УДК 512.544

Л. А. Курдаченко

Локально нильпотентные группы с условием $\min - \infty - \mathfrak{n}$

Продолжается изучение локально нильпотентных групп со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп — условием $\min - \infty - \mathfrak{n}$. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Локально нильпотентная группа с условием $\min - \infty - \mathfrak{n}$ счетна.*

Теорема 2. *Если G — локально нильпотентная группа с условием $\min - \infty - \mathfrak{n}$, периодическая часть которой нильпотентна и порядки ее элементов ограничены в совокупности, то $G = t(G)A$, где подгруппа A минимаксна.*

Теорема 3. *Пусть G — локально нильпотентная группа с условием $\min - \infty - \mathfrak{n}$, T — ее периодическая часть. Если T нильпотентна, а G/T абелева, то $G = TA$, где подгруппа A минимаксна.*

Продовжується вивчення локально нільпотентних груп зі слабкою умовою мінімальності для нормальних підгруп — умовою $\min - \infty - \mathfrak{n}$. Одержані такі результати.

Теорема 1. *Локально нільпотентна група з умовою $\min - \infty - \mathfrak{n}$ лічильна.*

Теорема 2. *Якщо G — локально нільпотентна група з умовою $\min - \infty - \mathfrak{n}$, періодична частина якої нільпотентна та порядки її елементів обмежені в сукупності, то $G = t(G)A$, де підгрупа A мінімаксна.*

Теорема 3. *Нехай G — локально нільпотентна група з умовою $\min - \infty - \mathfrak{n}$, T — її періодична частина. Якщо T нільпотентна, а G/T абелева, то $G = TA$, де підгрупа A мінімаксна.*

Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторое семейство подгрупп группы G. Будем говорить, что G удовлетворяет слабому условию минимальности или, короче, условию $\min - \infty$ для $\mathfrak{S}$-подгрупп, если для всякой строго убывающей цепочки подгрупп $G_1 > G_2 > \ldots > G_n > \ldots$ семейства $\mathfrak{S}$ найдется такой номер n_0, что $|G_n : G_{n+1}|$ конечны при $n > n_0$. Слабое условие минимальности является достаточно широким обобщением обычного условия минимальности. Его ввели в рассмотрение Д. И. Зайцев [1] и Р. Бэр [2]. При достаточно общих ограничениях изучались группы с условием $\min - \infty$ для всех подгрупп [1, 3], всех абелевых подгрупп [2], [4], всех неабелевых подгрупп [5], всех субнормальных подгрупп [6], всех конечно порожденных подгрупп [7]. Изученные группы (последний тип при условии конечной порожденности) — минимаксные, т. е. обладают конечным субнормальным рядом, факторы которого удовлетворяют условию min или max. Рассмотрение групп со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп — условием min — ∞ — n — выводит за пределы класса минимаксных групп. Локально нильпотентные группы с условием min — ∞ — n изучались в работах [8, 9]. Такие группы являются минимаксными в том случае, когда они периодические, без кручения или финитно аппроксимируемы ([8], теоремы 1, 2, 3 соответственно). Локально нильпотентные группы с условием min — ∞ — n гиперцентральные, разрешимые, их периодические части удовлетворяют условию min — G ([9], теорема 1). Изучение локально нильпотентных групп с условием min — ∞ — n продолжается и в настоящей статье. В теореме 1 доказана счетность таких групп. Теоремы 2, 3 связаны со следующим вопросом : можно ли локально нильпотентную группу G с условием Min — ∞ — n представить в виде $G = t(G) \cdot A$, где $t(G)$ — периодическая часть G, A — минимаксная подгруппа? В этих теоремах указаны некоторые дополнительные условия, при которых такое представление возможно.

Пусть G — группа, A — $\mathbb{Z}[G]$-модуль. Модуль A назовем гиперцентральным или гипертривиальным [10], если он обладает возрастающим рядом таких подмодулей $\langle 0\rangle = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots A_\alpha \leqslant A_{\alpha+1} \leqslant \ldots A_\gamma = A$, что $A_{\alpha+1}(g-1) \leqslant A_\alpha$ для любого $g \in G$, $\alpha < \gamma$. Указанный ряд подмодулей назовем центральным.

Лемма 1. *Пусть A — гиперцентральный $\mathbf{F}_p[G]$-модуль, $\mathbf{F}_p$ — поле простого порядка p. Если $G = G^p$, то A — нулевой модуль.*

Доказательство. Положим $A_1 = \{a \in A \mid a(g-1) = 0$ для любого $g \in G\} = \zeta_G(A)$, $A_2/A_1 = \zeta_G(A/A_1)$. Предположим, что $A_2 \neq A_1$ и $a \in A_2 \setminus A_1$, $g \in G$. Тогда $ag = a + a_1$, $a_1 \in A_1$. Имеем $ag^n = a + na_1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, в частности, $ag^p = a$. Из равенства $G = G^p$ следует соотношение $a \in \zeta_G(A)$, которое противоречит выбору a. Следовательно, $A = A_1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A — гиперцентральный артинов $\mathbb{Z}[G]$-модуль, G — счетная гиперцентральная группа конечного свободного ранга. Тогда модуль A счетен.*

Доказательство. Очевидно, аддитивная группа A периодическая, причем множество $\Pi(A)$ конечно. Поэтому можно считать, что A — p-группа, p — простое число. Так как мощность A совпадает с мощностью ее нижнего слоя, то можно считать A элементарной абелевой. Предположим, что модуль A несчетен. Так как он артинов, то в A можно выделить несчетный подмодуль B, всякий собственный $\mathbb{Z}[G]$-подмодуль которого уже счетен.

Пусть $T = t(G)$ и $\langle 1\rangle = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \ldots T_\alpha \leqslant T_{\alpha+1} \leqslant \ldots T_\gamma = T$ — центральный относительно G ряд с факторами простого порядка. Для любого $\alpha \leqslant \gamma$ множество $C_B(T_\alpha)$ будет $\mathbb{Z}[G]$-подмодулем. В самом деле, пусть $a \in C_B(T_\alpha)$, $g \in G$, $h \in T_\alpha$, β — наименьшее порядковое число, для которого $h \in T_\beta$. Ясно, что β не может быть предельным. Тогда $ghg^{-1} = hh_1$, $h_1 \in T_{\beta-1}$ и $gh = hh_1g$. Имеем $(ag)h = a(gh) = a(hh_1g) = (ah)(h_1g) = (ah)g = ag$, т. е. $ag \in C_B(T_\alpha)$. Обозначим через α наименьшее порядковое число, для которого $C_B(T_\alpha) = B$, в частности, $C_B(T_{\alpha+1})$ — счетный подмодуль. Обозначим через z элемент G, удовлетворяющий равенству $T_{\alpha+1} = \langle T_\alpha, z\rangle$. Тогда $C_B(T_{\alpha+\cdot}) = C_B(z)$, т. е. $C_B(z)$ — счетен. Множество $B(z-1)$ также будет подмодулем B. Если $b \in B$, $g \in G$, то $b(z-1)g = (bz-b)g = bzg - bg = bgzz_1 - bg$, где $z_1 \in T_\alpha$, т. е. $(bgz)z_1 = bgz$ и $b(z-1)g = bgz - bg = bg(z-1) \in B(z-1)$. Из изоморфизма $B(z-1) \cong B/C_B(z)$ и счетности $C_B(z)$ следует несчетность $B(z-1)$, так что $B = B(z-1)$. Рассмотрим группу $K = B \rtimes \langle z\rangle$. Нетрудно видеть, что $[K, K] = B(z-1) = B$, в частности, фактор-группа $K/[K, K]$ конечна. Можно считать, что z — p-элемент. Из теоремы Баумслага (см., например, [11], теорема 6.34) следует нильпотентность K. Но тогда конечность $E/[K, K]$ влечет конечность всей группы K (см., например, [11], теорема 2.22), а это противоречит несчетности B. Полученное противоречие доказывает равенство $C_B(T) = B$, поэтому можно считать, что G — нильпотентная группа без кручения конечного ранга. Положим $H = G/C_G(B)$, $z \in \zeta(H)$, $C_m(z) = \{b \in B \mid bz^m = b\}$. Тогда $C_m(z)$ — $\mathbb{Z}[G]$-подмодуль B. Поскольку модуль B гиперцентральный, то для любого элемента $b \in B$ найдется такое число m, что $bz^m = b$.

Это доказывает равенство $B = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m(z)$. Из выбора B получаем $B = C_m(z)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Но это означает, что $\zeta(H)$ — периодическая подгруппа. Будучи группой конечного ранга, она черниковская. Из леммы 1 следует конечность $\xi(H)$. Тогда группа H конечна, и подмодуль B не может быть несчетным. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 1. *Локально нильпотентная группа с условием* min — — ∞ — n *счетна.*

Доказательство. Пусть $T = t(G)$. В силу теоремы 1 [9] следует разрешимость G. Пусть $\langle 1\rangle = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \ldots \leqslant T_n = T$ — ряд коммутантов подгруппы T. Доказательство проведем индукцией по длине этого ряда. Если $n = 0$, то G — группа без кручения и в силу теоремы 2 [8] — минимаксна, а значит, счетна. Пусть $n > 1$. Предположим, что теорема доказана для групп, ступени разрешимости периодических частей которых меньше n. В частности, группа $H = G/T_1$ счетна. Из теоремы 1 [9] следует гиперцентральность G. Будем рассматривать T_1 как гиперцентральный $\mathbb{Z}[H]$-модуль. Модуль T_1 артинов (см. [9], теорема 1).

Применяя лемму 2, доказываем теорему.

Группу назовем ограниченной, если порядки ее элементов ограничены в совокупности.

Лемма 3. *Пусть G — нильпотентная группа. Если $t(G)$ — ограниченная подгруппа, то G включает в себя нормальную подгруппу без кручения, определяющую ограниченную фактор-группу.*

Доказательство. Так как группа $G/t(G)$ нильпотентна и без кручения, то она обладает центральным рядом с факторами без кручения (см., например, [11], теорема 2.25), т. е. G обладает рядом $t(G) = T = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_n = G$, в котором $A_k/A_{k-1} = \zeta(G/A_{k-1})$ и A_k/A_{k-1} — без кручения, $1 \leqslant k \leqslant n$. Докажем лемму индукцией по длине n этого ряда.

Пусть $n = 1$, т. е. фактор-группа G/T абелева. Группа G обладает центральным рядом $\langle 1\rangle = C_0 \leqslant C_1 \ldots \leqslant C_t = T \leqslant G$, составленным из пересечений T с членами верхнего центрального ряда G. Предположим сначала, что $t = 1$, т. е. $T \leqslant \xi(G)$. Для каждого $g \in G \setminus T$ отображение $x \to [x, g]$, $x \in G$, будет эндоморфизмом G, ядро которого совпадает с $C_G(g)$, а образ — подгруппа T.

В частности, порядки элементов $G/C_G(g)$ делят r, где r — наименьшее общее кратное порядков элементов T. Из равенства $\zeta(G) = \bigcap_{g\in G} C_G(g)$ получаем, в силу теоремы Рэмака, вложение $G/\zeta(G) \leqslant \prod_{g\in G} G/C_G(g)$, которое показывает, что $G/\zeta(G)$ — ограниченная группа. Далее, $B = \zeta(G)^r$ — подгруппа без кручения, так что G/B — ограниченная группа.

Пусть теперь $t > 1$ и предположим, что G/C_1 включает в себя такую нормальную подгруппу D/C_1 без кручения, что порядки элементов G/D делят некоторое число r_1. Подгруппа D/C_1 абелева и $C_1 \leqslant \zeta(D)$, так что из доказанного выше следует существование в D такой нормальной подгруппы E без кручения, что порядки элементов D/E делят число r_2. Но тогда $D^{r_1} = D_1 \leqslant E$, т. е. D_1 — подгруппа без кручения и $D_1 \lhd G$. Порядки элементов G/D_1 будут делителями числа r_1r_2.

Предположим, что при $n > 1$ в подгруппе A_{n-1} существует нормальная подгруппа H без кручения, для которой порядки элементов A_{n-1}/H

делят число r_3. Тогда $L = A_{n-1}^{r_3} \leqslant H$, т. е. L — G-допустимая подгруппа без кручения. В G/L периодическая часть ограничена, а фактор-группа по ней абелева. Из индуктивного предположения вытекает существование нормальной подгруппы U/L без кручения, которая определяет ограниченную фактор-группу. Очевидно, U не имеет кручения. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — локально нильпотентная группа, $t(G)$ — конечное расширение элементарной абелевой подгруппы, а $G/t(G)$ — минимаксная группа. Если $t(G)$ удовлетворяет условию* min—G, *то $G = t(G)A$, где подгруппа A минимаксна.*

Доказательство. Обозначим через R пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G. Нетрудно видеть, что R — элементарная абелева группа (ведь минимаксная группа с конечной периодической частью финитно аппроксимируема, это вытекает, например, из леммы 3 [3]). Покажем, что $G = RA$, где A—минимаксная группа. Доказательство проведем индукцией по свободному рангу фактор-группы $G/C_G(R)$. Отметим сразу конечность $t(G/C_G(R))$ (это следует, например, из леммы 3 [9]). Пусть $r_0(G/C_G(R)) = 1$. Подгруппа $C_G(R)$ нильпотентна и, в силу леммы 3, включает в себя такую нормальную подгруппу B без кручения, что порядки элементов $C_G(R)/B$ делят число k. Положим $B_1 = B^k$. Тогда $B_1 \leqslant B$, в частности, B_1 не имеет кручения и $B_1 \lhd G$. Пусть $H = G/B_1$, $K = t(H)$, $R_1 = RB_1/B_1$. Фактор-группа K/R_1, будучи ограниченной группой конечного периода, конечна, а H/K имеет ранг 1. Кроме того, из выбора R следует, что R_1 — пересечение всех подгрупп, имеющих конечный индекс в H. Поэтому в H существует подгруппа $L \lhd H$, для которой $L \cap K = R_1$ и индекс $|H:L|$ конечен. В силу теоремы Уилсона [12] получаем, что R_1 удовлетворяет условию min — L. Фактор-группа L/R_1 абелева без кручения и имеет ранг 1. Из теоремы 3 [13] вытекает существование такой конечной L-допустимой подгруппы $F \leqslant R_1$ и такого элемента $x \in L \setminus R_1$, что $[xF, R_1/F] = R_1/F$. Из конечности индекса $|H:L|$ следует конечность $F_1 = F^H$. Кроме того, в силу леммы 9 [13] всякий элемент L действует на R как некоторая степень x.

Поскольку $L/R_1 \lhd H/R_1$, L/R_1 — фактор-группа без кручения и имеет ранг 1, то $L/R_1 \leqslant \zeta(H/R_1)$. В частности, для любого $y \in H$ имеем $(xF_1)^{yF_1} = xF_1 zF_1$, где $zF_1 \in R_1/F_1$. Но $[xF_1, R_1/F_1] = R_1/F_1$, а потому $zF_1 = [xF_1, uF_1]$ для некоторого $u \in R_1$. Таким образом, $(xF_1)^{yF_1} = xF_1 [xF_1, uF_1] = (xF_1)^{uF_1}$, а потому $yF_1u^{-1}F_1 \in C_{H/F_1}(xF_1)$, т. е. $yF_1 \in R/F_1 C_{H/F_1}(xF_1)$. Всякий элемент L/F_1 действует на R_1/F_1 как некоторая степень xF_1, поэтому $C_{R_1/F_1}(xF_1) \leqslant \zeta(L/F_1) \cap R_1/F_1$.

Поскольку R_1/F_1 удовлетворяет условию min — L, то $\zeta(L/F_1) \cap R_1/F_1$ конечна. Это означает, что группа $D/F_1 = C_{H/F_1}(xF_1)$ минимаксна. Так как группа F_1 конечна, то D минимаксна. Обозначим через A полный прообраз D в G. Поскольку B_1 минимаксна, то и A — минимаксная группа. Далее, $G = (RB_1)A = RA$.

Пусть теперь $r_0(G/C_G(R)) > 1$, группа $t(G/R)$ конечна, поэтому центр G/R содержит элемент gR бесконечного порядка. Чтобы не переходить к фактор-группе $G/C_G(R)$, будем считать группу $C_G(R)$ периодической. Подгруппа $[g, R]$ — G-допустима. Положим $R_2 = [g, R]$. Очевидно, $r_0((G/R_2)/C_{G/R_2}(R/R_2)) < r_0(G/C_G(R))$, и ввиду индуктивного предположения $G/R_2 = (R/R_2)(E/R_2)$ для некоторой минимаксной подгруппы E/R_2. Очевидно, R_2 удовлетворяет min — E. Обозначим через R_3 пересечение всех подгрупп, имеющих в E конечный индекс. В $\zeta(E/R_3)$ выбираем неединичный элемент g_1R_3 бесконечного порядка и полагаем $R_4 = [g_1, R_3]$. Приходим к равенству $E/R_4 = (R_3/R_4)(E_1/R_4)$, где подгруппа E_1/R_4 минимаксна. В частности, $G/R_4 = (R/R_4)(E_1/R_4)$. Используя аналогичные рассуждения и тот факт, что R удовлетворяет условию min — G, получаем через конечное число шагов такую G-допустимую подгруппу $S \leqslant R$, что $G/S = (R/S)(M/S)$, где M/S — минимаксная группа, S — пересечение всех подгрупп конечного индекса из M, и для любого элемента yS бесконечного порядка из $\zeta(M/S)$ имеет место равенство $[y, S] = S$. Для любого $x \in M$ справедливо $y^x = yw$, где $w \in S$. Но тогда $w = [y, w_1]$, $w_1 \in S$, $y^x = y[y,$

$w_1] = y^{w_1}$. Отсюда следует соотношение $xw_1^{-1} \in C_M(y)$, т. е. $M = S\,C_M(y)$. Так как $y \in \zeta(M/S)$, то $C_S(y)$ — M-допустимая подгруппа S, а поскольку группа R абелева, то и G — допустимая подгруппа. Пусть $M_1 = C_M(y)$, S_1 — пересечение всех подгрупп M_1, имеющих в M_1 конечный индекс. Из равенств $G = RM$ и $M = SM_1$ следует, что $G = RM_1$. Так как R — абелева группа, то всякая M-допустимая подгруппа S_1 будет и G-допустимой, в частности, S_1 удовлетворяет условию min — M_1. Из выбора y получаем неравенство $r_0(G/C_G(R)) > r_0(M_1/C_{M_1}(S_1))$ и индуктивное предположение приводит к существованию такой минимаксной подгруппы A, что $M_1 = S_1A$. Следовательно, $G = RA$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть G — локально нильпотентная группа с условием* min — ∞ —п. *Если группа $t(G)$ нильпотентна и ограничена, то $G = t(G)A$ для некоторой минимаксной подгруппы A.*

Доказательство. В силу следствия теоремы 1 [9] $t(G)$ удовлетворяет условию min — G, а группа $G/t(G)$ минимаксна. Поскольку $t(G)$ — нильпотентная группа, то она обладает центральным рядом $\langle 1\rangle = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \ldots \leqslant T_n \leqslant t(G)$, составленным из G-допустимых подгрупп, в котором факторы T_k/T_{k-1} бесконечные и элементарные абелевы, $1 \leqslant k \leqslant n$, а последний фактор $t(G)/T_n$ конечен. В силу леммы 4 существует такая подгруппа B, что $G/T_{n-1} = t(G)/T_{n-1}B/T_{n-1}$ и B/T_{n-1} минимаксна. Так как $T_{n-1}/T_{n-2} \leqslant \zeta(T/T_{n-2})$, то T_{n-1}/T_{n-2} удовлетворяет min — B и, снова применяя лемму 4, получаем существование такой подгруппы $C \geqslant T_{n-2}$, что $B/T_{n-2} = t(B/T_{n-2})\,C/T_{n-2}$ (т. е. $G = t(G)C$) и группа C/T_{n-2} минимаксна. Используя аналогичные рассуждения, приходим через конечное число шагов к существованию такой минимаксной подгруппы A, что $G = t(G)A$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть G — локально нильпотентная группа с условием* min — ∞ — п. *Если ее периодическая часть T нильпотентна, а G/T абелева, то $G = TA$ для минимальной подгруппы A.*

Доказательство. Сведем доказательство к случаю, когда группа T абелева. Обозначим через R пересение всех подгрупп, имеющих в G конечный индекс. Покажем, что $G = RA$, где A — минимаксная группа. Снова доказательство проведем индукцией по $r_0(G/C_G(R))$.

Пусть $r_0(G/C_G(R)) = 1$. Из леммы 3 [9] вытекает конечность $S/C_G(R) = t(G/C_G(R))$. Поскольку G/S — нильпотентная минимаксная группа без кручения, то она финитно аппроксимируема, а значит, финитно аппроксимируема и $G/C_G(R)$. Поэтому существует подгруппа $H \lhd G$, для которой $H \cap S = C_H(R)$ и индекс $|G:H|$ конечен. Тогда R — пересечение всех подгрупп, имеющих в H конечный индекс и $H/C_H(R)$ — группа без кручения ранга 1. В силу теоремы Уилсона [12] R удовлетворяет условию min — — H.

Из теоремы 3 [13] вытекает существование такой черниковской H-допустимой подгруппы $E \leqslant R$ и такого элемента $x \in H \setminus C_G(R)$, что $[xE, R/E] = R/E$. Из конечности индекса $|G:H|$ следует, что группа $F = E^G$ черниковская. Как и в лемме 4 докажем справедливость равенства $G/F = (R/F)\,C_{G/F}(xF)$. Так как группа R/F абелева, то $C_{R/F}(xF) \leqslant \zeta(G/F)$, и потому подгруппа $C_{R/F}(xF)$ также черниковская. Положим $A/F = C_{G/F}(xF)$. Тогда A — минимаксная группа и $G = RA$. Случай $r_0(G/C_G(R)) > 1$ рассматривается аналогично доказательству леммы 4. Теорема доказана.

Отметим, что добавления к периодической части, имеющие с ней одинаковые пересечения, вообще говоря, не сопряжены. В этом можно убедиться на следующем простом примере.

Пример 1. Пусть $T = \mathop{\mathrm{X}}\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle t_n\rangle$ — счетная элементарная абелева p-группа, $A = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$ — свободная абелева группа. Группа T обладает автоморфизмом φ, действующим по правилу $t_1\varphi = t_1$, $t_{n+2}\varphi = t_{n+1}t_n$, $n \in \mathbb{N}$, а группа A — автоморфизмом ψ, определенным по правилу $a_1\psi = a_1$, $a_2\psi = a_2a_1$. Отметим, что всякая собственная $\langle\varphi\rangle$-допустимая подгруппа T конечна. Положим $B = T \times A$, χ — автоморфизм B, задаваемый матрицей $\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}$.

Положим $G = B \leftthreetimes \langle \chi \rangle$. Поскольку $t\chi = t\varphi$ для $t \in T$, то всякая собственная G-допустимая подгруппа T конечна, т. е. T удовлетворяет условию $\min - G$. Поэтому G удовлетворяет условию $\min - \infty - n$. Подгруппы $C = \langle a_1, a_2, \chi \rangle$ и $C_1 = \langle a_1 t_1, a_2 t_2, \chi \rangle$ являются дополнениями к T. Они, очевидно, не сопряжены.

Если G — локально нильпотентная группа с условием $\min - n$, R — пересечение всех подгрупп конечного индекса, то R — делимая абелева группа. Следующий пример показывает, что для группы с условием $\min - \infty - n$ подгруппа R может быть неабелевой и ограниченной.

Пример 2. Пусть U, V — векторные пространства счетной размерности над простым полем $\mathbf{F}_p$ порядка $p \neq 2$, $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — их базисы соответственно. Положим $W = U \oplus V$. Пусть α — линейное преобразование W, определенное по правилу $u_1\alpha = u_1$, $u_{n+1}\alpha = u_{n+1} + u_n$, $v_1\alpha = v_1$, $v_{n+1}\alpha = v_{n+1} + v_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Введем на W операцию умножения $\circ$ таким образом, чтобы W стала антикоммутативной алгеброй, а α — ее автоморфизмом. Определим значения произведений на базисных элементах и распространим на остальные с помощью законов дистрибутивности и антикоммутативности. Положим $v_k \circ v_l = u_k \circ v_l = v_l \circ u_k = u_k \circ u_k = 0$, $k, l \in \mathbb{N}$.

Остальные произведения $u_k \circ u_l$ будем искать в виде линейных комбинаций элементов V, причем будем определять значения $u_k \circ u_l$ для $k < l$, полагая $u_l \circ u_k = -u_k \circ u_l$. Положим $u_1 \circ u_k = v_{k-1}$. Имеем тогда $u_1\alpha \circ u_k\alpha = u_1 \circ (u_{k-1} + u_k) = u_1 \circ u_{k-1} + u_1 \circ u_k = v_{k-2} + v_{k-1} = (u_1 \circ u_k)\, \alpha$.

Предположим, что найдены $u_k \circ u_l$ при $1 \leqslant k \leqslant n$, $l \in \mathbb{N}$. Будем искать элементы $u_{n+1} \circ u_l$, $l \in \mathbb{N}$. Имеем $u_{n+1}\alpha \circ u_{n+2}\alpha = (u_{n+1} + u_n) \circ (u_{n+2} + u_{n+1}) = u_n \circ u_{n+1} + u_n \circ u_{n+2} + u_{n+1} \circ u_{n+2}$. Все слагаемые этой суммы, кроме последнего, уже найдены, т. е. $u_{n+1}\alpha \circ u_{n+2}\alpha = n_1 v_1 + \ldots + n_s v_s + u_{n+1} \circ u_{n+2}$. Будем искать элемент $u_{n+1} \circ u_{n+2}$ в виде $k_1 v_1 + \ldots k_s v_s + k_{s+1} v_{s+1}$. Имеем тогда $u_{n+1}\alpha \circ u_{n+2}\alpha = (k_1 + k_2)\, v_1 + \ldots + (k_s + k_{s+1})\, v_s + k_{s+1} v_{s+1}$. С другой стороны, $(u_{n+1} \circ u_{n+2})\, \alpha = (n_1 + k_1)\, v_1 + \ldots + (n_s + k_s)\, v_s + k_{s+1} v_{s+1}$. Из равенства $(u_{n+1} \circ u_{n+2})\alpha = u_{n+1}\alpha \circ u_{n+2}\alpha$ получаем следующую систему сравнений

$$k_1 + k_2 \equiv n_1 + k_1 \pmod p$$
$$k_2 + k_3 \equiv n_2 + k_2 \pmod p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$k_s + k_{s+1} \equiv k_s + n_s \pmod p.$$

Нетрудно видеть, что $k_1 = 0$, $k_2 = n_1, \ldots, k_{s+1} = n_s$ дают решение этой системы. Аналогично рассуждая, получаем все остальные произведения.

Пусть T — центральное расширение аддитивной группы V с помощью аддитивной группы U с системой факторов $f(x, y) = x \circ y$ (так как в алгебре W сложение и умножение связаны законами дистрибутивности, то f действительно определяет систему факторов).

Группа T — это множество пар (x, y), $x \in U$, $y \in V$, со следующей операцией умножения: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2 + x_1 \circ x_2)$.

Положим $a_n = (u_n, 0)$, $b_n = (0, v_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $[a_n, b_k] = (-u_n, 0)\,(0, -v_k)\,(u_n, 0)\,(0, v_k) = (-u_n, -v_k)\,(u_n, v_k) = (0, 0)$, так что $b_k \in \zeta(T)$, $k \in \mathbb{N}$.

Далее, $[a_n, a_k] = (-u_n, 0)\,(-u_k, 0)\,(u_n, 0)\,(u_k, 0) = (-u_n - u_k,\ u_n \circ u_k)\,(u_n + u_k,\ u_n \circ u_k) = (0,\ 2u_n \circ u_k)$.

Итак, T — двуступенно нильпотентная группа, причем $\zeta(T) = \langle b_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle \cong V$. Определим отображение $\varphi : T \to T$ по правилу $(x, y)\,\varphi = (x\alpha, y\alpha)$. Имеем

$$((x_1, y_1)\,(x_2, y_2))\,\varphi = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2 + x_1 \circ x_2)\,\varphi = ((x_1 + x_2)\,\alpha,\ (y_1 + y_2 + x_1 \circ x_2)\,\alpha) =$$
$$= (x_1\alpha + x_2\alpha,\ y_1\alpha + y_2\alpha + x_1\alpha \circ x_2\alpha) = (x_1\alpha,\ y_1\alpha)\,(x_2\alpha,\ y_2\alpha) = (x_1, y_1)\,\varphi\,(x_2, y_2)\,\varphi,$$

т. е. φ — эндоморфизм. Поскольку α — автоморфизм алгебры W, то $\varphi \in \mathrm{Aut}\, T$.

Положим теперь $G = T \leftthreetimes \langle \varphi \rangle$. Тогда, очевидно,

$$b_1\varphi = b_1,\ b_{n+1}\varphi = b_{n+1} b_n,\ a_1\varphi = (u_1\alpha, 0) = (u_1, 0) = a_1,$$
$$a_{n+1}\varphi = (u_{n+1}\alpha, 0) = (u_{n+1} + u_n, 0) = (u_{n+1}, 0)\,(u_n, 0)\,(0, u_n \circ u_{n+2}) \equiv$$
$$\equiv a_{n+1} a_n \pmod{\zeta(T)},\ x \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что всякая собственная G-допустимая подгруппа $\zeta(T)$ (соответственно $T/(\zeta(T))$ конечна. Следовательно, T удовлетворяет условию $\min - G$, а G удовлетворяет условию $\min - \infty - n$. Если $L \lhd G$, индекс $|G : L|$ конечен, то $\zeta(T) = L \cap \zeta(T)$, т. е. $L \geqslant \zeta(T)$. Аналогично, $L \geqslant T$. Следовательно, T — пересечение всех подгрупп, имеющих в G конечный индекс, а значит, группа G гиперцентральна.

1. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн.— 1968.— **20**, № 4.— С. 472—482.
2. *Baer R.* Polyminimaxgruppen // Math. Ann.— 1968.— **175**, N 1.— S. 1—43.
3. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп // Укр. мат. журн.— 1971.— **23**, № 5.— С. 652—660.
4. *Зайцев Д. И.* О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности // Мат. сб.— 1969.— **78**, № 3.— С. 323—331.
5. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для неабелевых подгрупп // Укр. мат. журн.— 1971.— **23**, № 5.— С. 661—665.
6. *Курдаченко Л. А.* Группы, удовлетворяющие слабым условиям минимальности и максимальности для субнормальных подгрупп // Мат. заметки.— 1981.— **29**, № 1.— С. 19—30.
7. *Karbe M.* Unendliche Gruppen mit schwachen Kettenbedingungen für endlich erzeugte Untergruppen // Arch. Math.— 1985.— **45**, N 2.— S. 97—110.
8. *Курдаченко Л. А.* Группы, удовлетворяющие слабым условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1979.— **20**, № 5.— С. 1068—1076.
9. *Курдаченко Л. А.* Локально нильпотентные группы со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1984.— **25**, № 4.— С. 99—106.
10. *Hartley B., Tomkinson M. J.* Splitting over nilpotent and hypercentral residuals // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1975.— **78**, N 2.— P. 215—226.
11. *Robinson D. J. S.* Finiteness condition and generalized soluble groups. Pt 1.— New-York: Springer, 1972.— 210 p.
12. *Wilson J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z.— 1970. — **114**, N 1.— S. 19—21.
13. *Курдаченко Л. А., Тушев А. В.* О некоторых классах групп со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 4.— С. 457—462.

Днепропетр. ун-т

Получено 07.01.88