УДК 519.64

В. К. ЗАДИРАКА, д-р физ.-мат. наук,
Н. Т. АБАТОВ, асп. (Ин-т кибернетики АН УССР, Киев)

Оптимальный по точности алгоритм решения одной задачи численного интегрирования

Рассматриваются оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов от некоторых быстроосциллирующих функций. Построен оптимальный по точности пассивный алгоритм на классе функций, имеющих известное количество экстремумов.

Розглядаються оптимальні за точністю алгоритми обчислення інтегралів від деяких швидкоосцилюючих функцій. Побудовано оптимальний за точністю пасивний алгоритм на класі функцій, що мають відому кількість екстремумів.

При решении ряда задач вычислительной математики, цифровой обработки сигналов, распознавания образов, спектрального анализа случайных процессов и других актуальной является задача построения оптимальных по точности и близких к ним алгоритмов* вычисления интегралов от быстроосциллирующих функции вида

$$I_{1,2}(\omega) = \int_a^b f(x) \begin{Bmatrix} \sin \omega x \\ \cos \omega x \end{Bmatrix} dx, \tag{1}$$

* Рассматриваются линейные и нелинейные способы вычисления интегралов (1).

в случае, когда подынтегральная функция $f(x)$ принадлежит некоторому классу функций F, информация о ней задана не более, чем в n точках и $|\omega| \geqslant 2\pi/(b-a)$.

Будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу функций Q_m, $m \geqslant 0$, если она задана на $[a, b]$ и минимальное число ее отрезков монотонности равно $m+1$ (монотонность может быть нестрогая). Определим подклассы из Q_m, рассматриваемые в дальнейшем, следующим образом:

$$Q_m^1 = \{f \in Q_m / 0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad x \in [a, b]\};$$

$$Q_m^1(z^n) = \{\varphi \in Q_m^1 : \varphi(x^n) = f^n\},$$

где

$$x^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n); \quad f^n = (f_1, f_2, \ldots, f_n);$$

$$f_\nu = f(x_\nu), \quad \nu = \overline{1, n}; \quad z^n = (x^n, f^n);$$

$\widetilde{Q}_m^1$ — класс функций, строго монотонных на отрезках монотонности и $\widetilde{Q}_m^1 \subset Q_m^1$; Q^* — класс функций из $\widetilde{Q}_m^1(z^n)$, имеющих локальные экстремумы на тех же отрезках, что и $f\,(f \in \widetilde{Q}_m^1(z^n))$.

Данная работа является продолжением работ [1 — 3]. В ней построен оптимальный по точности пассивный алгоритм [4, 5] вычисления интегралов вида (1) на классе Q_m^1.

1. Постановка задачи и основные определения. Требуется вычислить значение интеграла $I(\omega)$* с максимально возможной точностью при данной информации о $f(x)$: $f(x) \in Q_m^1$ и $\{f_\nu\}_1^n, f_\nu = f(x_\nu)$. Для простоты изложения предположим, что в точках x_ν нам известны точные значения f_ν, $\nu = \overline{1, n}$.

Введем обозначения

$$I^+(z^n) = \sup_{f \in Q_m^1(z^n)} I(\omega); \quad I^-(z^n) = \inf_{f \in Q_m^1(z^n)} I(\omega).$$

Будем предполагать, что приближенное значение $I(\omega)$ на классе $Q_m^1(z^n)$ определяется с помощью центрального алгоритма $A(z^n)$, который является оптимальным по точности на классе $Q_m^1(z^n)$ [6]:

$$A(z^n) = (I^+(z^n) + I^-(z^n))/2. \tag{2}$$

Тогда погрешность $\varepsilon(A(z^n), f^n)$ вычисления интеграла $I(\omega)$ с помощью $A(z^n)$ для функции $f \in Q_m^1(z^n)$ будет равна [6]

$$\varepsilon(A(z^n), f^n) = (I^+(z^n) - I^-(z^n))/2. \tag{3}$$

(Вообще говоря, вместо $A(z^n)$ и $\varepsilon(A(z^n), f^n)$ необходимо писать $A(z^n, \omega)$ и $\varepsilon(A(z^n), f^n, \omega)$.)

Введем следующие характеристики:

$$\varepsilon(A(z^n), Q_m^1) = \sup_{f \in Q_m^1} \varepsilon(A(z^n), f),$$

$$\varepsilon(K_n, Q_m^1) = \varepsilon(A(x_*^n, f^n), Q_m^1) = \inf_{x^n} \varepsilon(A(x^n, f^n), Q_m^1),$$

где $\varepsilon(A(z^n), f) = \varepsilon(A(z^n), f^n)$, K_n — класс всех пассивных алгоритмов. Алгоритм $A(z_*^n)$, на котором достигается $\varepsilon(K_n, Q_m^1)$, назовем оптимальным по точности пассивным алгоритмом.

2. Оптимальные по точности пассивные алгоритмы на классе Q_m^1. Пусть выполняются условия A:

* Под $I(\omega)$ будем понимать один из интегралов вида (1).

нули $\sin \omega x$ совпадают с $[|\omega|(b-a)/\pi]$ узлами x_ν алгоритма $A(x^n, f^n)$; $\sin \omega a = \sin \omega b = 0$*;
количество узлов интегрирования n удовлетворяет условию

$$(n - [|\omega|(b-a)/\pi])/([|\omega|(b-a)/\pi] - 1) = s, \tag{4}$$

где s — натуральное число или нуль. Определим явный вид $\Gamma^+(z^n)$ и $\Gamma^-(z^n)$ для класса Q_m^1. Для простоты будем рассматривать класс функций $\widetilde{Q}_m^1$. Пусть известны значения функции f в точках $x_0 = a$ и $x_{n+1} = b : f_0 = f(x_0), f_{n+1} = f(x_{n+1})$, а также номера отрезков, внутри которых находятся локальные экстремумы функции f. Введем обозначения

$$\Gamma_i^+(z^n) = \sup_{f \in Q^*} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \sin \omega x dx, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Рассмотрим произвольный отрезок $[x_{i-1}, x_i]$. Если внутри отрезка нет локальных экстремумов, то f монотонна на нем и, следовательно,

$$\Gamma_i^+(z^n) = \begin{cases} \max(f_{i-1}, f_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \omega x dx, & \text{если } \sin \omega x \geqslant 0 \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ \min(f_{i-1}, f_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \omega x dx, & \text{если } \sin \omega x \leqslant 0 \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{cases}$$

Если внутри отрезка есть локальный максимум, то

$$\Gamma_i^+(z^n) = \begin{cases} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \omega x dx, & \text{если } \sin \omega x \geqslant 0 \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ \min(f_{i-1}, f_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \omega x dx, & \text{если } \sin \omega x \leqslant 0 \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{cases}$$

Если внутри $[x_{i-1}, x_i]$ нет локальных максимумов, но есть локальный минимум, то f не превышает $\max(f_{i-1}, f_i)$ и

$$\Gamma_i^+(z^n) = \begin{cases} \max(f_{i-1}, f_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \omega x dx, & \text{если } \sin \omega x \leqslant 0 \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ 0, & \text{если } \sin \omega x \leqslant 0 \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{cases}$$

Заметим также, что информация о том, что f имеет локальный экстремум в одной из точек $x_1, \ldots, x_n$ не увеличивает $\Gamma^+(z^n)$.

Пусть f имеет локальный минимум в точке $x_0 = a$. Рассмотрим случай, когда $\sin \omega x \geqslant 0 \ \forall x \in [x_0, x_1]$. Если $f_0 \geqslant f_1$, то f имеет локальный максимум внутри отрезка $[x_0, x_1]$ и $\Gamma_1^+(z^n)$ не уменьшится, если положим $f_0 = 0$. Если $f_0 < f_1$, то $\Gamma_1^+(z^n)$ не зависит от f_0 и также можно положить $f_0 = 0$. Аналогично, если f имеет локальный максимум в точке $x_0 = a$, то $\Gamma_1^+(z^n)$ не уменьшится, если положить $f_0 = 1$. Аналогичное замечание справедливо и в случае, когда $\sin \omega x \leqslant 0 \ \forall x \in [x_0, x_1]$, а также и при $x = b$.

Перейдем теперь от класса $\widetilde{Q}_m^1$ к классу Q_m^1. Обозначим через $\widetilde{M}_k$ и $\underset{\sim}{M}_k$ множества из k номеров отрезков, в которых лежат соответственно локальные максимумы и минимумы функции f. Заметим, что множества $\widetilde{M}_k$ и $\underset{\sim}{M}_k$ не могут быть произвольными выборками из $\{1, 2, .., n+1\}$ из-за структуры рассматриваемого класса.

---

* Условия $\sin \omega a = 0$ и $\sin \omega b = 0$ не являются принципиальными. Теоремы 1 и 2 можно обобщить, если эти условия (или одно из них) не выполняются.

Используя приведенные выше рассуждения, получаем явную формулу для $I^+(z^n)$:

$$I^+(z^n) = \max_{f_0\in\{0,1\}}\Big\{ \sum_{\substack{i:1\leqslant i\leqslant n+1,\\ \sin\omega x\geqslant 0}} \max(f_{i-1}, f_i) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sin\omega x dx +$$

$$+ \sum_{\substack{i:1\leqslant i\leqslant n+1,\\ \sin\omega x\leqslant 0}} \min(f_{i-1}, f_i) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sin\omega x dx +$$

$$+ \max_{M\in\widetilde{M}\left[\frac{m+1-f_0}{2}\right]} \sum_{\substack{j\in M,\\ \sin\omega x\geqslant 0}} (1-\max(f_{j-1}, f_j)) \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \sin\omega x dx -$$

$$- \max_{M\in\underset{\sim}{M}\left[\frac{m+f_0}{2}\right]} \sum_{\substack{j\in M,\\ \sin\omega x\leqslant 0}} \min(f_{j-1}, f_j) \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \sin\omega x dx\Big\}. \tag{5}$$

Аналогично получается формула для $I^-(z^n)$:

$$I^-(z^n) = \min_{f_0\in\{0,1\}}\Big\{ \sum_{\substack{i:1\leqslant i\leqslant n+1,\\ \sin\omega x\geqslant 0}} \min(f_{i-1}, f_i) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sin\omega x dx +$$

$$+ \sum_{\substack{i:1\leqslant i\leqslant n+1,\\ \sin\omega x\leqslant 0}} \max(f_{i-1}, f_i) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sin\omega x dx +$$

$$+ \max_{M\in\widetilde{M}\left[\frac{m+1-f_0}{2}\right]} \sum_{\substack{j\in M,\\ \sin\omega x\leqslant 0}} (1-\max(f_{j-1}, f_j)) \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \sin\omega x dx -$$

$$- \max_{M\in\underset{\sim}{M}\left[\frac{m+f_0}{2}\right]} \sum_{\substack{j\in M,\\ \sin\omega x\geqslant 0}} \min(f_{j-1}, f_j) \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \sin\omega x dx\Big\}, \tag{6}$$

где $f_{n+1} = (1 + (-1)^{m+f_0})/2$. Формулы (2), (3), (5), (6) полностью определяют вид $A(z^n)$ и $\varepsilon(A(z^n), f)$.

Теорема 1. *Пусть $f(x)\in Q_m^1$ и выполняется условие А. Тогда при $n\geqslant m$ для погрешности вычисления интеграла $I_1(\omega)$ на классе пассивных алгоритмов справедлива оценка*

$$\varepsilon(K_n, Q_m^1) = (m+1)\int\limits_a^b |\sin\omega x|\, dx/(2n+2),$$

причем оптимальный по точности пассивный алгоритм $A(x_*^n, f_*^n)$ определяется из соотношений (2), (3), (5), (6), *где узлы интегрирования x_*^n задаются следующим образом:*

$$\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |\sin\omega x|\, dx = \int\limits_a^b |\sin\omega x|\, dx/(n+1), \quad i=\overline{1,n}\right) \tag{7}$$

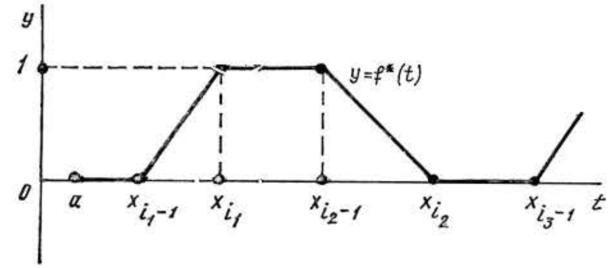
$$x_0 = a.$$

Доказательство. Покажем, что $\varepsilon(K_n, Q_m^1) \geqslant (m+1)\int\limits_a^b |\sin\omega x|\, dx/$

$/(2n+2)$. Пусть x^n — произвольные узлы интегрирования и $[x_{i_1-1}, x_{i_1}], \ldots, [x_{i_{m+1}-1}, x_{i_{m+1}}]$ — отрезки, на которых выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{m+1} \int\limits_{x_{i_j-1}}^{x_{i_j}} |\sin \omega x| \, dx \geqslant (m+1) \int\limits_a^b |\sin \omega x| \, dx/(n+1)$$

(например, $m+1$ отрезков, на которых величины $\int\limits_{x_{i_j-1}}^{x_{i_j}} |\sin \omega x| \, dx$, $j = \overline{1, m+1}$, наибольшие). Рассмотрим функцию (рисунок)



$$f^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a, x_{i_1-1}]; \\ (t - x_{i_j-1})/\Delta x_{i_j}, & t \in [x_{i_j-1}, x_{i_j}]; \quad j = 1, 3, \ldots, m+1; \\ 1, & t \in [x_{i_j}, x_{i_{j+1}-1}]; \\ (x_{i_{j+1}} - t)/\Delta x_{i_{j+1}}, & t \in [x_{i_{j+1}-1}, x_{i_{j+1}}]; \\ 0, & t \in [x_{i_{j+1}}, x_{i_{j+2}-1}]. \end{cases}$$

Очевидно, что $f^* \in Q_m^1$. При этом в соответствии с (2), (3), (5), (6) имеем

$$\varepsilon(A(x^n, f^n), Q_m^1) \geqslant \varepsilon(A(x^n, f^n), f^*) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m+1} \int\limits_{x_{i_j-1}}^{x_{i_j}} |\sin \omega x| \, dx \geqslant$$

$$\geqslant (m+1) \int\limits_a^b |\sin \omega x| \, dx/(2n+2).$$

В силу произвольности x^n имеем

$$\varepsilon(K_n, Q_m^1) \geqslant (m+1) \int\limits_a^b |\sin \omega x| \, dx/(2n+2).$$

Покажем, используя метод математической индукции, что

$$\varepsilon(A(x_*^n, f^n), Q_m^1) \leqslant (m+1) \int\limits_a^b |\sin \omega x| \, dx/(2n+2), \tag{8}$$

где $x_*^n = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ определяется соотношением (7). Рассмотрим класс функций $Q_k(c, d)$, определенных на $[c, d] \subset [a, b]$ и имеющих внутри $[c, d]$ ровно k локальных экстремумов. Кроме того, будем предполагать, что функции из $Q_k(c, d)$ в точке $x = c$ принимают значения $f_c = 0$ либо $f_c = 1$, а в точке $x = d$ равны $(1 + (-1)^{k+f_c})/2$. Неравенство (8) будет доказано, если удастся показать, что

$$\varepsilon(A(x_*^{i, i+l-1}, f), Q_k(x_{i-1}^*, x_{i+l}^*)) \leqslant (k+1) \int\limits_a^b |\sin \omega x| \, dx/(2n+2),$$

$$1 \leqslant i \leqslant i+l-1, \quad k \leqslant l, \tag{9}$$

где $x_*^{i,i+l-1} = (x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_{i+l-1}^*)$. В соответствии с работой [3] при $k = 0$ и $k = 1$ соответственно имеем

$$\varepsilon(A(x_*^{i,i+l-1}, f), Q_0(x_{i-1}^*, x_{i+l}^*)) = \int_a^b |\sin \omega x|\, dx/(2n+2),$$

$$\varepsilon(A(x_*^{i,i+l-1}, f), Q_1(x_{i-1}^*, x_{i+l}^*)) = \int_a^b |\sin \omega x|\, dx/(n+1),$$

$$1 \leqslant i \leqslant i + l - 1 \leqslant n.$$

Пусть неравенство (9) выполнено для $k = k^*$. Покажем, что оно справедливо и при $k = k^* + 1$ $(l \geqslant k^* + 1)$. Применим алгоритм $A(x_*^{i,i+l-1}, f)$ к любой функции f из $Q_{k^*+1}(x_{i-1}^*, x_{i+l}^*)$. Пусть получены значения $f_i = f(x_i^*), \dots, f_{i+l-1} = f(x_{i+l-1}^*)$ и для $f_{i-1} = f(x_{i-1}^*) = 0$ найдется номер j такой, что

$$\max(f_{j-1}, f_{j+1}) \leqslant f_j, \quad i \leqslant j \leqslant i + l - 1. \tag{10}$$

Это означает, что f имеет на $[x_{j-1}^*, x_{j+1}]$ локальный максимум. Ясно, что погрешность интегрирования на $[x_{j-1}^*, x_{j+1}^*]$ не уменьшится, если заменить f_j на 1, независимо от того, имеются ли в $[x_{j-1}^*, x_{j+1}^*]$ другие локальные экстремумы. Таким образом,

$$\forall f \in Q_{k^*+1}(x_{i-1}^*, x_{i+l}^*)$$

$$\varepsilon(A(x_*^{i,i+l-1}, f), f) \leqslant \max_{\substack{0 \leqslant k_1, k_2 \leqslant k^* \\ k_1 + k_2 = k^*}} \{\varepsilon(A(x_*^{i,j-1}, f),$$

$$Q_{k_1}(x_{i-1}^*, x_j^*)) + \varepsilon(A(x_*^{j+1,i+l-1}, f), Q_{k_2}(x_j^*, x_{i+l}^*))\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\substack{0 \leqslant k_1, k_2 \leqslant k^* \\ k_1 + k_2 = k^*}} \Big\{(k_1 + 1) \int_a^b |\sin \omega x|\, dx/(2n+2) +$$

$$+ (k_2 + 1) \int_a^b |\sin \omega x|\, dx/(2n+2)\Big\} = \frac{k^* + 1 + 1}{2n+2} \int_a^b |\sin \omega x|\, dx =$$

$$= (k+1) \int_a^b |\sin \omega x|\, dx/(2n+2).$$

Аналогично рассматривается случай, когда для $f_{i-1} = 0$ найдется номер j такой, что

$$\min(f_{j-1}, f_{j+1}) \geqslant f_j, \quad i \leqslant j \leqslant i + l - 1, \tag{11}$$

а также случаи для $f_{i-1} = 1$. Допустим, что, например, для $f_{i-1} = 0$ не нашлось такого номера j, что выполнено хотя бы одно из условий (10) или (11), т. е.

$$0 = f_{i-1} \leqslant f_i \leqslant \dots \leqslant f_{i+l-1} \leqslant f_{i+l} = 1$$

(такое возможно только для нечетного k). В этом случае, используя формулы (5), (6), получаем, что для $f_{i-1} = 1$ погрешность интегрирования не меньше, чем для $f_{i-1} = 0$, а при $f_{i-1} = 1$ выполняются неравенства (10) $(j = i)$ и (11) $(j = i + l + 1)$, т. е. справедливо соотношение

$$\varepsilon(A(x_*^{i,i+l-1}, f), f) \leqslant (k+1) \int_a^b |\sin \omega x|\, dx/(2n+2).$$

В силу того, что $f(x)$ — произвольная функция класса, следует справедливость неравенства (9). Тогда

$$\varepsilon(K_n, Q_m^1) = \varepsilon(K_n, \widetilde{Q}_m^1) \leqslant \varepsilon(A(x_*^n, f), \widetilde{Q}_m^1) \leqslant (m+1)\int_a^b |\sin\omega x|\,dx/(2n+2).$$

Следовательно, $\varepsilon(K_n, Q_m^1) = (m+1)\int_a^b |\sin\omega x|\,dx/(2n+2)$, причем алгоритм $A(x_*^n, f^n)$ является оптимальным по точности пассивным на классе Q_m^1. Теорема доказана.

Теорема. 2. *Пусть $f(x) \in Q_m^1$ и выполняется условие А. Тогда при $n \leqslant m$ для погрешности вычисления интеграла $I_1(\omega)$ на классе пассивных алгоритмов справедлива оценка*

$$\varepsilon(K_n, Q_m^1) \geqslant \int_a^b |\sin\omega x|\,dx/2.$$

Доказательство. Пусть x^n — произвольная сетка узлов интегрирования. Рассмотрим функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $x \in [a, b]$:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = x_i, \ i \in \{0, 2, 4, \ldots\} \cap \{1, 2, \ldots, n+1\}; \\ 1 \text{ — в остальных точках;} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = x_i, \ i \in \{1, 3, 5, \ldots\} \cap \{1, 2, \ldots, n+1\}; \\ 0 \text{ — в остальных точках.} \end{cases}$$

Ясно, что $f_1, f_2 \in Q_n^1$, $f_1(x_i) = f_2(x_i)$, $i = \overline{1, n}$. Поскольку $[Q_n^1] \subset [Q_m^1]$ при $n \leqslant m$, получаем

$$\varepsilon(A(x^n, f^n), Q_m^1) \geqslant \varepsilon(A(x^n, f^n), Q_n^1) \geqslant \varepsilon(A(x^n, f^n), f_1) = \varepsilon(A(x^n, f^n), f_2) =$$

$$= \int_a^b |\sin\omega x|\,dx/2.$$

Из произвольности x^n следует справедливость теоремы 2.

Замечание. Аналогичные теоремы справедливы для интеграла $I_2(\omega)$.

1. *Задирака В. К.* Теория вычисления преобразования Фурье.— Киев: Наук. думка, 1983.— 216 с.
2. *Корчанов С. В.* Об оптимальных алгоритмах интегрирования функций, имеющих известное количество экстремумов // Програмное обеспечение и модели исследования операции.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986.— С. 177—185.
3. *Абатов Н. Т.* Оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов от некоторых быстроосциллирующих функций.— Киев, 1989.— 22 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 5728.
4. *Бахвалов Н. С.* Численные методы.— М. : Наука, 1973.— 632 с.
5. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
6. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов.— М. : Мир, 1983.— 382 с.

Получено 17.11.89