УДК 519.21

А. В. Скороход, В. И. Степахно

Центральная предельная теорема для полиномов Эрмита от независимых гауссовых величин

Исследуются условия асимптотической нормальности величин $\eta_n = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n} H(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r})$ при $n\to\infty$ и $m\to\infty$, где $H(x_1, \ldots, x_r)$ — полиномы Эрмита в $(R^m)^r$, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые гауссовы векторы в $X = R^m$, имеющие среднее 0 и единичный корреляционный оператор.

Досліджуються умови асимптотичної нормальності величин $\eta_n = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n} H(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r})$ при $n\to\infty$ і $m\to\infty$, де $H(x_1, \ldots, x_r)$ — поліноми Ерміта в $(R^m)^r$, а $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — незалежні гаусові вектори в $X = R^m$, які мають середнє 0 і одиничный кореляційний оператор.

Пусть $X = R^m$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые гауссовы векторы в X, имеющие среднее 0 и корреляционный оператор I_m (единичный оператор в X).

Рассмотрим функцию из X^r в R вида

$$H(x_1, \ldots, x_r) = \Big(\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r} (\nabla_i, \nabla_j)^{k_{ij}} \varphi(x_1, \ldots, x_r)\Big)\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_r), \qquad (1)$$

где

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad k_{ij}\in Z_+, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_r) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k} |x_l|^2\Big).$$

Многочлен вида (1) является полиномом Эрмита в X^r, $2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r} k_{ij}$ — степень этого полинома [1].

В данной статье исследуются условия асимптотической нормальности величины

$$\eta_n = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n} H(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r}) \qquad (2)$$

при $n\to\infty$ и $m\to\infty$. Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема. *Для того чтобы $\eta_n/\sqrt{D\eta_n}$ было асимптотически нормальным* (0, 1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r} k_{ij} > 0. \qquad (3)$$

Доказательство теоремы основано на мартингальных методах в предельных теоремах. Такие методы получили в последнее время достаточно широкое распространение (см., например, [2], гл. 5, § 3; [3], VIII, 3).

Лемма 1. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_r$ — независимые гауссовы векторы в $R^m = X$. Совместное распределение величин*

$$\{[(\xi_i, \xi_j) - m\delta_{ij}][m(1+\delta_{ij})]\}^{-1/2},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r, \tag{4}$$

сходится к совместному распределению величин $\{\eta_{ij};\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r\}$, где η_{ij} при различных наборах индексов независимы и каждая из них нормальна (0, 1). *При этом*

$$M\left(\frac{(\xi_i, \xi_j) - m\delta_{ij}}{\sqrt{(1+\delta_{ij})^m}}\right)^l \to M\eta_{ij}^l \text{ для всех } l \geqslant 1. \tag{5}$$

Доказательство вытекает из центральной предельной теоремы и оценок. Если $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — независимые одинаково распределенные величины, для которых $M\eta_i = 0$, $M|\eta_i|^l < \infty$, то

$$M\left(\sum_{i=1}^m \eta_i\right)^l = \sum_{k_1+\ldots+k_m=l} \frac{l!}{k_1! \ldots k_m!} M\eta_1^{k_1} \ldots M\eta_m^{k_m}.$$

Среди слагаемых справа отличны от нуля лишь те, у которых все $k_i > 0$ будут больше 1, так как $M\eta_i = 0$. Поэтому у отличных от нуля членов число k_i, отличных от нуля, не больше $l/2$. Значит,

$$M\left(\sum_{i=1}^m \eta_i\right)^l = 0\left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{[l/2]} \leqslant m} 1\right) = 0(m^{[l/2]}).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $H(x_1, \ldots, x_r)$ — полином Эрмита вида* (1). *Тогда*

$$MH^2(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j} (\nabla_i, \nabla_j)^{k_{ij}} \left\{\prod_{1 \leqslant i \leqslant j} (x_i x_j)^{k_{ij}}\right\} = 0(m^{\sum_{i \leqslant j} k_{ij}}). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_r) = (2\pi)^{-rm/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \times \right.$ $\left. \times \sum_1^m (x_i, x_i)\right\}$. Имеем

$$\int H^2(x_1, \ldots, x_r)\, \varphi(x_1, \ldots, x_r)\, dx_1 \ldots dx_r = \int H(x_1, \ldots, x_r) \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} (\nabla_i, \nabla_j)^{k_{ij}} \times$$
$$\times \varphi(x_1, \ldots, x_r)\, dx_1, \ldots, dx_r = \int \left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} (\nabla_i, \nabla_j)^{k_{ij}} H(x_1, \ldots, x_r)\right) \varphi(x_1, \ldots$$
$$\ldots, x_r)\, dx_1 \ldots dx_r.$$

Мы воспользовались интегрированием по частям. Выражение в скобках — постоянная, так как $H(x_1, \ldots, x_r)$ имеет степень $k = 2\sum_{1 \leqslant i \leqslant j} k_{ij}$, и дифференциальный оператор имеет ту же степень. Эта постоянная совпадает со значением оператора от старшего члена полинома, который совпадает с $\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} (x_i, x_j)^{k_{ij}}$, так как остальные члены имеют степень меньше k, и после применения дифференциального оператора степени k обращаются в нуль. Интеграл от φ равен 1. Тем самым первое соотношение доказано. Для доказательства оценки заметим, что

$$(\nabla_i, \nabla_i)(x_i, x_i) = 2m, \ (\nabla_i, \nabla_i)(x_i, x_j)(x_i, x_k) = (x_j, x_k), \ i \neq k, \ j \neq k,$$
$$(\nabla_i, \nabla_i)(x_i, x_i)(x_i, x_j) = (2m+2)(x_i, x_j), \ i \neq j,$$
$$(\nabla_i, \nabla_j)(x_i, x_j) = m, \ i \neq j, \ (\nabla_i, \nabla_j)(x_i, x_k)(x_j, x_l) = (x_k, x_l),$$
$$k \neq i, \ k \neq j, \ l \neq i, \ l \neq j.$$

Поэтому для всякого многочлена степени $2k$ $P(x_1, \dots, x_r)$, зависящего от (x_i, x_j), $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r$, с независящими от m коэффициентами $(\nabla_i, \nabla_j) P(x_1, \dots, x_m)$ — такой же многочлен степени $2k-2$, коффициенты которого имеют вид $O(m)$. По индукции k устанавливаем искомую оценку.

Лемма 3. *Пусть*

$$\sum k_{ii} = \tilde{k}, \ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} k_{ij} = k.$$

Тогда предельное распределение величины

$$2^{-\tilde{k}/2} m^{-k/2} H(\xi_1, \dots, \xi_r) \tag{7}$$

совпадает с распределением величины

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} \varphi_{k_{ij}}(\eta_{ij}),$$

где $\varphi_l(t)$ — *одномерный полином Эрмита степени* l:

$$\varphi_l(t) = (-1)^l \left(\frac{d^l}{dt^l} e^{-t^2/2} \right) e^{t^2/2}.$$

Доказательство. Справедливо равенство $2^{-\tilde{k}/2} m^{-k/2} H_r(\xi_1, \dots, \xi_r) = Q(r, m, \eta_{11}^{(m)}, \dots, \eta_{rr}^{(m)})$, где $Q(r, m, \eta_{11}^{m}, \dots, \eta_{rr}^{(m)})$ — многочлен от своих переменных степеней k_{ij} (по $\eta_{ij}^{(m)}$), а $\eta_{ij}^{(m)} = \dfrac{(\xi_i, \xi_j) - m\delta_{ij}}{\sqrt{m(1+\delta_{ij})}}$. Из вида H_r вытекает, что член со старшей степенью имеет вид

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} (\eta_{ij}^{(m)})^{k_{ij}}. \tag{8}$$

Поскольку на основании леммы 2 $MH_r^2(\xi_1, \dots, \xi_r) = O(m^k)$, то $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} M \times Q^2(r, m, \eta_{11}^{(m)}, \dots, \eta_{rr}^{(m)}) < \infty$. Отсюда вытекает

$$\text{а)} \ \lim_{m \to \infty} MQ(r, m, \eta_{11}^{(m)}, \dots, \eta_{rr}^{(m)}) \eta_{11}^{(m)^{l_{11}}} \dots \eta_{rr}^{(m)^{l_{rr}}} = 0,$$

если $l_{ij} \leqslant k_{ij}$, $\Sigma l_{ij} < \Sigma k_{ij}$;

б) величина, к которой сходятся распределения $Q(r, m, \eta_{11}^{(m)}, \dots, \eta_{rr}^{(m)})$ для некоторой подпоследовательности при $m \to \infty$, представима в виде полинома от $\eta_{11}, \dots, \eta_{rr}$ со старшим членом вида (8), если $\eta_{ij}^{(m)}$ заменить на η_{ij}.

Лемма 4. *Для всех* S

$$M(2^{-\tilde{k}/2} m^{-k/2} H(\xi_1, \dots, \xi_r))^s = M\left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} \varphi_{k_{ij}}(\eta_{ij}) \right)^s. \tag{9}$$

Доказательство. Учитывая лемму 3, достаточно доказать, что величина $M[m^{-k/2} H(\xi_1, \dots, \xi_r)]^s$ ограничена, т.е. $M[H(\xi_1, \dots, \xi_r)]^s = O \times (m^{ks/2})$. Заметим, что если последнее равенство выполнено для некоторого четного s, то при $s_1 < s$ будем иметь

$$M[H(\xi_1, \ldots, \xi_r)]^{s_1} \leqslant \{M[H(\xi_1, \ldots, \xi_r)]^s\}^{s'/s} = O(m^{ks'/2}).$$

Поэтому достаточно доказать лемму для $s=2^t$, где t натурально. Для $t=1$ это доказано в лемме 2. Для $t=2$ докажем это ниже. Предположим, что утверждение леммы справедливо для некоторого $t \geqslant 2$. Покажем, что тогда оно справедливо и для $t+1$.

Представим $H^2(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \sum\limits_{l=0}^{2k} c_l G_l$, где G_l — полином Эрмита степени l. Тогда

$$MH^4(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \sum_{l=0}^{2k} c_l^2 MG_l^2.$$

Так как в силу леммы 2 $MG_l^2 \sim b_l m^l$, где $b_l > 0$, то по предположению

$$\sum_{l=0}^{2k} c_l^2 b_l m^l = O(m^{2k}),$$

$c_l = O(m^{k-l/2})$. Поэтому

$$MH^{2^{t+1}} = M(H^2)^{2^t} = O\Big(\sum_{l=0}^{2k} c_l^t MG_l^t\Big) = O(m^{k2^t}).$$

Остается рассмотреть случай $t=2$. Доказательство проведем индукцией по r. Для любого (не обязательно симметричного) полинома Эрмита $V(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ покажем, что $MV^4(\xi_1, \ldots, \xi_r) = O\{[MV^2(\xi_1, \ldots, \xi_r)]^2\}$. При $r = 1$ это соотношение проверяется индукцией по степени полинома. Если оно справедливо для $r=t$, то для $r=t+1$ будем иметь

$$V(\xi_1, \ldots, \xi_{t+1}) = \Sigma V_i(\xi_1, \ldots, \xi_t) \widetilde{V}_i(\xi_{t+1}), \tag{10}$$

где V_i и $\widetilde{V}_i$ — полиномы Эрмита, сумма их степеней для всех i не превышает k. Используя представление (10) и то, что по предположению индукции

$$MV_i^4(\xi_1, \ldots, \xi_t) = O\{[MV_i^2(\xi_1, \ldots, \xi_t)]^2\}, \ M\widetilde{V}_i^4(\xi_{t+1}) = O\{[M\widetilde{V}_i^2(\xi_{t+1})]^2\},$$

получаем искомое соотношение. Лемма доказана.

Замечание. Пусть $s > r$ и η_{ij}, $1 \leqslant i < j < s$, такие, как и в лемме 1 (если в ней r заменить на s), и

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant s, \ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant s,$$
$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leqslant s, \ 1 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_r \leqslant s.$$

Тогда совместное распределение величин

$$\{2^{-\widetilde{k}/2} m^{-k/2} H(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r}), \ 2^{-\widetilde{k}/2} m^{-k/2} H(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_r}),$$
$$2^{-\widetilde{k}/2} m^{-k/2} H(\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_r}), \ 2^{-\widetilde{k}/2} m^{-k/2} H(\xi_{l_1}, \ldots, \xi_{j_r})\}$$

сходится к совместному распределению величин

$$\Big\{\prod_{1\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant r} \varphi_{k_{\alpha\beta}}(\eta_{i_\alpha, i_\beta}), \ \prod_{1\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant r} \varphi_{k_{\alpha\beta}}(\eta_{j_\alpha, j_\beta}), \ \prod_{1\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant r} \varphi_{k_{\alpha\beta}}(\eta_{k_\alpha, k_\beta}),$$
$$\prod_{1\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant r} \varphi_{k_{\alpha\beta}}(\eta_{l_\alpha, l_\beta})\Big\}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} 2^{-2\tilde{k}} m^{-2k} M\{H(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r}), H(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_r}), H(\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_r}),$$

$$H(\xi_{l_1}, \ldots, \xi_{l_r})\} = M \prod_{1\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant r} [\varphi_{k_{\alpha,\beta}}(\eta_{i_\alpha, i_\beta}) \varphi_{k_{\alpha,\beta}}(\eta_{j_\alpha, j_\beta}) \varphi_{k_{\alpha,\beta}} \times$$

$$\times (\eta_{k_\alpha, k_\beta}) \varphi_{k_{\alpha,\beta}}(\eta_{l_\alpha, l_\beta})]. \tag{11}$$

Доказательство теоремы. Необходимость. Если величина

$$\frac{\sum\limits_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r}^{\leqslant n} H(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r})}{\left[\frac{n^r}{r!} MH^2(\xi_1, \ldots, \xi_r)\right]^{1/2}}$$

асимптотически нормальна, то

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \frac{M\left(\sum\limits_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r} H(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r})\right)^4}{\left(\sum\limits_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r} MH^2(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r})\right)^2} = 3. \tag{12}$$

Используя (11), записываем

$$M\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n} H(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r})\right)^4 \sim 2^{2\tilde{k}} m^{2k} \times$$

$$\times \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n\\ \cdots\cdots\cdots\\ 1\leqslant l_1<\ldots<l_r\leqslant n}} A_{i_1,\ldots, i_r, j_1, \ldots, j_r, k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_r}, \tag{13}$$

где $A_{i_1, \ldots, l_r}$—правая часть (11). Величина $A_{i_1,\ldots,l_r}$ отлична от нуля, если в последовательности $i_1, \ldots, l_r$ каждый индекс встречается не менее двух раз. Пусть $s(i_1, \ldots, l_r)$ — число различных членов в этой последовательности. Тогда $A(i_1, \ldots, l_r)$ отлична от нуля для $r \leqslant s(i_1, \ldots, l_r) \leqslant 2r$. Число слагаемых в правой части (13), для которых $s(i_1, \ldots, l_r) = u$, равно $O(n^u)$. Поэтому главный член в правой части — сумма тех членов, для которых $u = 2r$. Можно считать, что различные индексы — это $1, \ldots, 2r$, $i_1 = 1, \ldots, i_r = r$. Выражение $A_{1, \ldots, r, j_1, \ldots, j_r, k_1, \ldots, k_r, l_1 \ldots, l_r}$ обращается в нуль одновременно с таким выражением:

$$M \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant r} [\varphi_{k_{\alpha,\beta}}(\eta_{\alpha\beta}) \varphi_{k_{\alpha,\beta}}(\eta_{j_\alpha, j_\beta}) \varphi_{k_{\alpha,\beta}}(\eta_{k_\alpha, k_\beta}) \varphi_{k_{\alpha,\beta}}(\eta_{l_\alpha, l_\beta})]. \tag{14}$$

Это выражение равно нулю одновременно с $\prod\limits_{t>0} B_t$, где

$$B_t = M \prod_{\substack{k_{\alpha,\beta}=t\\ 1\leqslant\alpha<\beta<r}} [\varphi_t(\eta_{\alpha,\beta}) \varphi_t(\eta_{j_\alpha, j_\beta}) \varphi_t(\eta_{k_\alpha, k_\beta}) \varphi_t(\eta_{l_\alpha, l_\beta})], \tag{15}$$

Если некоторое $B_t = 0$, то найдется такая пара $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2r$, что $\varphi_t(\eta_{\alpha\beta})$ входит в произведение в правой части (15) только 1 раз. Поэтому $\eta_{\alpha\beta}$ может входить в произведение (14) лишь в виде $\varphi_s(\eta_{\alpha\beta})$, где $s \neq t$ (может быть $s = 0$), а $M\varphi_s(\eta_{\alpha\beta}) \varphi_t(\eta_{\alpha\beta}) = 0$ и $\eta_{\alpha\beta}$ не зависит от остальных η_{ij}, $i < j$, при $i \neq \alpha$ или $j \neq \beta$.

Обозначим через $U_t \subset \{1, \ldots, r\}$ множество таких индексов α, для которых существует $\beta > \alpha$ (или $\beta < \alpha$) такое, что $k_{\alpha\beta} = t$ (или $k_{\beta\alpha} = t$). Если U_t не пусто и $B_t > 0$, то при $(\alpha, \beta) \in U_t$ или $j_\alpha, j_\beta \in U_t$ (а $k_\alpha, k_\beta > r$, l_α, $l_\beta > r$, k_α

$k_\beta, l_\alpha, l_\beta \in V_t$, где $V_t \subset \{r+1, \dots, 2r\}$) оно имеет столько же точек, сколько и U_t, или k_α, $k_\beta \in U_t$, $j_\alpha, j_\beta, l_\alpha, l_\beta \in V_t$, или $l_\alpha, l_\beta \in V_t$, $j_\alpha, j_\beta, k_\alpha, k_\beta \in U_t$. Поэтому

$$B_t = \prod_{\substack{\alpha,\beta \in U_t \\ \alpha<\beta}} M\varphi_t^2(\eta_{\alpha\beta}) \prod_{\substack{\gamma,\delta\in V_t \\ \gamma<\delta}} M\varphi_t^2(\eta_{\gamma,\delta}).$$

Используя это соотношение при условии, что $\bigcup\limits_{t>0} U_t \neq \varnothing$, получаем

$$M\Big[\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_r\leqslant n} H(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_r})\Big]^4 = 3 \sum_{\{i_1<\dots<i_r\}\cap\{j_1<\dots<j_r\}=\varnothing} MH^2(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_r}) \times$$

$$\times MH^2(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_r}) + O(n^{2r-1}).$$

Отсюда вытекает (11).

Достаточность. Положим

$$G_s = \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_{r-1}<s} H(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_{r-1}}, \xi_s),$$

$$F_s = M\,((G_s^2/\mathscr{F}_{s-1}),$$

где $\mathscr{F}_s$ — σ-алгебра, порожденная величинами $\xi_1, \dots, \xi_s$,

$$Q_s = MF_s \sim \frac{s}{r!} MH^2(\xi_1, \dots, \xi_r) \sim \frac{s'}{r!} 2^{\tilde{k}} m^k \prod_{1\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant r} (k_{\alpha\beta}!).$$

Лемма 5. *Выполняется равенство* $\lim\limits_{\substack{s\to\infty \\ m\to\infty}} \dfrac{MF_s^2}{Q_s^2} = 1.$

Доказательство аналогично доказательству соотношения (12).

Положим теперь $\zeta_t = B_{n,m}^{-1} \sum\limits_{s<nt} G_s$, где

$$B_{n,m}^2 = \frac{n^m}{r!} 2^{\tilde{k}} m^k \prod_{1\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant r} (k_{\alpha\beta}!), \quad s < nt.$$

Тогда $\zeta_t^{(n)}$ — мартингал относительно $\mathscr{F}_t^{(n)} = \sigma\{\xi_i, i \leqslant nt\}$ и $M(\zeta_{t+h}^{(n)} - \zeta_t^{(n)})^4 = O(h^2 + 1/n)$ (подсчет делается так же, как при доказательстве формулы (12)). Характеристика этого мартингала на основании леммы 5

$$\frac{1}{B_{n,m}} \sum_{s<nt} F_s \sim \frac{1}{B_{n,m}} \sum_{s<nt} Q_s \sim t^{r+1}.$$

Поэтому $\zeta_t^{(n)}$ слабо сходится к гауссовскому процессу с независимыми приращениями $\zeta(t)$ со средним 0 и дисперсией t^{r+1}. Отсюда, используя теорему Леви [2], заключаем, что $\zeta(t^{1/(r+1)} = w(t))$— это винеровский процесс. Предельное распределение величины η_n совпадает с распределением $w(1)$.

1. *А. В. Скороход, В. И. Степахно*. Об одном обобщении полиномов Эрмита // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 5.— С. 636—642.
2. *И. И. Гихман, А. В. Скороход*. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 610 с.
3. *J. Jacod, A. N. Shiryaev*. Limit Theorems for Stochastic Processes.— New York : Springer — Verlag, 1987.— 600 p.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 26.05.90.