УДК 518.517 948

Ле Суан Куанг, Н. Я. Тихоненко

Проекционно-итерационный метод решения некоторых двухэлементных задач теории аналитических функций

Производится обоснование проекционно-итерационного метода приближенного решения нормального случая задачи Газемана и типа Газемана на единичной окружности в пространствах гельдеровских функций. Получены достаточные условия применимости проекционно-итерационного метода, установлены оценки скорости сходимости приближенных решений к точным.

Обгрунтовується проекційно-ітеративний метод наближеного розв'язку нормального випадку задачі Газемана і типу Газемана на одиничному колі у просторах функцій, які задовольняють умову Гельдера. Одержані достатні умови застосування проекційно-ітеративного методу, знайдені оцінки швидкості збіжності наближених розв'язків до точних.

1. Пусть L — единичная окружность с центром в начале координат, разделяющая комплексную плоскость на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-. Рассмотрим следующую задачу.

Найти функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$, аналитические в областях D^+ и D^- соответственно, по одному из краевых условий

$$F^+[\alpha(t)] = G(t)F^-(t) + g(t), \qquad t \in L, \tag{1}$$

$$F^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{F^-(t)} + g(t), \quad t \in L, \tag{2}$$

при условии

$$F^{-}(\infty)=0, \tag{3}$$

где $F^{\pm}(t)$ — краевые значения функций $F^{\pm}(z)$, $\alpha(t)$ — сдвиг, переводящий контур L взаимно однозначно в самого себя в случае задачи (1) с сохранением обхода по контуру L, а в случае задачи (2) — с изменением направления обхода по контуру L на противоположное. В дальнейшем будем предполагать, что известные функции $G(t)$, $g(t)$, $\alpha(t)$ удовлетворяют условиям $G(t)\neq 0$, $\alpha'(t)\neq 0$, $G(t)$, $g(t)$, $\alpha'(t)\in H_{\alpha}^{(r)}$, $H_{\alpha}^{(r)}=H_{\alpha}^{(r)}(L)$, $r\geqslant 0$, $0<\alpha<1$. При данных предположениях относительно функций $G(t)$, $g(t)$, $\alpha(t)$ теория задач (1) и (2) построена в работах [1 — 4]. При этом нахождение решений задач (1), (2) сводится к последовательному решению интегрального уравнения

$$\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{k(t,\tau)}{|\tau-t|^{\lambda}}\varphi(\tau)\,d\tau=\omega(t),\quad t\in L, \tag{4}$$

с различными правыми частями $\omega(t)$. Здесь $\lambda=1-\alpha$ при $r=0$ и $\lambda=0$ при $r\geqslant 1$. Тогда, согласно [1—4], решение уравнения (4), а следовательно, и задач (1), (2), принадлежит пространству $H_{\alpha}^{(r)}$. Отметим, что в [5, 6] производится построение приближенных решений задач (1), (2) на основе последовательного двукратного приближенного решения уравнения (4) с различными правыми частями. В [7—9] обосновываются прямые методы, в частности, методы коллокаций и редукции приближенного решения задач (1), (2). При этом показано [5—9], что скорость сходимости приближенных решений задач (1), (2) к их точным решениям имеет степенной порядок. Это означает, что при повышении точности вычислений необходимо брать большое количество точек коллокаций или увеличивать длину отрезка ряда Фурье искомого решения в случае метода редукции. Однако, применяя метод коллокаций для нахождения приближенных решений задач (1), (2) при данных предположениях относительно функций $G(t)$, $\alpha(t)$ и увеличивая количество точек коллокации, приходим к нахождению решений алгебраических систем больших порядков с плохо обусловленной матрицей, что само по себе является сложной задачей. Применяя метод редукции к нахождению приближенных решений задач (1), (2), для достижения необходимой точности необходимо значительно увеличить объем вычислений за счет вычисления квадратур — коэффициентов соответствующих алгебраических систем. Другими словами, прямые методы приближенного решения задач (1), (2) при повышении точности вычислений обладают невысокой эффективностью. Оказалось, что для повышения точности вычислений эффективней использовать проекционно-итеративные методы, в частности метод осреднения функциональных поправок, предложенный Н. Д. Соколовым.

В настоящей статье обосновывается метод осреднения функциональных поправок приближенного решения задач (1), (2). Отметим, что обоснованию метода осреднения функциональных поправок приближенного решения различных классов дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений посвящено значительное число работ, например, [10—15], при этом в [12] приведено обоснование метода осреднения функциональных поправок в операторной форме.

2. Сформулируем некоторые вспомогательные предложения, которые будем использовать в дальнейшем.

Обозначим через P_n оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(t)\in H_{\beta}=H_{\beta}(L)$ $(\varphi(t)\in C=C(L))$ ее интерполяционный многочлен Лагранжа

$$(P_n\varphi)(t)=\sum_{k=-n}^{n}a_k t^k,\quad a_k=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}\varphi(t_j)\,t_j^{-k} \tag{5}$$

по узлам

$$t_j=e^{\frac{2\pi ij}{2n+1}},\qquad j=\overline{-n,n}. \tag{6}$$

Очевидно, оператор P_n обладает свойством $P_n^2 = P_n$, т. е. оператор P_n является проектором.

Обозначим через S_n оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(t) \in H_\beta$ ($\varphi(t) \in C$) отрезок ее ряда Фурье

$$(S_n\varphi)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \varphi_k t^k, \tag{7}$$

где φ_k — коэффициенты ряда Фурье функции $\varphi(t)$. Нетрудно видеть, что оператор S_n также является проектором, т. е. $S_n^2 = S_n$.

Тогда в силу [8, 16, 17] справедливы леммы.

Лемма 1. *Если функция* $\varphi(t) \in H_\alpha^{(r)}$ *и* $0 < \beta < \alpha$, *то*

$$\| \varphi(t) - (P_n\varphi)(t) \|_{H_\beta} \leqslant d_1 n^{-r-\alpha+\beta} \ln n \| \varphi(t) \|_{H_\alpha},$$

$$\| \varphi(t) - (S_n\varphi)(t) \|_{H_\beta} \leqslant d_2 n^{-r-\alpha+\beta} \ln n \| \varphi(t) \|_{H_\alpha},$$

$$\| \varphi(t) - (P_n\varphi)(t) \|_{C} \leqslant d_3 n^{-r-\alpha} \ln n \| \varphi(t) \|_{H_\alpha},$$

$$\| \varphi(t) - (S_n\varphi)(t) \|_{C} \leqslant d_4 n^{-r-\alpha} \ln n \| \varphi(t) \|_{H_\alpha}.$$

Здесь и ниже d_i — вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от n.

Лемма 2. *Если* $\varphi(t) \in H_\alpha$ *и* $\alpha(t)$ — *сдвиг, удовлетворяющий упомянутым выше условиям, то на контуре* L *справедливы оценки*

$$\| \varphi[\alpha(t)] \|_C = \| \varphi(t) \|_C, \ \| \varphi[\alpha(t)] \|_{H_\alpha} \leqslant (2 + a)^\alpha \| \varphi(t) \|_{H_\alpha},$$

где $a = \max_t |\alpha'(t)|$.

В дальнейшем будем считать, что $\varkappa = \operatorname{ind} G(t) = 0$. Тогда, согласно [1—4], при выполнении условия (3) и предположений относительно функций $G(t)$ и $\alpha(t)$ задачи (1), (2) будут иметь единственное решение $F^{\pm}(t) \in H_\alpha^{(r)}$ при любой правой части $g(t) \in H_\alpha^{(r)}$.

Определим теперь пространства решений и правых частей задач (1), (2). В качестве пространства X — решений задач (1), (2), возьмем пространство функций $F(t)$, представимых в виде $F(t) = F^+(t) - F^-(t)$, где $F^{\pm}(t) \in H_\beta$ или $F^{\pm}(t) \in C$. Норму в пространстве X введем следующим образом:

$$\| F(t) \|_X = \| F^+(t) \|_{H_\beta} + \| F^-(t) \|_{H_\beta}, \tag{8}$$

$$\| F(t) \|_X = \| F^+(t) \|_C + \| F^-(t) \|_C. \tag{9}$$

Лемма 3. *Пространство* X *с нормой* (8) *совпадает с пространством* H_β, *и нормы пространств* X *и* H_β *являются эквивалентными.*

Доказательство леммы следует из того, что каждую функцию $F(t) \in H_\beta$ можно представить по формулам Сохоцкого в виде $F(t) = F^+(t) - F^-(t)$, где $F^{\pm}(t) \in H_\beta$, а также из ограниченности оператора Коши в пространстве H_β [2].

Лемма 4. *Пространство* X *с нормой* (9) *совпадает с пространством* W, *введенным в* [18].

В качестве пространства Y правых частей задач (1), (2) возьмем пространство H_β, если в X введена норма (8), и пространство C, если в X введена норма (9). Норму в Y введем соответственно следующим образом: $\| g(t) \|_Y = \| g(t) \|_{H_\beta}$, $\| g(t) \|_Y = \| g(t) \|_C$. Определим пространство X_n приближенных решений вспомогательных задач $X_n = \{F_n(t) : F_n(t) = F_n^+(t) - F_n^-(t)\}$, где $F_n^+(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$, $F_n^-(t) = -\sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k$.

Очевидно, $X_n \subset X$ и является полным пространством.

3. Для обоснования метода осреднения функциональных поправок задачу (1) запишем в эквивалентном виде

$$F(t) = g(t) - (TF)(t), \tag{10}$$

где

$$(TF)(t) = F^+(t) - F^+[\alpha(t)] + [G(t) - 1]F^-(t). \tag{11}$$

Лемма 5. *Оператор T является линейным и ограниченным оператором из X в Y.*

Доказательство леммы очевидно.

Согласно методу осреднения функциональных поправок приближенное решение уравнения (10) находится следующим образом. Отправляясь от любого элемента $F_0(t) \in X$, последующие приближения определяются по следующим формулам:

$$F_k(t) = g(t) + \{T[F_{k-1} + w_k]\}(t), \tag{12}$$

где

$$w_k(t) = \{P_n[F_k - F_{k-1}]\}(t) \tag{13}$$

в случае метода коллокаций, и

$$w_k(t) = \{S_n[F_k - F_{k-1}]\}(t) \tag{14}$$

в случае метода редукции. Здесь операторы P_n и S_n определяются соответственно формулами (5), (6), (7), а $F_k(t) = F_k^+(t) - F_k^-(t)$ в явном виде находится по формуле

$$F_k(t) = F_k^+(t) - F_k^-(t) = g(t) + F_{k-1}^+(t) - F_{k-1}^+[\alpha(t)] +$$
$$+ [G(t) - 1]F_k^-(t) - w_k^+[\alpha(t)] + [G(t) - 1]w_k^-(t), \tag{15}$$

где $w_k(t) = w_k^+(t) - w_k^-(t)$ и

$$w_k^+(t) = \sum_{i=0}^{n} a_{ik}t^i, \quad w_k^-(t) = -\sum_{i=-n}^{-1} a_{ik}t^i. \tag{16}$$

Здесь a_{ik} — неизвестные постоянные. Для того чтобы найти k-ю итерацию из предыдущей, нужно определить $w_k^+(t)$ и $w_k^-(t)$, т. е. определить коэффициенты a_{ik}. Согласно методу осреднения функциональных поправок неизвестные a_{ik} определяются из следующей системы алгебраических уравнений:

$$P_n(I + P_nT)w_k = P_n\varepsilon_k \tag{17}$$

в случае метода коллокаций, и

$$S_n(I - S_nT)w_k = S_n\varepsilon_k \tag{18}$$

в случае метода редукции, где

$$\varepsilon_k(t) = g(t) - F_{k-1}^+[\alpha(t)] + G(t)F_{k-1}^-(t). \tag{19}$$

В явном виде системы (17) и (18) примут соответственно вид

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ik}[\alpha(t_j)]^i + G(t_j)\sum_{i=-n}^{-1} a_{ik}t_j^i = g(t_j) - F_{k-1}^+[\alpha(t_j)] +$$
$$+ G(t_j)F_{k-1}^-(t_j), \qquad j = -\overline{n, n}; \tag{20}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ik}B_{ij} + \sum_{i=-n}^{-1} G_{ij}a_{ik} = \varepsilon_{kj}, \qquad j = -\overline{n, n}, \tag{21}$$

где t_j — узлы (6), а $\{B_{ij}\}$, $\{G_{ij}\}$, $\{\varepsilon_{kj}\}$ — коэффициенты Фурье соответственно функций $[\alpha(t)]^i$, $G(t)t^i$, $\varepsilon_k(t)$.

Так как $g(t)$, $G(t)$, $\alpha'(t) \in H_\alpha^{(r)}$, то нетрудно видеть, что $\varepsilon_k(t) \in H_\alpha^{(r)}$.

Покажем теперь, что системы (20), (21) разрешимы. В силу лемм 1—4 и работы [8] системы (20), (21) разрешимы при всех n, удовлетворяющих соответственно условиям

$$d_5 n^{\beta-r-\alpha} \ln n < 1, \tag{22}$$

$$d_6 n^{\beta-r-\alpha} \ln n < 1, \tag{23}$$

если в пространстве X введена норма (8); или же системы (20), (21) разрешимы при всех n, удовлетворяющих соответственно условиям

$$d_7 n^{-r-\alpha} \ln n < 1, \tag{24}$$

$$d_8 n^{-r-\alpha} \ln n < 1, \tag{25}$$

если в пространстве X введена норма (9).

Теорема 1. *Пусть* $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$, $\varkappa = 0$, $g(t)$, $G(t)$, $\alpha'(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $\alpha(t)$ *сохраняет ориентацию контура, выполнено условие* (22) *и*

$$q = d_{11}^2 (n^{\beta-r-\alpha} \ln n)^2 \| T \| \| (I - P_n T)^{-1} \|, \tag{26}$$

$$p = d_9 n^{\beta-r-\alpha} \ln n \| T \| \| (I - P_n T)^{-1} \|. \tag{27}$$

Тогда, если $q < 1$, *то последовательность приближенных решений задачи* (1) $F_k(t) = F_k^-(t) - F_k^+(t)$, *построенная по формулам* (12), (13), (15), (16), (19), (20) *сходится к точному решению* $F_*(t) = F_*^+(t) - F_*^-(t)$ *задачи* (1), *т. е.*

$$\lim_{k\to\infty} \| F_*(t) - F_k(t) \|_X = \lim_{k\to\infty} \| F_*^\pm(t) - F_k^\pm(t) \|_{H_\beta} = 0.$$

Кроме того, имеет место оценка погрешности приближенного решения задачи (1)

$$\| F_*^\pm(t) - F_k^\pm(t) \|_{H_\beta} \leqslant \| F_*(t) - F_k(t) \|_{H_\beta} \leqslant pq^{k-1} \| Q(F_* - F_0) \|_{H_\beta}, \tag{28}$$

где p, q *определяются соответственно формулами* (26), (27), I — *единичный оператор*, $Q = I - P_n$, *а* $F_0(t)$ — *начальное приближение.*

Доказательство. Так как $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$, $\varkappa = \operatorname{ind} G(t) = 0$, $g(t)$, $G(t)$, $\alpha'(t) \in H_\alpha^r$ и $\alpha(t)$ сохраняет ориентацию контура L, то согласно [1—4] задача (1) имеет единственное решение $F_*(t) = F_*^+(t) - F_*^-(t)$, принадлежащее пространству X с нормой (8). С другой стороны, при выполнении условия (22) оператор $I - P_n T$ имеет обратный ограниченный оператор $(I - P_n T)^{-1}$. Тогда согласно лемме 5 и ограниченности оператора $(I - P_n T)^{-1}$ постоянные p и q, определяемые соответственно формулам (27) и (26), имеют смысл. Кроме того, при выполнении условия (22) можно определить оператор $R = (I - P_n T)^{-1} P_n$. Тогда для доказательства теоремы необходимо произвести оценку операторов M и N [10—15], определяемых соответственно равенствами $M = TZ$, $Z = I - RT - R$, $N = QM$, $Q = I - P_n$, т. е. необходимо доказать оценки $\| Mg \|_X \leqslant p \| Qg \|_X$ $\forall g(t) \in X$, $\| Ng \|_X \leqslant q \| Qg \|_X$ $\forall g(t) \in X$. Так как $(Mg)(t) = (MQg)(t)$, то

$$Mg = MQg = T(I - RT - R) Qg = T[I - R(I - T)] Qg =$$

$$= T[I - (I - P_n T)^{-1} P_n (I - T)] Qg = T(I - P_n T)^{-1} (Qg - P_n Qg).$$

Тогда согласно лемме 1 и норме (8)

$$\| Mg \|_X = \| T(I - P_n T)^{-1} (Qg - P_n g) \|_X \leqslant$$

$$\leqslant d_9 n^{\beta-r-\alpha} \ln n \| Qg \|_X \| T \| \| (I - P_n T)^{-1} \|.$$

Аналогично

$$\|Ng\|_X = \|QMg\|_X \leqslant d_{10} n^{\beta-r-\alpha} \ln n \|Mg\|_X \leqslant$$

$$\leqslant d_9 d_{10} (n^{\beta-r-\alpha} \ln n)^2 \|T\| \|(I - P_n T)^{-1}\| \|Qg\|_X \leqslant$$

$$\leqslant d_{11}^2 (n^{\beta-r-\alpha} \ln n)^2) \|T\| \|(I - P_n T)^{-1}\| \|Qg\|_X.$$

Будем требовать, чтобы величина q, определяемая равенством (26), была меньше единицы. Тогда, согласно [10—15], итерационный процесс (12), (13), (15), (16), (19), (20) сходится и имеет место оценка (28). Теорема доказана.

Аналогично доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$, $\varkappa = 0$, $g(t)$, $G(t)$, $\alpha'(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $\alpha(t)$ сохраняет ориентацию контура L, выполняется условие* (24) *и*

$$q = d_{12}^2 (n^{-r-\alpha} \ln n)^2 \|T\| \|(I - P_n T)^{-1}\|, \tag{29}$$

$$p = d_{13} n^{-r-\alpha} \ln n \|T\| \|(I - P_n T)^{-1}\|. \tag{30}$$

Тогда, если $q < 1$, то последовательность приближенных решений задачи (1) $\{F_k(t)\} = \{F_k^+(t) - F_k^-(t)\}$, *построенная по формулам* (12), (13), (15), (16), (19), (20), *сходится к точному решению $F_*(t) = F_*^+(t) - F_*^-(t)$ задачи* (1), *т. е.*

$$\lim_{k\to\infty} \|F_k(t) - F_*(t)\|_X = \lim_{k\to\infty} \|F_k^\pm(t) - F_*^\pm(t)\|_G = 0.$$

Кроме того, имеет место оценка погрешности приближенного решения задачи (1)

$$\|F_*^\pm(t) - F_k^\pm(t)\|_C \leqslant \|F_*(t) - F_k(t)\|_X \leqslant pq^{k-1} \|Q(F_* - F_0)\|_C,$$

где q, p определяются соответственно формулами (29), (30), *а X — пространство с нормой* (9).

Теорема 3. *Пусть $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$, $\varkappa = 0$, $g(t)$, $G(t)$, $\alpha'(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $\alpha(t)$ сохраняет ориентацию контура L, выполнено условие* (23) *и*

$$q = d_{14} (n^{\beta-r-\alpha} \ln n)^2 \|T\| \|(I - S_n T)^{-1}\|, \tag{31}$$

$$p = d_{15} n^{\beta-r-\alpha} \ln n \|T\| \|(I - S_n T)^{-1}\|. \tag{32}$$

Тогда, если $q < 1$, то последовательность приближенных решений задачи (1) $\{F_k(t)\} = \{F_k^+(t) - F_k^-(t)\}$, *построенная по формулам* (12), (24), (15), (16), (19), (21), *сходится к точному решению $F_*(t) = F_*^+(t) - F_*^-(t)$ задачи* (1) *и имеет место оценка погрешности ее приближенного решения*

$$\|F_*^\pm(t) - F_k^\pm(t)\|_{H_\beta} \leqslant \|F_*(t) - F_k(t)\|_X \leqslant pq^{k-1} \|Q(F_* - F_0)\|_{H_\beta},$$

где q, p определяется соответственно формулами (31), (32), *X — пространство с нормой* (8), *I — единичный оператор, $Q = I - S_n$, а S_n определяется формулой* (7).

Теорема 4. *Пусть $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$, $\varkappa = 0$, $g(t)$, $G(t)$, $\alpha'(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $\alpha(t)$ сохраняет ориентацию контура L, выполнено условие* (25) *и*

$$q = d_{16} (n^{-r-\alpha} \ln n)^2 \|T\| \|(I - S_n T)^{-1}\|, \tag{33}$$

$$p = d_{17} n^{-r-\alpha} \ln n \|T\| \|(I - S_n T)^{-1}\|. \tag{34}$$

Тогда, если $q < 1$, то последовательность приближенных решений задачи (1) $\{F_k(t)\} = \{F_k^+(t) - F_k^-(t)\}$, *построенная по формулам* (12), (14) — (16), (19), (21), *сходится к точному решению $F_*(t) = F_*^+(t) - F_*^-(t)$ задачи* (1) *и имеет место оценка погрешности ее приближенного решения*

$$\|F_*^\pm(t) - F_k^\pm(t)\|_C \leqslant \|F_*(t) - F_k(t)\|_X \leqslant pq^{k-1} \|Q(F_* - F_0)\|_C,$$

где q, p определяются соответственно формулами (33), (34), *а X — пространство с нормой* (9).

Замечание 1. Если $\alpha = 1$, то в оценках (22)—(25) и оценках для q и p необходимо взять величину $1 - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. При этом теоремы 1—4 сохраняют свой смысл.

4. Для обоснования метода осреднения функциональных поправок задачу (2) запишем в виде

$$F(t) = g(t) + (BF)(t), \tag{35}$$

где $F(t) = F^{+}(t) - F^{-}(t)$, а

$$(BF)(t) = F^{+}(t) - F^{+}[\alpha(t)] - F^{-}(t) + G(t)\overline{F^{-}(t).} \tag{36}$$

Пространства X, Y, X_n те же, что и в задаче (1).

Лемма 6. *Оператор B является аддитивным и ограниченным оператором X в Y.*

Согласно методу осреднения функциональных поправок приближенное решение уравнения (35) ищется следующим образом. Исходя из любого элемента $F_0(t) \in X$, последующие приближения определяются по следующим формулам:

$$F_k(t) = g(t) + (B[F_{k-1} + w_k])(t), \tag{37}$$

где $w_k(t)$ имеют вид (13) или (14). При этом $F_k(t)$ в явном виде находится по формулам

$$F_k(t) = F_k^{+}(t) - F_k^{-}(t) = g(t) + F_{k-1}^{+}(t)\, F_{k-1}^{+}[\alpha(t)] -$$

$$- F_{k-1}^{-}(t) + G(t)\overline{F_{k-1}^{-}(t)} + w_k^{+}(t) - w_k^{+}[\alpha(t)] - w_k^{-}(t) + G(t)\overline{w_k^{-}(t)},$$

а $w^{\pm}(t)$ имеют вид (16) и определяются из уравнений

$$P_n(I - P_nB)\, w_k = P_n\varepsilon_k, \tag{38}$$

$$S_n(I - S_nB)\, w_k = S_n\varepsilon_k, \tag{39}$$

где $\varepsilon_k(t) = g(t) - F_{k-1}^{+}[\alpha(t)] + G(t)\overline{F_{k-1}^{-}(t).}$ Для нахождения неизвестных постоянных a_{ik}, определяющих $w_k^{\pm}(t)$, получим алгебраические системы, соответствующие операторным уравнениям (38), (39)

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ik}[\alpha(t_j)]^i - G(t_j)\sum_{i=-n}^{-1} a_{ik}t_j^{-i} = g(t_j) - F_{k-1}^{+}[\alpha(t_j)] +$$

$$+ G(t_j)\overline{F_{k-1}^{-}(t_j)}, \qquad j = -\overline{n, n}; \tag{40}$$

$$\sum_{i=0}^{n} B_{ij}a_{ik} - \sum_{i=-n}^{-1} a_{ik}G_{ij} = \varepsilon_{kj}, \qquad j = -\overline{n, n}, \tag{41}$$

где t_j определяются по формулам (6), а $\{B_{ij}\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\{G_{ij}\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\{\varepsilon_{kj}\}_{-\infty}^{+\infty}$ — коэффициенты Фурье соответственно функций $[\alpha(t)]^i$, $G(t)t^{-i}$, $\varepsilon_k(t)$.

В силу лемм 1—4 и работы [8] системы (40), (41) будут разрешимы при всех n, удовлетворяющих условиям типа (22)—(25). При этом, как и в случае задачи (1), легко проверяются достаточные условия применимости метода осреднения функциональных поправок приближенного решения задачи (2).

Таким образом, в случае построения приближенного решения задачи (2) методом осреднения функциональных поправок будут справедливы утверждения, аналогичные теоремам 1—4, а замечание 1 сохраняет свою силу.

1. *Квеселава Д. А.* Некоторые граничные задачи теории функций // Тр. Тбил. мат. ин-та.— 1948.— **16**.— С. 33—80.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М. : Наука, 1968.— 512 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Наука, 1977.— 640 с.
4. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М. : Наука, 1977.— 448 с.
5. *Тихоненко Н. Я.* К приближенному решению некоторых краевых задач со сдвигом // Изв. вузов. Математика.— 1975.— № 1.— С. 73—77.
6. *Тихоненко Н. Я.* Приближенные методы в теории краевых задач со сдвигом // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1980.— Вып. 33.— С. 124—132.
7. *Тихоненко Н. Я.* О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений и краевых задач со сдвигом // Докл. АН СССР.— 1979.— **230**, № 2.— С. 132—136.
8. *Тихоненко Н. Я.* Приближенное решение двухэлементных краевых задач со сдвигом Укр. мат. журн.— 1977.— **29**, № 1.— С. 77—88.
9. *Тихоненко Н. Я.* К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений и некоторых краевых задач со сдвигом // Вычисл. и прикл. математика.— 1978.— Вып. 34.— С. 3—16.
10. *Соколов Ю. Д.* Про один метод наближеного розв'язання лінійних інтегральних та диференціальних рівнянь // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1955.— № 2.— С. 107—111.
11. *Соколов Ю. Д.* О методе осреднения функциональных поправок // Укр. мат. журн.— 1959.— **9**, № 1.— С. 82—100.
12. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1980.— 262 с.
13. *Лучка А. Ю.* Достаточные условия сходимости метода осреднения функциональных поправок // Докл. АН СССР.— 1958.— **11**, № 2.— С. 179—182.
14. *Лучка А. Ю.* Приближенное решение линейных операторных уравнений в пространстве Банаха методом Ю. Д. Соколова // Укр. мат. журн.— 1961.— **13**, № 1.— С. 32—45.
15. *Иваницкий В. Г.* Приближенное решение одного класса особых интегральных уравнений со сдвигом методом осреднения функциональных поправок // Укр. мат. журн.— 1968.— **20**, № 5.— С. 700—705.
16. *Золотаревский В. А.* О сходимости коллокационного метода для систем сингулярных интегральных уравнений // Мат. исслед.— 1974.— **9**, вып. 1.— С. 56—69.
17. *Габдулхаев Б. Г.* Аппроксимация в *H*-пространствах и приложения // Докл. АН СССР.— 1975.— **223**, № 6.— С. 1293—1296.
18. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее приложение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1968.— 287 с.

Одес. ун-т

Получено 07.12.87