УДК 519.21

*Д. Алимов, В. М. Шуренков*

## Асимптотическое поведение обрывающихся марковских процессов, близких к эргодическому

Сформулировано несколько утверждений об асимптотическом поведении обрывающихся марковских процессов, близких к эргодическому.

Сформульовано декілька тверджень про асимптотичну поведінку марківських процесів, що обриваються, близьких до ергодичного.

Пусть $X(t)$ — однородный эргодический марковский процесс со значениями в фазовом пространстве $(E, \mathcal{A})$ со счетно-порожденной $\sigma$-алгеброй $\mathcal{A}$. Эргодичность процесса $X(t)$ по определению означает, что при любом его начальном распределении и для любой $\mathcal{A}$-измеримой ограниченной функции $f$ с вероятностью единица существует неслучайный предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s))\, ds,$$

который при этом необходимо имеет вид $\int_E \pi(dy) f(y)$, где $\pi(dy)$ — так называемое инвариантное распределение вероятностей.

Обозначим через $P(t, x, A)$ переходную вероятность процесса $X(\cdot)$ за время $t \geqslant 0$ из состояния $x \in E$ в множество $A \in \mathcal{A}$. Как показано в [1], эргодичность процесса $X(t)$ эквивалентна условию

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P(s, x, A)\, ds = \pi(A), \quad x \in E, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Рассмотрим последовательность обрывающихся марковских процессов $X_n(t)$, $t < \zeta_n$ с переходными вероятностями $P_n(t, x, A)$, удовлетворяющими условиям

$$P_n(t, x, A) \leqslant P(t, x, A), \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(t, x, A) = P(t, x, A) \tag{3}$$

для всех $t \geqslant 0$, $x \in E$, $A \in \mathcal{A}$.

На основании (2), (3), не ограничивая общности, можно считать, что $X_n(t) = X(t)$ при $0 \leqslant t < \zeta_n$, и $\zeta_n \uparrow \infty$ $\mathbf{P}_x$-п. н.

Целью предлагаемой статьи является исследование предельного поведения переходной вероятности $P_n(t, x, A)$ при $n, t \to \infty$. При этом используем результаты работы [2]. В идейном плане данное исследование соответствует работе [1]. Расширение объекта исследования до класса обрывающихся (но при этом долго живущих) марковских процессов стало возможным за счет проведенной в работе [2] реконструкции аналитического аппарата — теорем марковского восстановления.

Сначала для сравнения приведем из [1] описание предельного поведения $P(t, x, A)$ при $t \to \infty$ в непериодическом случае. Для простоты формулировок будем считать фазовое пространство $(E, \mathcal{A})$ борелевским, а процесс $X(t)$ стохастически непрерывным. По поводу терминологии см. [1].

Теорема 1. *Если процесс $X(t)$ непериодичен, то*

$$\lim_{t\to\infty}\int_E P(t, x, dy)f(y) = \int_E \pi(dy)f(y)$$

*для всех $x\in E$ и всех непрерывных ограниченных функций $f$; и если процесс $X(t)$ регулярен, то*

$$\lim_{t\to\infty} P(t, x, A) = \pi(A)$$

*для всех $x\in E$ равномерно по $A\in\mathcal{A}$.*

Так же, как данная теорема вытекает из теорем восстановления первой главы [1], так из теорем восстановления работы [2] вытекает следующее утверждение. При его формулировке, следуя [2], будем использовать запись $\lim\limits_{t\varepsilon_n\to c}\ldots$ или $\ldots\xrightarrow[t\varepsilon_n\to c]{}\ldots$, имея в виду, что данное предельное соотношение выполняется для всех последовательностей $t_n\to\infty$ таких, что $t_n\varepsilon_n\xrightarrow[n\to\infty]{} c$.

Теорема 2. *В условиях (1)—(3) существует последовательность $\varepsilon_n\to 0$, $\varepsilon_n>0$, такая, что*

1) *если процесс $X(t)$ непериодичен, то*

$$\lim_{t\varepsilon_n\to c}\int_E P_n(t, x, dy)f(y) = e^{-c}\int_E \pi(dy)f(y)$$

*для всех $x\in E$ и всех непрерывных ограниченных функций $f$;*

2) *если процесс $X(t)$ регулярен, то*

$$\lim_{t\varepsilon_n\to c} P_n(t, x, A) = e^{-c}\pi(A)$$

*для всех $x\in E$ равномерно по $A\in\mathcal{A}$.*

Полагая здесь $f=1$ и $A=E$, получаем такое следствие.

Следствие 1. *В условиях теоремы 2*

$$\lim_{t\varepsilon_n\to c} P_n(t, x, E) = e^{-c}$$

*для всех $x\in E$.*

Рассмотрим теперь частный случай, когда

$$P_n(t, x, A) = \mathbf{P}_x\{e^{-\int_0^t v_n(X(s))ds}, X(t)\in A\},$$

где последовательность $\mathcal{A}$-измеримых функций $v_n(x)$ такова, что

$$v_n(x)\geqslant v_{n+1}(x),\quad \lim_{n\to\infty} v_n(x) = 0,$$

и

$$\int_E \pi(dy)\,v_n(y)<\infty. \tag{4}$$

При таком выборе $P_n(t, x, A)$ условия (2), (3) выполнены очевидным образом и справедливо такое следствие.

Следствие 2. *Пусть процесс $X(t)$ эргодичен и непериодичен. Тогда в условиях (4) существует последовательность $\varepsilon_n\downarrow 0$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_x e^{-\int_0^{t/\varepsilon_n} v_n(X(s))ds} = e^{-t}$$

*для всех $x\in E$.*

Выясним теперь асимптотику $\varepsilon_n$.

Из результатов работы [2] следует, что существует множество $D \in \mathcal{A}$ с $\pi(D) > 0$ и момент марковского вмешательства $\tau(D)$ такой, что

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau(D)) \in A\} = \pi_D(A), \quad x \in E, \quad A \in \mathcal{A},$$

$$\varepsilon_n \sim \frac{1}{\mathbf{P}_{\pi_D}\tau(D)} \mathbf{P}_{\pi_D}[1 - e^{-\int_0^{\tau(D)} v_n(X(s))ds}], \tag{5}$$

где, как и в [1], $\pi_D(A) = \pi(AD)/\pi(D)$.

Правую часть в (5) нетрудно привести к виду

$$\delta_n\{1 + \int_E \pi(dx) h_n(x) g_n(x)\}, \tag{6}$$

где

$$\delta_n = \int_E \pi(dx) v_n(x), \quad h_n(x) = v_n(x)/\int_E \pi(dx) v_n(x),$$

$$g_n(x) = \mathbf{P}_x[1 - e^{-\int_0^{\tau(D)} v_n(X(s))ds}].$$

Ясно, что $1 \geqslant g_n(x) \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Поэтому равномерная $\pi$-интегрируемость последовательности функций $h_n(x)$ обеспечивает стремление к нулю второго слагаемого в фигурных скобках в (6).

Таким образом, если

$$\sup_n \int_{\{h_n > c\}} h_n(x)\pi(dx) \xrightarrow[c\to\infty]{} 0, \tag{7}$$

то

$$\varepsilon_n \sim \delta_n. \tag{8}$$

Из (8) и следствия 2 очевидным образом следует

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_x e^{-\lambda \int_0^{t/\delta_n} v_n(X(s))ds} = e^{-\lambda t}$$

для всех $x \in E$. Иными словами, имеет место следующее утверждение типа закона больших чисел.

Следствие 3. *Пусть процесс $X(t)$ эргодичен и непериодичен. Тогда в условиях* (4), (7) *конечномерные распределения случайных процессов*

$$\xi_n(t) = \int_0^{t/\delta_n} v_n(X(s))\, ds$$

*слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(t) = t$.*


1. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова.— М. : Наука, 1989.— 333 с.
2. *Алимов Д., Шуренков В. М.* Теоремы марковского восстановления в схеме серий // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 11.— С. 1443—1448.


Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 21.02.90