-1} \chi_{m_p-1-\nu}^{p\pm}(t)\, \frac{1}{\nu!}\,(d/d\lambda)^\nu\, \frac{e^{\pm ix\lambda} 2\lambda(\lambda-\lambda_p)^{m_p}}{w(\lambda, t)}\Bigg|_{\lambda=\lambda_p}, \quad f_\pm(x, t) =$$

$$= f_s^\pm(x, t) + \sum_{p=1}^{\alpha} f_p^\pm(x, t).$$

Составим интегральные уравнения, которым удовлетворяют ядра $K_\pm(x, \xi, t)$ ($K_\pm(x, \xi, 0)$ см. (3)),

$$K_+(x, \xi, t) + \int_x^\infty K_+(x, \gamma, t)\, f_+(\gamma+\xi, t)\, d\gamma + f_+(x+\xi, t) = 0,$$

$$-\infty < x \leqslant \xi < \infty, \quad K_-(x, \xi, t) + \int_{-\infty}^{x} K_-(x, \gamma, t)\, f_-(\gamma+\xi, t)\, d\gamma +$$

$$+ f_-(x+\xi, t) = 0, \quad -\infty < \xi \leqslant x < \infty. \tag{30}$$

По данным рассеяния (14) получаем единственную функцию $w(\lambda, t) = w(\lambda, 0)$. Имея функцию $w(\lambda, 0)$, строим функции $f_\pm(x, t)$. При данных $f_\pm(x, t)$ первое из уравнений (30) имеет единственное решение $K_+(x, \xi, t)$. Теперь потенциал $u(x, t)$ восстанавливается по формуле $u(x, t) = -2\frac{\partial}{\partial x} K_+(x, x, t)$ (см. (4)) и будет единственным решением задачи Коши (9), (10).

Если $s(\lambda) \equiv 0$, то параметры $c_0, \ldots, c_n$ могут принимать комплексные значения. При этом уравнения (30) вырождаются в системы линейных алгебраических уравнений, решениями которых являются комплексные аналоги N-солитонных решений действительного случая. Из сказанного выше следует теорема единственности.

Теорема 2. 1. *Пусть задана начальная функция* $u_0(x)$ *с данными рассеяния* $\{s(\lambda) \not\equiv 0;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha;\ \chi_0^{p+}, \ldots, \chi_{m_p-1}^{p+}$, *где* $p = 1, \ldots, \alpha\}$ *и в уравнении* (9) *параметры* $c_0, \ldots, c_n$ *вещественны.*

Тогда потенциал, восстановленный по данным рассеяния (14), *будет единственным комплекснозначным решением* $u(x, t)$ *уравнения* (9) *с начальным условием* (10) *в классе комплекснозначных функций, удовлетворяющих условию* (11),

$$\max_{|t|\leqslant T} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)\, |u_x^{(\nu)}(x, t)|\, dx < \infty, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n+1$$

при всех $T \geqslant 0$.

2. *Если начальная функция* $u_0(x)$ (10) *такова, что* $s(\lambda) \equiv 0$, *то уравнение* (9) *имеет единственное решение при комплексных параметрах* $c_0, \ldots, c_n$. *В этом случае получается комплексный аналог* N*-солитонного решения.*

Замечание 3. Условие вещественности параметров $c_0, \ldots, c_n$ в утверждении 1 теоремы 2 (если $s(\lambda) \not\equiv 0$) сужает множество уравнений (9), для которых решение единственно в пространстве комплекснозначных функций (11). Возможно при другом доказательстве единственность получится и при комплексных $c_0, \ldots, c_n$.

Из анализа доказательств теорем 1 и 2 следует, что класс решений $u(x, t)$, для которых выполняются эти теоремы, можно расширить. При этом следует предполагать, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|u(x, t)|\,dx<\infty$, а производные $u_x^{(\nu)}(x, t)$, $\nu=1, 2, \ldots, 2n-1$ убывают на $\pm\infty$ при каждом фиксированном t. Однако из [6] следует, что устранить разрыв между единственностью и существованием в случае вещественных решений обычного уравнения КдФ можно, сохраняя метод обратной задачи и предполагая выполнение условия (11) при $\nu=0, 1, 2, 3$ и всех $T\geqslant 0$.

1. *A method* for solving the Korteweg — de Vries equation / G. Gardner, J. Green, M. Kruskal, R. Miura // Phys. Rev. Lett.— 1967.— **19**, № 19.— P. 1095—1098.
2. *Теория* солитонов. Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М. : Наука, 1980.— 324 с.
3. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
4. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма — Лиувилля.— М. : Наука, 1984.— 240 с.
5. *Лэкс П. Д.* Интегралы нелинейных уравнений эволюции и уединенные волны // Математика.— 1969.— **13**, вып. 5.— С. 128—150.
6. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1977.— 331 с.
7. *Лянце В. Э.* Обратная задача для несамосопряженного оператора // Докл. АН СССР.— 1966.— **166**, № 1.— С. 30—33.
8. *Sjoberg A.* On the Korteweg — de Vries equation: existence and uniqueness // J. Math. Anal. Appl.— 1970.— **29**.— P. 569—579.
9. *Черемных Е. В.* Разделение переменных в уравнении КдФ в классе комплекснозначных функций // Вестн. Львов. политехн. ин-та.— 1982.— № 169.— С. 134—136.
10. *Сыроид И.-П. П.* Несамосопряженный аналог безотражательных потенциалов // Математический анализ и теория вероятностей.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 168—172.
11. *Сыроид И.-П. П.* Достаточные условия отсутствия спектральных особенностей у несамосопряженного оператора Шредингера в терминах потенциала // Сиб. мат. журн. — 1981.—**22**, № 1.— С. 151—157.
12. *Блащак В. А.* Обратная задача теории рассеяния для несамосопряженного оператора Штурма — Лиувилля // Труды лет. шк. по спектр. теории операторов и теории предст. групп.— Баку : Элм, 1975.— С. 11—19.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 22.02.88