УДК 517.5

Н. В. Зорий

Одна точная оценка 2-емкости конденсатора

Для достаточно широкого класса конденсаторов E (включающего в себя, в частности, все пространственные кольца) получены точные нижние оценки их 2-емкостей через ньютоновы емкости некоторых множеств, ассоциированных с E. Полностью описан класс конденсаторов, на которых в полученных оценках достигается знак равенства.

Для достатньо широкого класу конденсаторів E (що містить у собі, зокрема, всі просторові кільця) одержані точні нижні оцінки їх 2-ємностей через ньютонові ємності деяких множин, асоційованих з E. Повністю описаний клас конденсаторів, на яких в одержаних оцінках досягається знак рівності.

1. Пару $E = (E^+, E^-)$ непустых замкнутых отделимых множеств E^+, E^- из евклидова пространства $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 3$, одно из которых ограничено, назовем конденсатором. Пусть $\operatorname{cap} E$ — 2-емкость конденсатора E [1], определяемая как точная нижняя грань чисел $\int\limits_{\mathbb{R}^p} |\operatorname{grad} f(x)|^2 dx$, где f пробегает множество всех вещественнозначных функций в $\mathbb{R}^p$, которые непрерывны в $\overline{\mathbb{R}}^p := \mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$, абсолютно непрерывны на линиях в $\mathbb{R}^p$ и принимают значения 1 и 0 соответственно на E^+ и E^-.

Для достаточно широкого класса конденсаторов (включающего в себя, в частности, все пространственные кольца [1]) в работе получены точные нижние оценки $\operatorname{cap} E$ через ньютоновы емкости некоторых множеств, ассоциированных с E. Полностью описан класс конденсаторов, на которых в полученных оценках достигается знак равенства.

Для множества $Q \subset \mathbb{R}^p$ обозначим через ∂Q и CQ соответственно границу Q (в $\mathbb{R}^p$) и дополнение Q до $\mathbb{R}^p$.

2. Пусть, для определенности, E^+ — компакт. Естественно предположить, что множество E^+ имеет ненулевую ньютонову емкость: $C_2(E^+) > 0$, так как в противном случае было бы $\operatorname{cap} E = 0$.

Для замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^p$ обозначим через $\check{F}$ его приведенное ядро [2]. Открытое множество $C\check{E}^-$ состоит из конечного или счетного числа областей Z_i, $i \in I \subset \mathbb{N}$. Пусть I_+ — совокупность всех тех $i \in I$, для которых множества $Z_i \cap \check{E}^+$ непусты. Положим $Z_+ := \bigcup_{i \in I_+} Z_i$. Всюду далее, где не оговорено противное, будем считать множество CZ_+ неограниченным.

Легко видеть (пользуясь, например, результатами работы [3]), что

$$\operatorname{cap} E > (p-2)\,\omega_p C_2(E^+), \tag{1}$$

где ω_p — $(p-1)$-мерная лебегова мера сферы $|x| = 1$. Наша цель — при дополнительном предположении

$$C_2(Z_+) < \infty \tag{2}$$

уточнить оценку (1).

В частности, условие (2) выполняется для всякого кольца, т. е. конденсатора E, у которого E^+ и E^- — соответственно ограниченная и неограниченная компоненты дополнения некоторой двухсвязной ограниченной области до $\mathbb{R}^p$. В общем случае мы не требуем компактности граничного множества ∂Z_+, как и связности «зазора» $C(E^+ \cup E^-)$ конденсатора E.

Пусть Ω — неограниченная компонента связности множества $C\check{E}^+$, γ_{E^+} — равновесная мера множества E^+ [2], а $u(x) := U_2^{\gamma_{E^+}}(x)$ — ее ньютонов потенциал. Совокупность эквипотенциальных множеств $\{x \in \Omega : u(x) = c\}$ гармонической в Ω функции $u(x)$ обозначим через Γ. Элементы из Γ — замкнутые ограниченные множества.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\operatorname{cap} E \geqslant \frac{(p-2)\,\omega_p C_2(Z_+)\, C_2(E^+)}{C_2(Z_+) - C_2(E^+)}, \tag{3}$$

причем знак равенства в (3) *верен в том и только в том случае, когда* $\partial Z_+ \in \Gamma$.

В частности, для сферического кольца $E_0 = (E_0^+, E_0^-)$ с $E_0^+ = \{x : |x| \leqslant a\}$ и $E_0^- = \{x : |x| \geqslant b\}$, $0 < a < b < \infty$, из теоремы 1 получаем хорошо известное равенство [1]

$$\operatorname{cap} E_0 = \frac{(p-2)\,\omega_p}{a^{2-p} - b^{2-p}}. \tag{4}$$

Следствие 1. *Пусть конденсатор E и сферическое кольцо E_0 связаны условиями $C_2(E^+) = C_2(E_0^+)$ $(= a^{p-2})$, $C_2(Z_+) = C_2(\partial E_0^-)$ $(= b^{p-2})$. Тогда*

$$\operatorname{cap} E \geqslant \operatorname{cap} E_0. \tag{5}$$

Неравенство (5) следует из соотношений (3) и (4). Аналогичное к следствию 1 утверждение, в котором инвариантными предполагаются не емкости соответствующих множеств, а их лебеговы меры, приведено в [1].

3. Запишем оценку (3) в некоторой равносильной форме. Для этого нам понадобятся следующие понятия теории потенциала [2].

Для замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^p$ обозначим через $\mathfrak{M}^1(F)$ совокупность всех единичных мер μ с носителями $S(\mu) \subset F$. Если $C_2(F) \in (0, \infty)$, положим $W_2(F) := 1/C_2(F)$. (В случае компактного множества F число $W_2(F)$ называют постоянной Робэна для F). Тогда

$$\mathcal{J}_2(\omega_F) = W_2(F) < \mathcal{J}_2(\mu) \quad \forall \mu \in \mathfrak{M}^1(F), \quad \mu \neq \omega_F, \tag{6}$$

где $\omega_F := \gamma_F / C_2(F)$ $(\in \mathfrak{M}^1(F))$, а $\mathcal{J}_2(\cdot)$ — функционал ньютоновой энергии. Известно, что ω_F — единственная мера из класса $\mathfrak{M}^1(F)$, ньютонов потенциал которой постоянен квазивсюду на F.

Пусть $E = (E^+, E^-)$ — произвольный конденсатор, $\mathfrak{N}^1(E)$ — класс всех зарядов $\nu = \nu^+ - \nu^-$, у которых $\nu^+ \in \mathfrak{M}^1(E^+)$, $\nu^- \in \mathfrak{M}^1(E^-)$, а $V_2(E)$ — экстремальная характеристика E, определенная равенством

$$V_2(E) = \inf_{\nu \in \mathfrak{N}^1(E)} \mathcal{J}_2(\nu).$$

Как показано в работе [3], для всякого E, удовлетворяющего условию а) $\check{E}^-$ — компакт, либо б) $C_2(CZ_+) = \infty$ (и, в частности, для E, удовлетворяющего (2)), верно равенство

$$\operatorname{cap} E = (p-2)\,\omega_p / V_2(E). \tag{7}$$

З а м е ч а н и е. В этой же работе показано, что для E с неограниченным множеством $\check{E}^-$, удовлетворяющего условию $C_2(CZ_+) < \infty$, верно соотношение $\operatorname{cap} E > (p-2)\,\omega_p / V_2(E)$. Отсутствие представления (7) для произвольного E является спецификой пространственного случая и обусловлено различным поведением характеристик $\operatorname{cap} E$ и $V_2(E)$ при аппроксимациях E извне (или изнутри) зазора [3]. В частности, при аппроксимации, используемой в [4, с. 773] (аппроксимация извне зазора), характеристика $\operatorname{cap} E$, вообще говоря, не непрерывна [3]. В работе [4] это обстоятельство не учтено, вследствие чего в ней сделано частью необоснованное, а частью ошибочное утверждение о справедливости (7) для произвольного E. Заметим также, что основная часть работы [4] повторяет результаты из [5].

Пусть E — конденсатор, удовлетворяющий условию (2). Пользуясь (7), запишем оценку (3) в следующей равносильной форме:

$$V_2(E) \leqslant W_2(E^+) - W_2(Z_+). \tag{3'}$$

Легко видеть, что оценка (3′) уточняет соответствующие оценки величины $V_2(E)$, приведенные в [4, 6]. Заметим также, что утверждение теоремы 1 о знаке равенства в (3) (а следовательно, и в (3′)) дает ответ на вопрос, поставленный в [4, с. 754].

4. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Пусть $\omega := \omega_{E^+}$, ω' — мера, являющаяся решением ньютоновой задачи выметания меры ω на множество CZ_+ в классе зарядов, тождественно равных нулю на множестве иррегулярных точек из ∂Z_+ [2]. Тогда

$$U_2^{\omega'}(x) = U_2^{\omega}(x) \text{ квазивсюду на } CZ_+, \tag{8}$$

$$S(\omega') \subset \partial Z_+. \tag{9}$$

Из условия (2) следует, что множество CZ_+ не разрежено на бесконечности (см., например, [6]), а поэтому верно равенство [6] $\omega'(\mathbb{R}^p) = 1$. Учитывая (9), имеем

$$\omega' \in \mathfrak{M}^1(\partial Z_+), \tag{10}$$

$$\nu := \omega - \omega' \in \mathfrak{N}^1(E). \tag{11}$$

Отсюда с учетом (6) и равенства $\mathcal{J}_2(\omega - \omega') = \mathcal{J}_2(\omega) - \mathcal{J}_2(\omega')$ [2] получаем

$$V_2(E) \leqslant \mathcal{J}_2(\nu) = W_2(E^+) - \mathcal{J}_2(\omega') \leqslant W_2(E^+) - W_2(\partial Z_+). \tag{12}$$

Из цепочки соотношений (12) находим оценку (3′) (ибо в силу условия (2) верно $W_2(Z_+) = W_2(\partial Z_+)$ [2]) и следующее утверждение: знак равенства в (3′) верен в том и только в том случае, когда выполняются условия а) $\mathcal{J}_2(\nu) = V_2(E)$ и б) $\omega' = \omega_{\partial Z_+}$.

Покажем, что из условия б) следует а). Заметим, что функция $U_2^{\omega}(x) - U_2^{\omega_{\partial Z_+}}(x)$ квазивсюду на E^+ равна постоянной c_1 $(= W_2(E^+) - W_2(Z_+))$, так как $\omega_{\partial Z_+} = \omega_{\bar{Z}_+}$, где $\bar{Z}_+ := Z_+ \cup \partial Z_+$, и $\breve{E}^+ \subset Z_+$. Учитывая (8), имеем

$$U_2^{\nu}(x) = \begin{cases} c_1 \text{ квазивсюду на } E^+, \\ 0 \text{ квазивсюду на } E^-. \end{cases} \tag{13}$$

Как видно из теоремы 2 работы [6], для конденсатора E, удовлетворяющего условию (2), существует и единствен заряд $\lambda \in \mathfrak{N}^1(E)$ с энергией $\mathcal{J}_2(\lambda) = V_2(E)$. Потенциал заряда λ постоянен квазивсюду на E^+ и на E^- (см. теорему 3 из [6]) и несложно убедиться (ср. с [2, с. 174—175]), что это свойство однозначно определяет заряд λ среди зарядов класса $\mathfrak{N}^1(E)$ с конечной энергией. Следовательно, в силу (11) и (13) имеем $\nu = \lambda$, что дает а).

Но условие б) равносильно условию

$$U_2^{\omega'}(x) = c_2 \quad \forall x \in \partial Z_+, \tag{14}$$

где c_2 — некоторая постоянная. Действительно, из (14) с учетом (8) находим

$$U_2^{\omega'}(x) = c_2 \text{ квазивсюду на } \partial Z_+. \tag{15}$$

Из соотношений (10), (15) в силу известного свойства равновесных мер получаем б). Импликация б) $\Rightarrow$ (14) следует из равенства

$$U_2^{\omega_{\partial Z_+}}(x) = W_2(\partial Z_+) \text{ квазивсюду на } \partial Z_+,$$

соотношения (8) и свойства непрерывности функции $U_2^{\omega}(x)$ в окрестности ∂Z_+.

Таким образом, условие (14) необходимо и достаточно для выполнения равенства в (3′). Поскольку множество ∂Z_- имеет непустое пересечение с Ω, а потенциал $U_2^{\omega}(x)$ равен $W_2(E^+)$ во всех внутренних точках множества $C\Omega$, больше нуля и меньше $W_2(E^+)$ на Ω и стремится к нулю при $x \to \infty$, то из (14) следует, что $0 < c_2 < W_2(E^+)$, а ∂Z_+ — компактное множество, лежащее в Ω. Пользуясь принципом максимума для гармонических функций, находим, что $U_2^{\omega}(x) \neq c_2$ $\forall x \in \Omega \setminus \partial Z_+$. Поскольку функции $U_2^{\omega}(x)$ и $u(x)$ отличаются на мультипликативную постоянную, из (14) в силу сказанного получаем $\partial Z_+ \in \Gamma$.

Теорема 1 доказана. Заметим, что аналогичное к теореме 1 утверждение для плоских конденсаторов, удовлетворяющих дополнительным требованиям о связности и ограниченности зазора, приведено в [7].

5. Пусть $K \subset \mathbb{R}^p$ — компакт, $q \in (C_2(K), \infty)$. В качестве следствия из теоремы 1 приведем решение следующей экстремальной задачи: среди совокупности $\mathfrak{S}(K, q)$ конденсаторов $E = (E^+, E^-)$ с фиксированной «положительной пластиной» $E^+ = K$ и фиксированной 2-емкостью $\operatorname{cap} E = (p-2)\,\omega_p q$ найти конденсатор с минимальной характеристикой $C_2(\partial E^-)$.

Следствие 2. *Верно неравенство*

$$C_2(\partial E^-) \geqslant q C_2(K)/[q - C_2(K)] \tag{16}$$

для всех $E \in \mathfrak{S}(K, q)$. *Знак равенства в* (16) *достигается для тех конденсаторов* $E \in \mathfrak{S}(K, q)$ (*и только для них*), *у которых граничное множество* ∂E^- *совпадает с поверхностью уровня* $\left\{x : U_2^{\gamma_K}(x) = 1 - \dfrac{C_2(K)}{q}\right\}$.

6. Пусть множество Z_+ ограничено, D — некоторое открытое множество, содержащее $Z_+ \cup \partial Z_+$, $g(x, y)$ — его обобщенная функция Грина [2]. Пользуясь результатами работы [8] и рассуждая, как в п. 4, можно видеть, что справедливость теоремы 1 не нарушится, если ньютоновы емкости множеств E^+ и Z_+ заменить на их гриновы емкости $C_g(\cdot)$, а Γ — на множество эквипотенциальных поверхностей равновесного гринова потенциала для E^+.

Если $E^+ = \{x \in D : g(x, x_0) \geqslant a_1\}$, где $x_0 \in D$, $a_1 \in (0, \infty)$, то знак равенства в соотношении

$$\operatorname{cap} E \leqslant (p-2)\,\omega_p C_g(E^+)\, C_g(Z_+)/[C_g(Z_+) - C_g(E^+)]$$

верен в том и только в том случае, когда ∂Z_+ совпадает с некоторой поверхностью уровня $\{x \in D : g(x, x_0) = b_1\}$, $b_1 < a_1$. (Для такого E имеем $\operatorname{cap} E = (p-2)\,\omega_p/(a_1 - b_1)$, ср. с (4)).

Верны также аналоги следствий 1 и 2. Ясно, что вместо сферического кольца в следствии 1 следует рассматривать кольцо E_0, у которого множества ∂E_0^+ и ∂E_0^- совпадают с поверхностями уровня функции $g(x, x_0)$.

1. *Gehring F. W.* Inequalities for condenser, hyperbolic capacity and extremal lengths // Mich. Math. J.— 1971.— 18, N 1.— P. 1—20.
2. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука, 1966.— 515 с.
3. *Зорий Н. В.* Некоторые функциональные характеристики пространственных конденсаторов и соотношения между ними.— Киев, 1985.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.57).
4. *Anderson G. D., Vamanamurthy M. K.* The newtonian capacity of a space condenser // Indiana Univ. Math. J.— 1985.— 34, N 4.— P. 753—776.
5. *Зорий Н. В.* Конденсаторы, заряды на них, оценки энергий и емкостей при перестройке конденсаторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1980.— 138 с.
6. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов.— Киев, 1985.— 43 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.06).
7. *Kloke H.* Some inequalities for the capacity of plane condensers // Resultate cher Mathematik.— 1986.— 9, N 1-2.— P. 82—94.
8. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме гриновой энергии для пространственных конденсаторов // Вопросы анализа и дифференциальной топологии.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 39—47.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 26.01.88