УДК 517.5

А. В. БОНДАРЬ, д-р физ.-мат. наук,
В. Ю. РОМАНЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

О некоторых условиях голоморфности в гильбертовых пространствах

Получены новые условия $\mathbb{C}$-дифференцируемости $\mathbb{R}$-дифференцируемых отображений и доказана теорема о голоморфности отображений, обладающих конечным растяжением вдоль конусов.

Одержані нові умови $\mathbb{C}$-диференційовності $\mathbb{R}$-диференційовних відображень та доведена теорема про голоморфність відображень, які задовольняють умові скінченного розтягу вздовж конусів.

В настоящей статье доказываются два новых условия голоморфности отображений областей гильбертовых пространств. Эти результаты продолжают и расширяют исследования, проведенные в работах [1—3], содержащих необходимые определения и обозначения.

© А. В. БОНДАРЬ, В. Ю. РОМАНЕНКО, 1991

Пусть H, H_1 — комплексные гильбертовы пространства. Обозначим через $\mathcal{O}(H)$ множество всех ортонормированных базисов (реперов) пространства H и положим $\mathcal{K}(H) = \{E(\mathcal{E}) : \mathcal{E} \in \mathcal{O}(H)\}$, где $E(\mathcal{E})$ — замкнутая вещественная линейная оболочка множества $\mathcal{E}$.

Определение 1. *Будем говорить, что вещественные подпространства $E_1 \subset H$, $E_2 \subset H$, ..., $E_n \subset H$ находятся в общем положении в H, если $E_k \oplus E_m = H$ при любых $k, m = 1, 2, \dots, n$, $k \neq m$.*

Для любого $\mathbb{C}$-линейного оператора $L : H \to H_1$ введем обозначение

$$L^0 = \begin{cases} \| L \|^{-1} L, & L \neq 0, \\ 0 & , L = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть $f : D \to H_1$ — локально ограниченное отображение области $D \subset H$, $\mathbb{R}$ - дифференцируемое в каждой точке $a \in D \setminus S$, где S — подмножество D, имеющее нулевую k-меру Хаусдорфа при некотором натуральном k. Предположим, что в каждой точке $a \in D \setminus S$ выполнено одно из условий:*

1) для двух подпространств $E_1, E_2 \in \mathcal{K}(H)$, находящихся в общем положении в H, производные операторы $L_1 = L_{E_1}(f)$ и $L_2 = L_{E_2}(f)$ отображения f в точке a вдоль E_1 и E_2 соответственно совпадают;

2) для трех подпространств E_1, E_2, E_3, принадлежащих $\mathcal{K}(H)$ и находящихся в общем положении в H, совпадают операторы $L_k^0 = L_{E_k}^0(f)$, $k = 1, 2, 3$, т. е.

$$L_1^0 = L_2^0 = L_3^0. \tag{2}$$

Тогда:

А) *если f непрерывно, то f голоморфно в D;*

Б) *если S замкнуто или существует такое целое n, $2n \geqslant k + 1$, что f $\mathbb{C}$-дифференцируемо в точках множества $D \setminus S$ локально равномерно на n-мерных сечениях, то f можно так изменить на множестве S, что получающееся отображение $\tilde{f}$ будет голоморфным в D.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что если K — замкнутое комплексное подпространство пространства H, не совпадающее с H, и подпространства E_1, $E_2 \in \mathcal{K}(H)$ находятся в общем положении в H, то

$$E_1 + i(E_1 \cap K) \neq E_2 + i(E_2 \cap K). \tag{3}$$

Предположим от противного, что

$$E_1 + i(E_1 \cap K) = E_2 + i(E_2 \cap K) = E. \tag{4}$$

Так как E — замкнутое подпространство в H и $E \supset E_1$, $E \supset E_2$, то $E \supset E_1 + E_2 = H$. Следовательно, $E = H$ и из (4) вытекает $E_1 + i(E_1 \cap K) = H$. Тогда $E_1 \cap K$ должно совпадать с E_1, т. е. $E_1 \subset K$. Аналогично доказываем, что $E_2 + i(E_2 \cap K) = H$, $E_2 \cap K = E_2$ и $E_2 \subset K$. Отсюда следует $H = E_1 + E_2 \subset K$. Таким образом, $K = H$ и полученное противоречие показывает, что выполняется неравенство (3).

Докажем, что при выполнении условия (1) отображение f $\mathbb{C}$-дифференцируемо в точке a.

Согласно представлению, полученному в [1], запишем производную $f'(a)$ $\mathbb{R}$-дифференцируемого в точке a отображения f в виде $f'(a) = f_z(a) + f_{\bar{z}}(a) J$ и положим $K = \operatorname{Ker}[f_{\bar{z}}(a) J]$. Так как оператор $f_{\bar{z}}(a)$ $\mathbb{C}$-линеен, а $J(iz) = -iJ(z)$ $\forall z \in H$, то K — замкнутое $\mathbb{C}$-линейное подпространство в H. Если $K \neq H$, то согласно уже доказанному, выполняется неравенство (3) и тогда по теореме 2 [1] производные операторы L_1 и L_2 в точке a вдоль E_1 и E_2 не совпадают, что противоречит условию. Поэтому должно выполняться равенство $K = H$, из которого вытекает $f_{\bar{z}}(a) J = 0$ и, следовательно, оператор $f'(a) = f_z(a)$ $\mathbb{C}$-линеен.

Пусть теперь выполнено условие 2. Если $L_1 = 0$, то $L_1^0 = 0$, а из (1) и (2) вытекает $L_1 = L_2 = L_3$. Следовательно, согласно доказанному выше отображение f $\mathbb{C}$-дифференцируемо в точке a. Предположим, что $L_1 \neq 0$. В силу (2) имеем

$$\| L_1 \|^{-1} L_1 = \| L_2 \|^{-1} L_2 = \| L_3 \|^{-1} L_3$$

или

$$L_2 = \| L_2 \| \| L_1 \|^{-1} L_1, \ L_3 = \| L_3 \| \| L_1 \|^{-1} L_1,$$

т. е. все три оператора L_1, L_2, L_3 лежат на прямой $\Pi = \{L : L = \lambda L_1, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Так как множество производных операторов $\mathcal{P}(f, a)$ отображения f в точке a содержится в сфере пространства $\mathcal{L}(H, H_1)$ с центром в точке $f_z(a)$ и радиусом $r = \| f_{\bar{z}}(a) \|$ [1], а прямая Π может пересекать эту сферу не более чем в двух точках, то по крайней мере два из операторов L_1, L_2, L_3 совпадают. Тогда по уже доказанному f $\mathbb{C}$-дифференцируемо в точке a.

Таким образом, отображение f $\mathbb{C}$-дифференцируемо в каждой точке $a \in D \setminus S$ и утверждения А), Б) следуют из теоремы 3 [1]. Теорема 1 доказана.

Замечание. Легко видеть, что из $\mathbb{C}$-дифференцируемости отображения f в точке a вытекает каждое из условий 1 и 2.

Пусть H, H_1 — комплексные гильбертовы пространства, $e \in H$, $\| e \| = 1$, и $B(e, r)$ — открытый шар с центром в точке e радиуса $r < 1$. Обозначим через $K(0, e, r)$ порожденный шаром $B(e, r)$ конус с вершиной в нуле, т. е.

$$K(0, e, r) = \{z \in H : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda > 0, \ \lambda z \in B(e, r)\},$$

и для любой точки $a \in H$ положим $K(a, e, r) = a + K(0, e, r)$.

Определение 2. *Пусть D — область в H и $f : D \to H_1$ — отображение. Будем говорить, что f удовлетворяет в точке $a \in D$ условию (K), если существуют такие $e \in H$, $\| e \| = 1$, и $r < 1$, что*

$$\varlimsup_{\substack{z \to a \\ z \in K(a, e, r) \cap D}} \frac{\| f(z) - f(a) \|}{\| z - a \|} = M(a) < \infty. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть D — область сепарабельного гильбертова пространства H, Q — подмножество области D и $f : D \to H_1$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условию (K) в каждой точке a подмножества $Q' \subset Q$ не первой категории на Q.*

Тогда найдутся такие числа r, M, δ, шар $B \subset D$ с центром в некоторой точке $z_0 \in Q$ и вектор $e \in H$, $\| e \| = 1$, что неравенство

$$\| f(z) - f(a) \| \leqslant M \| z - a \| \tag{6}$$

будет выполняться $\forall a \in Q \cap B$ и $\forall z \in \overline{K(a, e, r)}$, как только $\| z - a \| < \delta$. При этом найдется такой меньший шар $B_0 \subset B$ (с тем же центром), что f удовлетворяет условию Липшица на множестве $Q \cap B_0 \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots\}$ — счетное всюду плотное подмножество на единичной сфере $S = \{e \in H : \| e \| = 1\}$. Обозначим через $X_{k,m}$ множество всех тех точек $a \in Q$, для которых замкнутый шар $\overline{B\left(a, \frac{1}{m}\right)}$ содержится в D и неравенство

$$\| f(z) - f(a) \| \leqslant m \| z - a \| \tag{7}$$

выполняется для всех $z \in D \cap K\left(a, e_k, \frac{1}{m}\right)$, удовлетворяющих условию $\| z - a \| < \frac{1}{m}$.

Покажем, что $\forall k, m$ множество $X_{k,m}$ замкнуто относительно Q. Действительно, пусть $a_n \in X_{k,m}$, $a_n \to a \in Q$ при $n \to \infty$, $z \in D \cap K\left(a, e_k, \frac{1}{m}\right)$ и $\| z - a \| < \frac{1}{m}$. Тогда в силу открытости конуса $K\left(a, e_k, \frac{1}{m}\right)$ и замкнутости шара $\overline{B\left(a_n, \frac{1}{m}\right)}$ шар $\overline{B\left(a, \frac{1}{m}\right)}$ принадлежит области D и существует такое n_0, что $z \in K\left(a_n, e_k, \frac{1}{m}\right)$ и $\| z - a_n \| < \frac{1}{m}$ $\forall n > n_0$. Так как $a_n \in X_{k,m}$, то отсюда следует

$$\| f(z) - f(a_n) \| \leqslant m \| z - a_n \|, \tag{8}$$

а поскольку по условию отображение f непрерывно, то, переходя в неравенстве (8) к пределу, получаем неравенство (7), из которого следует, что точка a принадлежит $X_{k,m}$.

Из условия (5) вытекает, что множество $X = \bigcup\limits_{k,m=1}^{\infty} X_{k,m}$ содержит множество Q' и поэтому не является множеством первой категории на Q. Следовательно, найдутся шар $B \subset D$ с центром в некоторой точке $z_0 \in Q$ и числа k_0, m_0 такие, что множество $X_{k_0,m_0} \cap B \cap Q$ всюду плотно на $B \cap Q$, а так как X_{k_0,m_0} замкнуто в Q, то $B \cap Q \subset X_{k_0,m_0}$. Положим $e = e_{k_0}$, $r = \frac{1}{m_0}$, $\delta = \frac{1}{m_0}$, $M = m_0$. Тогда очевидно, что шар B и эти числа удовлетворяют (6).

Пусть α — величина угла при вершине конуса $K(0, e, r)$ и B_0 — шар с центром z_0, содержащийся в B и имеющий диаметр, не превышающий $\delta \sin \alpha$. Докажем, что f удовлетворяет условию Липшица на множестве $B_0 \cap Q$ с константой $(2M)/\sin \alpha$.

Пусть $a, b \in B_0 \cap Q$. Если $b \in K(a, e, r)$, то для $z = b$ выполняется неравенство (6), если же $b \in a - K(a, e, r)$, то $a \in K(b, e, r)$ и поэтому неравенство (6) выполняется при замене a на b и z на a. Следовательно, можно предположить, что $b \in (a + K(0, e, r)) \cup (a - K(0, e, r))$. В этом случае векторы e и $b - a$ $\mathbb{R}$-линейно независимы. Обозначим через E вещественную линейную оболочку этих векторов и положим $\Pi = a + E$. Тогда Π — двухмерная плоскость в H, содержащая векторы $a + e$ и $b + e$, т. е. проходящая через биссектрисы конусов $K(a, e, r)$ и $K(b, e, r)$ и пересекающая эти конусы по углам $V(a)$ и $V(b)$ со сторонами $l_1(a)$, $l_2(a)$ и $l_1(b)$, $l_2(b)$ соответственно. Так как точка b не принадлежит вертикальному углу, содержащему $V(a)$, то либо $l_1(a)$ и $l_2(b)$, либо $l_2(a)$ и $l_1(b)$ пересекаются в некоторой точке $\tilde{z}$. Причем из рассмотрения треугольника с вершинами a, b, $\tilde{z}$ и теоремы синусов вытекает

$$\| \tilde{z} = a \| \leqslant \frac{\| b - a \|}{\sin \alpha} < \delta, \ \| \tilde{z} - b \| \leqslant \frac{\| b - a \|}{\sin \alpha} < \delta,$$

а так как $\overline{B(a, \delta)} \subset D$, то $\tilde{z} \in D$ и на основании (6)

$$\| f(a) - f(\tilde{z}) \| \leqslant M \| a - \tilde{z} \|, \ \| f(b) - f(\tilde{z}) \| \leqslant M \| b - \tilde{z} \|.$$

Следовательно,

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant M (\| a - \tilde{z} \| + \| b - \tilde{z} \|) \leqslant \frac{2M}{\sin \alpha} \| b - a \|.$$

Лемма 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть D — область сепарабельного комплексного гильбертова пространства H, S — подмножество в D типа $\mathcal{F}_\sigma$, имеющее нулевую k-меру Хаусдорфа при некотором натуральном k. Предположим, что непрерывное отображение $f: D \to H$ принадлежит семейству $\mathcal{F}(D, D \setminus S)$ и удовлетворяет в каждой точке $a \in D \setminus S$ условию (K), а также одному из условий:*

А) *f обладает в точке a постоянным левым оператором растяжения $R_a^{(l)}$ и существует целое n, $2n > k$, такое, что для любого $\mathbb{C}$-линейного подпространства $F \subset H$ размерности n оператор $f_{zF}(b)$ отличен от нулевого оператора в тех точках b сечения $(a + F) \cap D$, в которых существует отличная от нуля производная $f'_F(b)$ отображения f вдоль F;*

Б) f *обладает в точке a постоянным оператором вращения U_a;*

В) *действительные или мнимые части производных операторов* $L(f, \mathfrak{E}, a) \in \mathcal{P}(f, a)$ *совпадают между собой.*

Тогда f — голоморфное отображение.

Доказательство. Пусть ζ_0 — произвольная точка области D, F — $\mathbb{C}$-линейное подпространство в H размерности n, $2n > k$, и $D' = (\zeta_0 + F) \cap D$. В лемме 1 положим $Q = D'$ и $Q' = D' \setminus S$. По условию S имеет тип $\mathcal{F}_\sigma$, т. е. $S = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$, где S_m — замкнуто. Кроме того, $2n > k$ и k-мера Хаусдорфа множества S равна нулю. Поэтому каждое из множеств $D' \cap S_m$ нигде не плотно в D', ибо в противном случае некоторое S_m содержало бы вещественно $2n$-мерный шар плоскости $\zeta_0 + F \simeq \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ и его k-мера Хаусдорфа была бы отлична от нуля. Отсюда следует, что $D' \cap S$ — первой категории в D', и так как по теореме Александрова [4, с. 419] D' — топологически полно, то множество $Q' = D' \setminus (D' \cap S)$ — не первой (и даже всюду второй) категории в $Q = D'$. Тогда по лемме 1 найдется такой шар $B_0 \subset D$, что f удовлетворяет условию Липшица на множестве $B_0 \cap D'$. По теореме 2 [3] почти в каждой точке $a \in B_0 \cap D'$ существует $\mathbb{R}$-производная $f'_F(a)$ отображения f вдоль подпространства F, а так как $2n > k$ и выполнены условия $A) — B)$, то из лемм 2 — 4 [2] вытекает, что $f|_{D'}$ $\mathbb{C}$-дифференцируемо почти всюду в $B_0 \cap D'$. Те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1 [3], показывают, что отображение $f|_{D'}$ голоморфно в $B_0 \cap D'$.

Поскольку в приведенной части доказательства в качестве D' можно взять любое открытое подмножество $D'' \subset D'$, то каждое такое открытое подмножество содержит открытое подмножество $D'' \cap B_0 \subset D''$, на котором $f|_{D'}$ голоморфно. Следовательно, точки, в которых $f|_{D'}$ голоморфно, образуют открытое всюду плотное в D' подмножество. Обозначим через $\mathcal{O}$ множество всех тех точек $a \in D'$, в которых $f|_{D'}$ голоморфно, т. е. $f|_{D'}$ голоморфно в некоторой окрестности W_a (относительно D') каждой точки $a \in \mathcal{O}$, и положим $\mathcal{O}' = D' \setminus \mathcal{O}$.

Очевидно, что $\mathcal{O}'$ — замкнуто в D', а из непрерывности f вытекает, что если $\mathcal{O}'$ не пусто, то это множество совершенно, т. е. не содержит изолированных точек.

Предположим, что $\mathcal{O}'$ не пусто и приведем это предположение в противоречие с условиями теоремы 2. Рассмотрим два возможных случая.

1. Множество $\mathcal{O}'' = \mathcal{O}' \setminus S$ — не первой категории на $\mathcal{O}'$. В этом случае по лемме 1, в которой положим $Q = \mathcal{O}'$ и $Q' = \mathcal{O}''$, найдется такой шар B_0 с центром $z_0 \in \mathcal{O}'$, что f удовлетворяет условию Липшица с константой M на множестве $B_0 \cap \mathcal{O}' \neq \varnothing$. Пусть r_0 — радиус шара B_0 и B_1 — шар в H с тем же центром z_0, но строго меньшего радиуса $r_1 < r_0$, так что $\overline{B}_1 \subset B_0$. Отображение f непрерывно на $2n$-мерном замкнутом шаре $\overline{B_0 \cap D'} \subset D' \subset \zeta_0 + F \simeq \mathbb{R}^{2n}$ и поэтому ограничено на этом шаре некоторой константой M_1. Положим $M_2 = 2M_1 (r_0 - r_1)^{-1}$, $M_3 = \max(M, M_2)$ и докажем, что для любой точки $a \in B_1 \cap \mathcal{O}'$ и любой точки $z \in D' \cap B_0$ выполняется неравенство

$$\| f(z) - f(a) \| \leqslant M_3 \| z - a \|. \tag{9}$$

Пусть $a \in B_1 \cap \mathcal{O}'$ и $z \in D' \cap B_0$. Если $z \in \mathcal{O}'$, то по уже доказанному неравенство (9) справедливо с константой $M \leqslant M_3$.

Предположим теперь, что $z \in (D' \cap B_0) \setminus \mathcal{O}'$ и пусть G — компонента открытого (относительно D') множества $(D' \cap B_0) \setminus \mathcal{O}'$, содержащая точку z. Тогда ее граница ∂G содержится в объединении множеств $\mathcal{O}'$ и ∂B_0. Покажем, что (9) имеет место $\forall z \in \partial G$. Для $z \in \partial G \cap \mathcal{O}'$ это уже доказано. Пусть $z \in \partial G \cap \partial B_0$. Тогда

$$\| f(z) - f(a) \| \leqslant 2M_1 = 2M_1 (r_0 - r_1)(r_0 - r_1)^{-1} = M_2 (r_0 - r_1) \| z - a \|^{-1} \| z - a \| \leqslant M_2 \| z - a \| \leqslant M_3 \| z - a \|.$$

Следовательно, неравенство (9) выполняется для всех точек $z \in \partial G$. По теореме 12 [5] это неравенство должно выполняться и для всех $z \in G$.

Из (9) и теоремы 2 [3] вытекает, что почти в каждой точке $a \in \mathcal{O}' \cap B_1$ отображение $f|_{D'}$ $\mathbb{R}$-дифференцируемо, а с учетом условий $A) — B)$, применяя леммы 2—4 [2], заключаем, что $f|_{D'}$ $\mathbb{C}$-дифференцируемо почти всюду (относительно $2n$-меры Лебега) на $\mathcal{O}' \cap B_1$. Таким образом, для любого линейного функционала $l: H \to \mathbb{C}$ функция $f_l = l \cdot f|_{B_1 \cap D'}: B_1 \cap D' \to \mathbb{C}$ обладает свойствами:

а) f_l голоморфна в открытом (относительно $B_1 \cap D'$) множестве $(B_1 \cap \cap D') \setminus \mathcal{O}'$;

б) f_l липшицева и почти всюду $\mathbb{C}$-дифференцируема на замкнутом подмножестве $B_1 \cap D' \cap \mathcal{O}' \subset B_1 \cap D'$.

По лемме 11 [6] функция f_l голоморфна в $B_1 \cap D'$. Так как это верно для любого функционала l, то отображение $f|_{B_1 \cap D'}$ голоморфно и, в частности, это отображение голоморфно в точке $z_0 \in \mathcal{O}'$, что противоречит определению $\mathcal{O}'$. Тем самым доказано, что в случае 1 $\mathcal{O}'$ — пустое множество.

2. Пусть теперь множество $\mathcal{O}' \setminus S$ — первой категории на $\mathcal{O}'$. Тогда $S = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$, где множества S_m замкнуты, есть множество второй категории на $\mathcal{O}'$ и поэтому найдутся такие точка $z_0 \in \mathcal{O}'$ и шар B с центром z_0, что $B \cap \mathcal{O}' \subset S_m$ при некотором m. Так как $2n > k$ и k-мера Хаусдорфа множества S равна нулю, то для любого функционала $l: H \to \mathbb{C}$ множество $B \cap \mathcal{O}'$ устранимо для голоморфной в $(B \cap D') \setminus (B \cap \mathcal{O}')$ функции $f_l = l \cdot f|_{B \cap D'}$: $B \cap D' \to \mathbb{C}$ [7, с. 221]. Отсюда следует, что функция f_l голоморфна в $B \cap D'$ $\forall l \in H^*$. Поэтому отображение $f|_{B \cap D'}$ голоморфно в $B \cap \cap D'$ и, в частности, голоморфно в точке $z_0 \in \mathcal{O}'$, что противоречит определению множества $\mathcal{O}'$. Это противоречие показывает, что и в случае 2 множество $\mathcal{O}'$ должно быть пустым.

Следовательно, отображение $f|_{D'}$ голоморфно. А так как это имеет место для любой точки $\zeta_0 \in D$ и любого n-мерного подпространства $F \subset H$, то f голоморфно в D [8, с. 31]. Теорема 2 доказана.

1. *Бондарь А. В., Романенко В. Ю.* О производных операторах и условиях голоморфности отображений гильбертовых пространств // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 10.— С. 1322—1327.
2. *Бондарь А. В., Романенко В. Ю.* Об операторных условиях $\mathbb{C}$-дифференцируемости // Там же.— № 11.— С. 1448—1454.
3. *Бондарь А. В., Романенко В. Ю.* Об условиях голоморфности липшицевых отображений гильбертовых пространств // Там же.— № 12.— С. 1587—1593.
4. *Куратовский К.* Топология : В 2-х т.— М. : Мир, 1966.— Т. 1.— 594 с.
5. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные задачи для голоморфных функций и отображений.— Киев, 1983.— 50 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.65).
6. *Бондарь А. В.* Многомерный вариант одной теоремы Бора // Десятая математическая школа. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1974.— С. 382—395.
7. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества.— М. : Наука, 1985.— 273 с.
8. *Бурбаки Н.* Дифференциальные и аналитические многообразия (сводка результатов).— М. : Мир, 1975.— 220 с.

Получено 11,03,90