УДК 517.925:519.21

Р. В. Бобрик

Об одном свойстве устойчивых систем линейных стохастических уравнений

Получено соотношение между экспоненциальной среднеквадратической устойчивостью систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с гауссовскими коэффициентами и этой же устойчивостью соответствующих линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Одержано співвідношення між експоненціальною середньоквадратичною стійкістю систем лінійних звичайних деференціальних рівнянь з гаусівськими коефіцієнтами та тією ж стійкістю відповідних лінійних стохастичних диференціальних рівнянь Іто.

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dx_1(t) = A_1(t)\,x_1(t)\,dt + C_1(t)\,x_1(t)\,dw(t), \quad t \in R^+, \tag{1}$$

а также систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_2(t)/dt = A_2(t)\,x_2(t) + C_2(t)\,x_2(t)\,\xi(t), \quad t \in R^+. \tag{2}$$

Здесь $A_1(t)$, $A_2(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$ — квадратные матрицы порядка N с непрерывными и ограниченными при $t \in R^+$ коэффициентами, $w(t)$ — стандартный винеровский случайный процесс, а $\xi(t)$ — гауссовский стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и почти наверное непрерывными траекториями.

Определение. *Тривиальное решение системы* (1) *называется экспоненциально устойчивым в среднеквадратичном, если для произвольного решения* $x_1(t)$ *системы* (1) *с неслучайным начальным условием* $x_1(t_0)$, $\exists d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $\forall t,\ t_0 \in R^+$, $t \geqslant t_0$,

$$M\,|x_1(t)|^2 \leqslant d_1\,|x_1(t_0)|^2 \exp\{-d_2(t-t_0)\}. \tag{3}$$

Аналогично определяется экспоненциальная среднеквадратическая устойчивость тривиального решения системы (2). Для системы (1) эта устойчивость исследована весьма подробно [1—4], но исследование ее для системы (2) представляет значительные трудности.

Р. З. Хасьминский [2, с. 197] высказал предположение, что каждый результат относительно устойчивости систем стохастических дифференциальных уравнений сам обладает определенной «устойчивостью» в том смысле, что из устойчивости тривиального решения системы стохастических дифференциальных уравнений следует устойчивость тривиального решения соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений с достаточно регулярными случайными возмущениями, которые в определенном смысле близки к гауссовскому белому шуму. В настоящей статье для линейных систем приводится обоснование этого предположения в том случае, когда рассматривается экспоненциальная устойчивость в среднеквадратичном.

Теорема. *Пусть случайный коэффициент* $\xi(t)$ *уравнения* (2) *зависит от некоторого положительного параметра* τ *такого, что для его корреляционной функции* $B_\tau(t-s) = M\xi(t)\,\xi(s)$ $\forall t,\ s \in R^+$,

$$|B_\tau(t-s)| \leqslant \beta\tau \exp\{-\tau\,|t-s|\}, \quad \beta = \text{const}, \tag{4}$$

и существует $\lim\limits_{\tau\to\infty}\int\limits_0^\infty B_\tau(t)\,dt = g$. *Матрицы* $A_1(t)$ *и* $C_1(t)$ *системы* (1) *имеют вид*

$$A_1(t) = A_2(t) + gC_2^2(t), \quad C_1(t) = \sqrt{2g}C_2(t). \tag{5}$$

Тогда если тривиальное решение системы (1) *с коэффициентами* (5) *экспоненциально устойчиво в среднеквадратичном, то* $\exists\tau_0 > 0$ *такое, что* $\forall\tau \geqslant \tau_0$ *тривиальное решение системы* (2) *также будет экспоненциально устойчивым в среднеквадратичном.*

Доказательство. Из системы (2) следует, что попарные произведения компонент вектора $x_2(t) = (y_1(t), \ldots, y_N(t))'$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$d(y_{i_1}(t)\,y_{i_2}(t))/dt = \sum_{i_3=1}^{N}(a_{i_1i_3}(t) + \xi(t)\,c_{i_1i_3}(t))\,y_{i_3}(t)\,y_{i_2}(t) +$$

$$+ \sum_{i_3=1}^{N}(a_{i_2i_3}(t) + \xi(t)\,c_{i_2i_3}(t))\,y_{i_1}(t)\,y_{i_3}(t), \quad t\in R^+, \quad i_1, i_2 = \overline{1, N}, \tag{6}$$

где $a_{ij}(t)$ и $c_{ij}(t)$ — элементы матриц $A_2(t)$ и $C_2(t)$ соответственно.

Пусть $u(t)$ — вектор-столбец из элементов $y_1(t)\,y_i(t)$, $i = \overline{1, N}, \ldots, y_N \times (t)\,y_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, а $A(t)$ и $C(t)$ — квадратные матрицы порядка N^2

$$A(t) = [a_{ij}(t)\,E] + \operatorname{diag}(A_2(t), \ldots, A_2(t)),$$

$$C(t) = [c_{ij}(t)\,E] + \operatorname{diag}(C_2(t), \ldots, C_2(t)), \tag{7}$$

где $[a_{ij}(t)\,E]$, $[c_{ij}(t)E]$ — блочные квадратные матрицы порядка N^2, содержащие квадратные блоки $a_{ij}(t)\,E$, $c_{ij}(t)\,E$, $i,\ j = \overline{1, N}$, E — единичная матрица порядка N, $\operatorname{diag}(A_2(t), \ldots, A_2(t))$, $\operatorname{diag}(C_2(t), \ldots, C_2(t))$ — блочно-диагональные матрицы, содержащие блоки $A_2(t)$, $C_2(t)$ на главной диагонали, причем все остальные их элементы равны нулю. С учетом этих обозначений систему (6) можно представить в матрично-векторном виде

$$du(t)/dt = A(t)\,u(t) + \xi(t)\,C(t)\,u(t), \quad t\in R^+. \tag{8}$$

Отметим, что для экспоненциальной устойчивости в среднеквадратичном тривиального решения системы (2) необходимо и достаточно, чтобы для произвольного решения $u(t)$ системы (8) с неслучайным начальным условием $u(t_0)$, $\exists d_3 > 0$, $d_4 > 0$, $\forall t$, $t_0 \in R^+$, $t \geqslant t_0$, выполнялось соотношение

$$|Mu(t)| \leqslant d_3\,|u(t_0)|\exp\{-d_4(t - t_0)\}. \tag{9}$$

Пусть $X(t, t_1)$ — матрица Коши невозмущенной ($\xi(t) \equiv 0$) системы (8). В силу предположений об элементах матрицы $A_2(t)$ следует, что $\exists b > 0$, $a \in R$, $\forall t$, $t_1 \in R^+$, $t \geqslant t_1$, справедлива оценка

$$|X(t, t_1)| \leqslant b\exp(-a(t - t_1)\}. \tag{10}$$

Обозначим через $X_1(t, t_1)$ решение матричного интегро-дифференциального уравнения

$$dX_1(t, t_1)/dt = A(t)\,X_1(t, t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} B_\tau(t - t_2)\,C(t)\,X(t, t_2)\,C(t_2)\,X_1(t_2, t_1)\,dt_2,$$

$$X_1(t_1, t_1) = E. \tag{11}$$

Из предположений об элементах матриц $A_2(t)$, $C_2(t)$ и оценки (4) следует, что $\exists b_1 > 0$, $a_1 \in R$, $\forall t, t_1 \in R^+$, $t \geqslant t_1$,

$$|X_1(t, t_1)| \leqslant b_1\exp\{-a_1(t - t_1)\}. \tag{12}$$

Справедливость оценок (10), (12) вытекает из леммы Гроноулла — Беллмана.

Введем следующие обозначения:

$$b_2 = \sup_{t\in R^+} |C_2(t)|, \quad f_1(\tau, \sigma) = \frac{bb_1 b_2^2 \beta^2 \tau^2}{(a-\sigma+\tau)(a_1-\sigma)},$$

$$f_2(\tau, \sigma) = \frac{2bb_2\beta\tau}{a-\sigma+2\tau}, \quad g_2(\tau, \sigma) = \frac{4b^2 b_2^2}{(a-\sigma+\tau)(a-\sigma+2\tau)},$$

$$f_j(\tau, \sigma) = \frac{bb_2\beta\tau}{a-\sigma+j\tau}, \quad g_j(\tau, \sigma) = \frac{jbb_2}{a-\sigma+j\tau}, \quad j = 3, 4, \ldots .$$

Лемма 1. *Пусть действительный параметр σ удовлетворяет неравенствам*

$$\sigma < \min(a_1, a+\tau), \quad \max_{j\in N} (f_j(\tau, \sigma)\, g_{j+1}(\tau, \sigma)) \leqslant 1/4,$$

$$\frac{4b^2 b_2^2 \beta\tau}{(a-\sigma+\tau)(a-\sigma+2\tau)} < 1. \tag{13}$$

Тогда для произвольного решения $u(t)$ системы (8) с неслучайным начальным условием $u(t_0)$, $\forall t, t_0 \in R^+$, $t \geqslant t_0$, справедливо соотношение

$$|Mu(t)| \leqslant 2b_1 |u(t_0)| e^{-\sigma t}. \tag{14}$$

Доказательство. Заметим, что решение системы (8) является неупреждающим функционалом от процесса $\xi(t)$, причем из почти наверной сходимости метода последовательных приближений для решения системы (8) следует, что почти наверное существуют вариационные производные $\delta^m u(t)/\delta\xi(s_1)\ldots\delta\xi(s_m)$, $m \in N$, и если $\exists i = \overline{1, m}$ такое, что $t < s_i$, то $\delta^m u(t)/\delta\xi(s_1)\ldots\delta\xi(s_m) \equiv \vec{0}$.

С помощью матрицы $X(t, t_1)$ систему (8) можно представить в интегральной форме

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} X(t, t_1)\, \xi(t_1)\, C(t_1)\, u(t_1)\, dt_1 + X(t, t_0)\, u(t_0). \tag{15}$$

Применяя операцию вариационного дифференцирования к обеим частям уравнения (15) и учитывая правила вариационного дифференцирования [5], получаем, что вариационные производные решения уравнения (15) удовлетворяют системе

$$\frac{\delta^m u(t)}{\delta\xi(s_1)\ldots\delta\xi(s_m)} = \int_{t_0}^{t} X(t, t_1)\, \xi(t_1)\, C(t_1) \frac{\delta^m u(t_1)}{\delta\xi(s_1)\ldots\delta\xi(s_m)}\, dt_1 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \Theta(t - s_j)\, X(t, s_j)\, C(s_j) \frac{\delta^{m-1} u(s_j)}{\delta\xi(s_1)\ldots\delta\xi(s_{j-1})\,\delta\xi(s_{j+1})\ldots\delta\xi(s_m)}, \tag{16}$$

где $\Theta(t)$ – функция Хэвисайда. С помощью леммы Гронуолла — Беллмана и оценки некоторого функционала от гауссовского процесса [2, с. 55] несложно показать, что у решения системы (16) существуют моменты произвольного порядка.

Из формулы интегрирования по частям по гауссовой мере в бесконечномерных пространствах [6, с. 79; 7] следует

$$M\left[\xi(t) \frac{\delta^m u(t)}{\delta\xi(s_1)\ldots\delta\xi(s_m)}\right] = \int_{t_0}^{t} B_\tau(t - s_{m+1})\, M \frac{\delta^{m+1} u(t)}{\delta\xi(s_1)\ldots\delta\xi(s_{m+1})}\, ds_{m+1}. \tag{17}$$

Применив операцию математического ожидания к системе (8), воспользуемся формулой (17) при $m = 0$

$$\frac{dMu(t)}{dt} = A(t)\, Mu(t) + C(t) \int_{t_0}^{t} B_\tau(t - s_1)\, M \frac{\delta u(t)}{\delta\xi(s_1)}\, ds_1. \tag{18}$$

Усредняя систему (16) при $m=1$ и используя (17), получаем

$$M\frac{\delta u(t)}{\delta\xi(s_1)}=\int_{t_0}^{t}X(t,t_1)C(t_1)\int_{t_0}^{t_1}B_\tau(t_1-s_2)\times$$
$$\times M\frac{\delta^2 u(t_1)}{\delta\xi(s_1)\delta\xi(s_2)}ds_2dt_1+\Theta(t-s_1)X(t,s_1)C(s_1)Mu(s_1). \qquad (19)$$

Обозначим $\varphi_1(t)=Mu(t)$, $\varphi_m(t,s_1,\ldots,s_m)=M\,\delta^m u(t)/\delta\xi(s_1)\ldots\delta\xi(s_m)$, $m=2,3,\ldots$. Подставив равенства (19) в (18), полученное уравнение с помощью матрицы $X_1(t,t_1)$ представим в интегральной форме

$$\varphi_1(t)=\int_{t_0}^{t}X_1(t,t_1)\int_{t_0}^{t_1}B_\tau(t_1-s_1)\int_{t_0}^{t_1}C(t_1)X(t_1,t_2)C(t_2)\int_{t_0}^{t_2}B_\tau(t_2-s_2)\varphi_2(t_2,s_1,s_2)\times$$
$$\times ds_2dt_2ds_1dt_1+X_1(t,t_0)\varphi_1(t_0). \qquad (20)$$

Усреднив (16) при $m=2$, воспользуемся равенствами (17) и (19)

$$\varphi_2(t,s_1,s_2)=\int_{t_0}^{t}X(t,t_1)C(t_1)\int_{t_0}^{t_1}B_\tau(t_1-s_3)\varphi_3(t_1,s_1,s_2,s_3)ds_3dt_1+$$
$$+\sum_{\substack{j_1=j_2=1\\ j_1\neq j_2}}^{2}\Theta(t-s_{j_1})\Theta(s_{j_1}-s_{j_2})X(t,s_{j_1})C(s_{j_1})\Big(\int_{t_0}^{s_{j_1}}X(s_{j_1},t_1)C(t_1)\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t_1}B_\tau(t_1-s_3)\varphi_2(t_1,s_{j_2},s_3)ds_3dt_1+X(s_{j_1},s_{j_2})C(s_{j_2})\varphi_1(s_{j_2})\Big). \qquad (21)$$

Снова усредняя систему (16) при $m>2$ и используя (17), получаем бесконечную цепочку систем уравнений

$$\varphi_m(t,s_1,\ldots,s_m)=\int_{t_0}^{t}X(t,t_1)\int_{t_0}^{t_1}B_\tau(t_1-s_{m+1})C(t_1)\varphi_{m+1}(t_1,s_1,\ldots,s_{m+1})\times$$
$$\times ds_{m+1}dt_1+\sum_{j=1}^{m}\prod_{j_1=1}^{m}\Theta(t-s_j)\Theta(s_j-s_{j_1})X(t,s_j)C(s_j)\times \qquad (22)$$
$$\times\varphi_{m-1}(s_j,s_1,\ldots,s_{j-1},s_{j+1},\ldots,s_m),\quad m=3,4,\ldots.$$

Пусть функции $\varphi_1^{(m)}(t)$, $\varphi_2^{(m)}(t,s_1,s_2),\ldots,\varphi_m^{(m)}(t,s_1,\ldots,s_m)$ удовлетворяют первым m системам цепочки (20)—(22), если в последней из них $\varphi_{m+1}(t_1,s_1,\ldots,s_{m+1})\equiv0$, т. е. удовлетворяют замыканию цепочки (20)—(22). Докажем, что как цепочка (20)—(22), так и ее замыкание имеют единственное решение. Для этой цели введем банахово пространство G, состоящее из бесконечных последовательностей функций $\eta=\{\eta_1(t),\ldots$ $\ldots,\eta_m(t,s_1,\ldots,s_m),\ m=2,3,\ldots\}$ таких, что $\eta_m(t,s_1,\ldots,s_m)\equiv0$, если $\exists i=\overline{1,m}$, $t<s_i$, и зададим в нем норму

$$\|\eta\|=\max\{d\sup_{t\in R^+}(\exp\{\sigma_1t\}|\varphi_1(t)|),\ \sup_{k=2,3,\ldots}d^k\sup_{t\in R^+}(\exp\{t(\sigma_1-k\tau)\}\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t}\ldots\int_{t_0}^{t}\exp\{\tau(s_1+\ldots+s_k)\}|\varphi_k(t,s_1,\ldots,s_k)|ds_1\ldots ds_k)\},$$

где $\sigma_1>0$, $d>0$. Цепочку (20)—(22) представим как линейное уравнение в этом пространстве $\varphi=F\varphi+z$, где оператор F и свободный член z определяются правой частью цепочки. При сформулированных в теореме предположениях для нормы оператора F несложно получить оценку

$$\|F\|\leqslant\max\left(\frac{1}{d}f_1(\tau,\sigma_1),\ \sup_{k=2,3,\ldots}\left(\frac{1}{d}f_k(\tau,\sigma_1)+dg_k(\tau,\sigma_1)\right)\right).$$

Отсюда следует, что выбором σ_1 и d всегда можно добиться, чтобы $\| F \| < 1$, а значит, у цепочки (20)—(22) существует единственное решение. Аналогично доказывается существование единственного решения и у ее замыкания.

Введем следующие обозначения:

$$\delta_{nm}^{(1)}(\tau, \sigma) = \sup_t (e^{-\sigma t} \mid \varphi_1^{(n)}(t) - \varphi_1^{(m)}(t) \mid), \quad \gamma_m^{(1)}(\tau, \sigma) = \sup_t (e^{-\sigma t} \mid \varphi_1^{(m)}(t) \mid),$$

$$\delta_{nm}^{(j)}(\tau, \sigma) = \sup_t \Bigl(\exp\{-t(\sigma + j\tau)\} \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{t} \exp\{(s_1 + \ldots + s_j)\tau\} \times$$

$$\times \mid \varphi_j^{(n)}(t, s_1, \ldots, s_j) - \varphi_j^{(m)}(t, s_1, \ldots, s_j) \mid ds_1 \ldots ds_j \Bigr), \quad j = \overline{1, n}, \quad \gamma_m^{(j)}(\tau, \sigma) =$$

$$= \sup_t \Bigl(\exp\{-t(\sigma + j\tau)\} \int_{t_0}^{t} \ldots \int_{t_0}^{t} \exp\{(s_1 + \ldots + s_j)\tau\} \mid \varphi_j^{(m)}(t, s_1, \ldots, s_j) \mid \times$$

$$\times d_{s_1} \ldots ds_j \Bigr), \quad j = \overline{2, m}, \quad n < m,$$

где σ — некоторый действительный параметр. С помощью леммы Гронуолла — Беллмана можно показать, что существует такое σ, для которого правая часть этих обозначений конечна.

Из (20) — (22) следует, что если $\exists i = \overline{1, m}, \quad t < s_i$, то $\varphi_j^{(m)}(t, s_1, \ldots, s_m) \equiv 0$. Учитывая это, а также условия леммы, получаем неравенства

$$\delta_{nm}^{(1)}(\tau, \sigma) \leqslant f_1(\tau, \sigma)\, \delta_{nm}^{(2)}(\tau, \sigma), \quad \delta_{nm}^{(j)}(\tau, \sigma) \leqslant f_j(\tau, \sigma)\, \delta_{nm}^{(j+1)}(\tau, \sigma) +$$

$$+ g_j(\tau, \sigma)\, \delta_{nm}^{(j-1)}(\tau, \sigma), \quad j = \overline{2, n-1}, \quad \delta_{nm}^{(n)}(\tau, \sigma) \leqslant f_n(\tau, \sigma)\, \gamma_m^{(n+1)}(\tau, \sigma) +$$

$$+ g_n(\tau, \sigma)\, \delta_{nm}^{(n-1)}(\tau, \sigma), \quad \gamma_m^{(1)}(\tau, \sigma) \leqslant f_1(\tau, \sigma)\, \gamma_m^{(2)}(\tau, \sigma) + b_1 \mid u(t_0) \mid,$$

$$\gamma_m^{(j)}(\tau, \sigma) \leqslant f_j(\tau, \sigma)\, \gamma_m^{(j+1)}(\tau, \sigma) + g_j(\tau, \sigma)\, \gamma_m^{(j-1)}(\tau, \sigma), \quad j = \overline{2, m-1},$$

$$\gamma_m^{(m)}(\tau, \sigma) \leqslant g_m(\tau, \sigma)\, \gamma_m^{(m-1)}(\tau, \sigma), \tag{23}$$

где σ удовлетворяет неравенствам (13). Из теоремы Ворпитского по аналитической теории цепных дробей [8, с. 42] следует, что при выполнении (13) всегда положительна цепная дробь

$$D_j^{(k)}(\tau, \sigma) = 1 - \cfrac{f_j(\tau, \sigma)\, g_{j+1}(\tau, \sigma)}{1 - \cfrac{f_{j+1}(\tau, \sigma)\, g_{j+2}(\tau, \sigma)}{1 - \cfrac{\vdots}{- f_{k-1}(\tau, \sigma)\, g_k(\tau, \sigma)}}}$$

$$j = \overline{1, k-1}, \quad k = \overline{2, m}.$$

Учитывая это, из неравенств (23) получаем оценки

$$\delta_{nm}^{(1)}(\tau, \sigma) \leqslant \frac{\prod_{j=1}^{n} f_j(\tau, \sigma)\, \gamma_m^{(n+1)}(\tau, \sigma)}{\prod_{j=1}^{n-1} D_j^{(n)}(\tau, \sigma)}, \quad \delta_{nm}^{(k)}(\tau, \sigma) \leqslant \frac{\prod_{j=k}^{n} f_j(\tau, \sigma)\, \gamma_m^{(n+1)}(\tau, \sigma)}{\prod_{j=k}^{n-1} D_j^{(n)}(\tau, \sigma)} +$$

$$+ \frac{g_k(\tau, \sigma)\, \delta_{nm}^{(k-1)}(\tau, \sigma)}{D_k^{(n)}(\tau, \sigma)}, \quad k = \overline{2, n}, \quad \gamma_m^{(n+1)}(\tau, \sigma) \leqslant \frac{b_1 \mid u(t_0) \mid \prod_{j=2}^{n+1} g_j(\tau, \sigma)}{\prod_{j=1}^{n+1} D_j^{(m)}(\tau, \sigma)}. \tag{24}$$

Из теоремы Ворпитского также следует, что $D_j^{(k)}(\tau, \sigma) \geqslant 1/2$, поэтому, учитывая (24), существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_1^{(m)}(t)$, который удовлетворяет цепочке (20) — (22), а значит совпадает с $Mu(t)$ и для него имеет место оценка (14). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть для матрицы Коши $X_2(t, t_1)$ системы*

$$dy(t)/dt = A(t)\,y(t) + gC^2(t)\,y(t), \quad t \in R^+, \tag{25}$$

$$\exists b_2 > 0, \quad a_2 \in R, \quad \forall t, t_1 \in R^+, \quad t \geqslant t_1, \quad |X_2(t, t_1)| \leqslant b_2 \exp\{-a_2(t - t_1)\}. \tag{26}$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \tau_1 > 0, \quad \forall \tau \geqslant \tau_1, \quad \forall t, t_1 \in R^+, \quad t \geqslant t_1, \quad |X_1(t, t_1)| \leqslant \\ \leqslant b_2 \exp\{(-a_2 + \varepsilon)(t - t_1)\}. \tag{27}$$

Для доказательства леммы представим с помощью матрицы $X_2(t, t_1)$ уравнение (11) в интегральной форме

$$X_1(t, t_1) = \int\limits_{t_1}^{t} X_2(t, t_2)\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} B_\tau(t_2 - t_3)\,C(t_2)\,X(t_2, t_3)\,C(t_3)\,X_1(t_3, t_1)\,dt_3 - \\ - gC^2(t_2)\,X_1(t_2, t_1)\Big)\,dt_2 + X_2(t, t_1) = \int\limits_{t_1}^{t}\Big(\int\limits_{t_2}^{t} B_\tau(t_2 - t_3)\,X_2(t, t_3)\,C(t_3) \times \\ \times X(t_3, t_2)\,C(t_2)\,dt_3 - gX_2(t, t_2)\,C^2(t_2)\Big)\,X_1(t_2, t_1)\,dt_2 + X_2(t, t_1).$$

Из условия (26) и леммы Гронуолла — Беллмана следует $\forall \tau > -a + a_2$

$$|X_1(t, t_1)| \leqslant b_2 \exp\Big\{-a_2(t - t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} \sup_{t_2 < t < \infty} (e^{a_2(t - t_2)}\Big|\int\limits_{t_2}^{t} B_\tau(t_2 - t_3)\,X_2(t, t_3) \times \\ \times C(t_3)\,X(t_3, t_2)\,C(t_2)\,dt_3 - gX_2(t, t_2)\,C^2(t_2)\Big|\,dt_2. \tag{28}$$

Отсюда, учитывая неравенство (4) и δ-образность при $\tau \to \infty$ функции $\tau \exp\{-\tau|t|\}$, непрерывность матриц $X(t, t_1)$, $X_2(t, t_1)$, $C(t)$, получаем, что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \tau_2 > -a + a_2$, $\forall \tau \geqslant \tau_2$, $\forall t_2 \in (t_1, t)$ подынтегральный член в оценке (28) будет меньше ε. Лемма 2 доказана.

Теперь заметим, что для вторых моментов компонент решения системы (1) на основании формулы Ито можно получить замкнутую систему уравнений [1; 2, с. 245], которая, с учетом обозначений (7), совпадает с системой (25). Так как система (1) экспоненциально устойчива в среднеквадратичном, то можно выбрать $a_2 > 0$, а из леммы 2 следует, что $\exists \tau_3 \geqslant \tau_2$, $\forall \tau \geqslant \tau_3$, и в оценке (12) можно выбрать $a_1 > 0$. Из леммы 1 вытекает, что $\exists \tau_0 \geqslant \tau_3$, $\forall \tau \geqslant \tau_0$ параметр σ в неравенствах (13) можно взять положительным. Теорема доказана.

1. *Гихман И. И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Предельные теоремы и статист. выводы.— Ташкент : Ин-т математики АН УзССР, 1966.— С. 14—45.
2. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М.: Наука, 1969.— 367 с.
3. *Sasagawa T.* Sufficient condition for the exponential p-stability and p-stabilizality // Int. J. Syst. Sci.— 1982.— 13, N 4.— P. 399—408.
4. *Пакшин П. В.* Устойчивость линейных и специальных нелинейных стохастических систем с параметрическими шумами // Динамика неоднород. систем. Материалы семинара.— М. : ВНИИ систем. исслед., 1983.— С. 26—40.
5. *Авербух В. И., Смолянов О. Г.* Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // Успехи мат. наук.— 1967.— **22**, № 6.— С. 201—260.
6. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М. : Наука, 1983.— 384 с.
7. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.* Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных статистических задачах физики // Успехи физ. наук.— 1973.— **110**, № 4.— С. 499—536.
8. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fraction.— New York : Van Nostrand, 1948.— 433 p.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 03.05.88