УДК 517.938

В. Л. Кулик

О существовании знакопеременных функций Ляпунова для линейных расширений динамических систем на торе

Рассматривается вопрос о существовании квадратичных форм, которые имеют положительно определенную производную вдоль решений линейных расширений динамических систем на торе. Предполагая, что существуют квадратичные формы, производная которых является положительно определенной только по некоторой части переменных, найдены условия, при которых уже существует квадратичная форма с положительно определенной по всех переменных производной.

Розглядається питання про існування квадратичних форм, які мають додатно визначену похідну вздовж розв'язків лінійних розширень динамічних систем на торі. Припускаючи, що існують квадратичні форми, похідна яких є додатно визначеною тільки по деякій частині змінних, знайдені умови, за яких уже існує квадратична форма з додатно визначеною по всіх змінних похідною.

Одной из важных проблем теории нелинейных многочастотных колебаний [1, 2] является нахождение коэффициентного критерия существования квадратичных форм (функций Ляпунова), имеющих знакоопределенную производную в силу системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt}\; a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt}\; A(\varphi)\, x, \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$, $x \in R^n$, $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $A(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, т. е. определение условий для вектор-функции $a(\varphi)$ и матричной функции $A(\varphi)$ существования квадратичной формы $V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)\, x, x\rangle$, $S^*(\varphi) \equiv S(\varphi) \in$ $\in C'(\mathcal{T}_m; a)$ такой, что

$$\dot V(\varphi, x) = \langle [\dot S(\varphi) + S(\varphi)\, A(\varphi) + A^*(\varphi)\, S(\varphi)]\, x, x\rangle \geqslant \| x \|^2 \tag{2}$$

при всех $x \in R^n$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$. При этом на саму форму $V(\varphi, x)$ условия знакопостоянства не налагаются, она может изменять знак при изменениях $x \in R^n$, более того, матрица $S(\varphi)$ при некоторых значениях $\varphi \in \mathcal{T}_m$ может вырождаться [3, 4].

Предположим, что существует некоторая квадратичная форма $v(\varphi, x)$ такая, что производная ее в силу системы (1) удовлетворяет неравенству $\dot v(\varphi, x) \geqslant \| x_1 \|^2$, где x_1 — некоторая часть переменных x. Возникает вопрос: при каких дополнительных условиях существует другая квадратичная форма $V(\varphi, x)$, производная которой удовлетворяет неравенству (2)? Рассмотрению этого вопроса посвящена настоящая статья.

Теорема 1. *Пусть существуют две $n \times n$-мерные симметричные матрицы $S_1(\varphi)$, $S_2(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$, удовлетворяющие условиям*

$$\langle [\dot S_1(\varphi) + S_1(\varphi)\, A(\varphi) + A^*(\varphi)\, S_1(\varphi)]\, x, x\rangle \geqslant \| P_1(\varphi)\, x \|^2, \tag{3}$$

$$\langle [\dot S_2(\varphi) + S_2(\varphi)\, A(\varphi) + A^*(\varphi)\, S_2(\varphi)]\, P_2(\varphi)\, x,\ P_2(\varphi)\, x\rangle \geqslant \| P_2(\varphi)\, x \|^2, \tag{4}$$

где $P_i(\varphi)$ — некоторые непрерывные матрицы ($P_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$), удовлетворяющие тождеству

$$P_1(\varphi) + P_2(\varphi) \equiv I_n \tag{5}$$

при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, I_n — n-мерная единичная матрица. Тогда производная квадратичной формы в силу системы (1)

$$V_\lambda(\varphi, x) = \lambda \langle S_1(\varphi)\, x, x\rangle + \langle S_2(\varphi)\, x, x\rangle \tag{6}$$

при достаточно больших значениях параметра $\lambda > 0$ положительно определена.

Доказательство. Записывая производную квадратичной формы (6) в силу системы (1) и учитывая неравенство (3), получаем

$$\dot V_\lambda(\varphi, x) = \lambda \overset{\cdot}{\widehat{\langle S_1(\varphi)\, x, x\rangle}} + \overset{\cdot}{\widehat{\langle S_2(\varphi)\, x, x\rangle}} \geqslant \lambda \| P_1(\varphi)\, x \|^2 + \langle W(\varphi)\, x, x\rangle, \tag{7}$$

где

$$W(\varphi) = \dot S_2(\varphi) + S_2(\varphi)\, A(\varphi) + A^*(\varphi)\, S_2(\varphi). \tag{8}$$

К правой части неравенства (7) прибавим и отнимем выражение $\langle W(\varphi)\, P_2(\varphi)\, x,$ $P_2(\varphi)\, x\rangle$:

$$\dot V_\lambda(\varphi, x) \geqslant \lambda \| P_1(\varphi)\, x \|^2 + \langle W(\varphi)\, P_2(\varphi)\, x,\ P_2(\varphi)\, x\rangle + \\ + \langle [W(\varphi) - P_2^*(\varphi)\, W(\varphi)\, P_2(\varphi)]\, x, x\rangle. \tag{9}$$

Оценивая третье слагаемое в правой части неравенства (9), приходим к следующему:

$$|\langle [W(\varphi) - P_2^*(\varphi)\, W(\varphi)\, P_2(\varphi)]\, x, x\rangle| = |\langle [(P_1^*(\varphi) + P_2^*(\varphi))\, W(\varphi) \times$$

$$\times (P_1(\varphi) + P_2(\varphi)) - P_2^*(\varphi) W(\varphi) P_2(\varphi)]\, x,\, x\rangle | \leqslant | \langle W(\varphi) P_1(\varphi) x,\ P_1(\varphi) x\rangle | +$$
$$+ | \langle W(\varphi) P_2(\varphi) x,\ P_1(\varphi) x\rangle | + | \langle W(\varphi) P_1(\varphi) x,\ P_2(\varphi) x\rangle | \leqslant$$
$$\leqslant K \| P_1(\varphi) x\|^2 + 2K \| P_1(\varphi) x\| \, \| P_2(\varphi) x\| , \tag{10}$$

где норма матрицы (8) обозначена $K = \max\limits_{\varphi} \| W(\varphi)\|$. Учитывая условие (4) и полученную оценку (10), правую часть неравенства (9) запишем следующим образом:

$$\dot{V}_\lambda(\varphi, x) \geqslant (\lambda - K) \| P_1(\varphi) x\|^2 - 2K \| P_1(\varphi) x\| \, \| P_2(\varphi) x\| + \| P_2(\varphi) x\|^2. \tag{11}$$

Рассмотрим квадратичную форму $(\lambda - K) t_1^2 - 2K t_1 t_2 + t_2^2 = \psi(t_1, t_2)$ и оценим ее снизу на единичной окружности $t_1 = \cos t$, $t_2 = \sin t$; имеем

$$\psi(\cos t,\ \sin t) = \frac{\lambda - K - 1}{2} \cos 2t - K \sin 2t + \frac{\lambda - K + 1}{2} \geqslant$$
$$\geqslant - \sqrt{\left(\frac{\lambda - K - 1}{2}\right)^2 + K^2} + \frac{\lambda - K + 1}{2} \geqslant$$
$$\geqslant (\lambda - K^2 - K)(\lambda - K + 1)^{-1} = \beta(\lambda) > 0 \tag{12}$$

при выполнении условия

$$\lambda > K^2 + K. \tag{13}$$

Поэтому из неравенства (11) следует

$$\dot{V}_\lambda(\varphi, x) \geqslant \beta(\lambda) (\| P_1(\varphi) x\|^2 + \| P_2(\varphi) x\|^2) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\beta(\lambda)}{2} \| (P_1(\varphi) + P_2(\varphi)) x\|^2 = \frac{\beta(\lambda)}{2} \| x\|^2 ,$$

где $\beta(\lambda)$ определено в (12). Таким образом, при выполнении неравенства (13) производная квадратичной формы (6) в силу системы (1) положительно определена, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Если при выполнении условий теоремы 1 в неравенстве (3) матрица $S_1(\varphi)$ не вырождена при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, то квадратичная форма (6) будет невырожденной при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, а, значит, система (1) будет регулярной, т. е. будет обладать единственной функцией Грина для задачи об инвариантных торах [1, с. 120].

Запишем систему уравнений (1) в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx_1}{dt} = A_{11}(\varphi) x_1 + A_{12}(\varphi) x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = A_{21}(\varphi) x_1 + A_{22}(\varphi) x_2, \tag{1'}$$

где $x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \in R^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$ и не обязательно $n_1 = n_2$. Имеет место следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1.

С л е д с т в и е. *Пусть существует квадратичная форма* $v_1(\varphi, x_1, x_2) = \langle S_1(\varphi) x, x\rangle$, *производная которой в силу системы* (1′) *удовлетворяет неравенству* $\dot{v}_1(\varphi, x_1, x_2) \geqslant \| x_1\|^2$, *и, кроме того, существует квадратичная форма от переменных* x_2: $v_2(\varphi, x_2) = \langle S_2(\varphi) x_2, x_2\rangle$, *производная которой в силу системы* $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $dx_2/dt = A_{22}(\varphi) x_2$ *положительно определена* $\dot{v}_2(\varphi, x_2) \geqslant \| x_2\|^2$. *Тогда в силу системы* (1) *производная квадратичной формы* $V_\lambda(\varphi, x) = \lambda v_1(\varphi, x_1, x_2) + v_2(\varphi, x_2)$ *при достаточно больших фиксированных значениях параметра* $\lambda > 0$ *положительно определена.*

Действительно, условие (3) выполняется при $P_1(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{I_{n_1}, 0\}$, а условие (4) при $S_2(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{0, S_{22}(\varphi)\}$ и $P_2(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{0, I_{n_2}\}$. Справедлива следующая теорема

Теорема 2. *Пусть существует k симметричных $n \times n$-мерных матриц $S_i(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$, $i = \overline{1, k}$, удовлетворяющих условиям*

$$\langle [\dot{S}_i(\varphi) + S_i(\varphi) A(\varphi) + A^*(\varphi) S_i(\varphi)] x, x \rangle \geqslant \| P_i(\varphi) x \|^2, \tag{14}$$

где $P_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $i = \overline{1, k}$, — некоторые матрицы такие, что

$$\det \Big(\sum_{i=1}^{k} P_i(\varphi) \Big) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{15}$$

Тогда в силу системы (1) *производная квадратичной формы*

$$V(\varphi, x) = \sum_{i=1}^{k} \langle S_i(\varphi) x, x \rangle \tag{16}$$

положительно определена. При этом если хотя бы одна из матриц $S_{i_0}(\varphi)$ не выраждена при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, то и квадратичная форма (16) *не вырождена при всех $\varphi \in \mathcal{T}_m$, т. е.* $\det \Big(\sum_{i=1}^{k} S_i(\varphi) \Big) \neq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m$.

Доказательство. Производную квадратичной формы (16) с учетом неравенств (14) оценим следующим образом:

$$\dot{V}(\varphi, x) = \sum_{i=1}^{k} \dot{\overbrace{\langle S_i(\varphi) x, x \rangle}} \geqslant \sum_{i=1}^{k} \| P_i(\varphi) x \|^2.$$

Используя далее неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$\sum_{i=1}^{k} \| P_i(\varphi) x \|^2 \geqslant k^{-1} \Big(\sum_{i=1}^{k} \| P_i(\varphi) x \| \Big)^2 \geqslant k^{-1} \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{k} P_i(\varphi) \Big) x \Big\|^2 \geqslant \beta \| x \|^2,$$

где

$$\beta = k^{-1} \Big[\max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \Big\| \Big(\sum_{i=1}^{k} P_i(\varphi) \Big)^{-1} \Big\| \Big]^{-2} > 0.$$

Следовательно,

$$\dot{V}(\varphi, x) \geqslant \beta \| x \|^2. \tag{17}$$

Теперь предположим, что

$$\det S_{i_0}(\varphi) \neq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{18}$$

Рассмотрим квадратичную форму с параметром $\lambda > 0$:

$$V_\lambda(\varphi, x) = \lambda \langle S_{i_0}(\varphi) x, x \rangle + V(\varphi, x). \tag{19}$$

В силу системы (1) для производной $\dot{V}_\lambda(\varphi, x)$ выполняются неравенства

$$\dot{V}_\lambda(\varphi, x) = \lambda \dot{\overbrace{\langle S_{i_0}(\varphi) x, x \rangle}} + \dot{V}(\varphi, x) \geqslant \lambda \| P_{i_0}(\varphi) x \|^2 + \beta \| x \|^2 \geqslant \beta \| x \|^2. \tag{20}$$

Таким образом, с одной стороны получаем, что производная квадратичной формы (19) при любых значениях $\lambda > 0$ является положительно определенной, а с другой стороны с учетом условия (18) при достаточно больших значениях $\lambda > 0$ имеем

$$\det \Big[\lambda S_{i_0}(\varphi) + \sum_{i=1}^{k} S_i(\varphi) \Big] \neq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m.$$

Следовательно, все квадратичные формы, имеющие знакоопределенную производную, в силу системы (1) будут невырожденными, в частности, и форма (16), т. е. $\det\left(\sum_{i=1}^{k} S_i(\varphi)\right) \neq 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{T}_m$.

В заключение рассмотрим следующий пример (используется теорема 1):

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \sin \varphi_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \varphi_2,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = (\cos\varphi_1 - \sin\varphi_2 - 1)\, x_1 + (\cos\varphi_1 - \sin\varphi_2)\, x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (1 - \sin\varphi_2)\, x_1 - (\cos\varphi_1)\, x_2 + (\sin\varphi_2 - \cos\varphi_1)\, x_3, \tag{21}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = (1 + \sin\varphi_2) x_1 + (\sin\varphi_2)\, x_3.$$

Убеждаемся, что производная квадратичной формы $v_1 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ в силу системы (21) равна $2x_1^2$. Теперь рассмотрим следующую подсистему:

$$dx_2/dt = -(\cos\varphi_1)\, x_2 + (\sin\varphi_2 - \cos\varphi_1)\, x_3, \tag{22}$$
$$dx_3/dt = (\sin\varphi_2)\, x_3.$$

Легко установить, что производная квадратичной формы $v_2 = -(\cos\varphi_1)x_2^2 + 5(\sin\varphi_2)\, x_3^2$ в силу подсистемы (22) удовлетворяет неравенству

$$\dot{v}_2 = [\sin^2\varphi_1 + 2\cos^2\varphi_1]\, x_2^2 - 2\cos\varphi_1(\sin\varphi_2 - \cos\varphi_1)\, x_2x_3 +$$
$$+ 5[\cos^2\varphi_2 + 2\sin^2\varphi_2]\, x_2^2 \geqslant x_2^2 - 4|x_2||x_3| + 5x_3^2 \geqslant (3 - \sqrt{8})(x_2^2 + x_3^2).$$

Таким образом, по теореме 1 производная квадратичной формы

$$V_\lambda = \lambda(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - (\cos\varphi_1)\, x_2^2 + 5(\sin\varphi_2)\, x_3^2$$

в силу системы уравнений (21) положительно определена при достаточно больших значениях параметра $\lambda > 0$. Следовательно, система (21) является регулярной, т. е. имеет единственную функцию Грина для задач об инвариантных торах.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний.— М.: Наука, 1987.— 304 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 5.— С. 776—787.
3. *Бронштейн И. У.* Линейные расширения и функции Ляпунова // Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук.— 1983.— № 3.— С. 16—20.
4. *Кулик В. Л.* Регулярность систем линейных дифференциальных уравнений блочно-треугольного вида // Мат. заметки.— 1986.— **40**, № 4.— С. 484—491.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 20.03.90