УДК 519.2

Г. М. Фельдман

О группах, допускающих характеризацию гауссовского распределения равнораспределенностью одночлена и линейной статистики

Приведено полное описание локально компактных абелевых групп, на которых возможна характеризация гауссовского распределения одинаковой распределенностью одночлена и линейной статистики.

Наведено повний опис локально компактних абелевих груп, на яких можлива характеризація гаусівського розподілу однаковою розподільністю одночлена та лінійної статистики.

Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа $Y = X^*$ — ее группа характеров, (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$, C_X — компонента нуля группы X. Если G — подгруппа в X, то через $A(Y, G)$ обозначим ее аннулятор $A(Y, G) = \{y \in Y : (x, y) = 1$ для всех $x \in G\}$. Обозначим также через $\hat{\mu}(y) = \int\limits_X (x, y)\, d\mu \times (x)$ характеристическую функцию распределения μ.

Распределение μ на группе X называется гауссовским, если его характеристическая функция представима в виде

$$\hat{\mu}(y) = (x, y) \exp\{-\varphi(y)\}, \tag{1}$$

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(y_1 + y_2) + \varphi(y_1 - y_2) = 2[\varphi(y_1) + \varphi(y_2)] \tag{2}$$

для любых $y_1, y_2 \in Y$ (см. [1]).

Гауссовское распределение μ называется симметричным, если в (1) $x = 0$.

Множество гауссовских и симметричных гауссовских распределений на группе X обозначим соответственно черед $\Gamma(X)$ и $\Gamma^s(X)$. Обозначим через $I(X)$ множество всех сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X, а через Z, Q и R — группы целых, рациональных и вещественных чисел.

Пусть $n \in Z$. Рассмотрим гомоморфизм $f_n : X \to X$, определяемый формулой $f_n(x) = nx$. Образ группы X при этом отображении обозначим через $X^{(n)}$. Пусть $A = \{a_j\}_{j=0}^s$ — произвольное множество целых чисел. Обозначим через $\Gamma_A(X)$ класс распределений μ на группе X, обладающих следующим свойством: если ξ_j — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X и с распределением μ, то линейные формы $a_0\xi_1$ и $a_1\xi_1 + \ldots + a_s\xi_s$ одинаково распределены. Легко видеть, что $\mu \in \Gamma_A(X)$ тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\hat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\mu}(a_0 y) = \hat{\mu}(a_1 y) \ldots \hat{\mu}(a_s y), \quad y \in Y. \tag{3}$$

Множество $A = \{a_j\}_{j=1}^{s}$ целых чисел называется допустимым для группы X, если $X^{(a_j)} \neq \{0\}$ при всех $j = 1, \ldots, s$. Условие допустимости множества A при рассмотрении линейной формы $a_1\xi_1 + \ldots + a_s\xi_s$, где ξ_j — случайные величины со значениями в группе X, является групповым аналогом условия $a_j \neq 0$ при всех $i = 1, \ldots, s$ в случае, когда $X = R$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(X)$ совокупность допустимых для группы X множеств $A = \{a_j\}_{j=0}^{s}$, $s \geqslant 2$, взаимно простых целых чисел, удовлетворяющих условию

$$a_0^2 = a_1^2 + \ldots + a_s^2. \tag{4}$$

Пусть $A \in \mathfrak{M}(X)$. Положим $I_A(X) = I(X) \cap \Gamma_A(X)$. Как доказано в [2], $m_K \in I_A$ тогда и только тогда, когда $K^{(a_0)} = K$. Из (2) и (4) следует, что $\Gamma^s(X) \subset \Gamma_A(X)$. Поскольку из (3) вытекает, что $\Gamma_A(X)$—полугруппа, то $I_A(X) * \Gamma^s(X) \subset \Gamma_A(X)$.

В [2] было дано полное описание групп X, для которых равенство *

$$I_A(X) * \Gamma^s(X) = \Gamma_A(X) \tag{5}$$

имеет место при любом $A \in \mathfrak{M}(X)$. Тем самым было получено полное описание групп, на которые может быть перенесена известная теорема Ю. В. Линника, характеризующая гауссовское распределение равнораспределенностью одночлена и линейной формы [3].

Будем говорить, что группа X допускает характеризацию гауссовского распределения равнораспределенностью одночлена и линейной статистики, если при некотором $A \in \mathfrak{M}(X)$ справедливо равенство (5). Следующая теорема дает полное описание таких групп.

Теорема 1. *Для того чтобы на группе X при некотором $A \in \mathfrak{M}(X)$ имело место равенство* (5), *необходимо и достаточно, чтобы при некотором простом p группа C_X не содержала элементов порядка p.*

Нам понадобятся некоторые факты, относящиеся к структуре локально компактных абелевых групп и теории двойственности Понтрягина (см., например, [4]).

Доказательство будет опираться на следующие леммы.

Лемма 1 [5]. *Пусть $A = \{a_j\}_{j=0}^{s}$, где $a_0 = n$, $a_1 = \ldots = a_s = 1$, $s = n^2$, $n \geqslant 2$. Тогда для выполнения равенства* (5) *необходимо и достаточно, чтобы группа X удовлетворяла условию:* (α) *для любой компактной подгруппы $K \subset X$, для которой $K^{(n)} = K$, выполнено $(K^*)^{(n)} = K^*$.*

Лемма 2. *Группа X тогда и только тогда удовлетворяет условию* (α), *когда*

$$\{x \in C_X : nx = 0\} = \{0\}. \tag{6}$$

Доказательство. По структурной теореме для связных локально компактных абелевых групп группа C_X топологически изоморфна группе вида $C_X \approx R^m + G$, где $m \geqslant 0$, а G — связная компактная группа. Так как группа G связна, то для любого $l \in Z$, $l \geqslant 1$, выполнено $G^{(l)} = G$. Если группа X удовлетворяет условию (α) то, в частности, $(G^*)^{(n)} = G^*$. Тогда $(C_X^*)^{(n)} = C_X^*$, что равносильно (6), ибо для любой группы X, очевидно, имеет место равенство $A(X, Y^{(n)}) = \{x \in X : nx = 0\}$.

Пусть теперь выполнено (6), а K — компактная подгруппа в X, для которой $K^{(n)} = K$. Обозначим $H = K^*$ и проверим, что $H^{(n)} = H$. Рассмотрим в H подгруппу H', состоящую из всех элементов, неограничено делимых на n. Проверим вначале, что фактор-группа $L = H/H'$ не содержит отличных от нуля неограничено делимых на n элементов и элементов конечного порядка. Пусть $[h] \in L$ — неограничено делимый на n элемент.

* Равенство (5) означает, что любое распределение $\mu \in \Gamma_A(X)$ инвариантно относительно некоторой компактной подгруппы K, а на фактор-группе X/K μ индуцирует гауссовское распределение.

Тогда уравнение

$$n^l[t] = [h] \qquad (7)$$

имеет решение в L для любого натурального l. Равенство (7) равносильно тому, что $n^lt - h \in H'$, т. е. $n^lt - h = n^lu$, $u \in H$. Отсюда $h = n^l(t - u)$, значит, $h \in H'$, или $[h] = 0$. Поэтому в фактор-группе L нет отличных от нуля неограничено делимых на n элементов. Пусть теперь $[h] \in L$ — элемент конечного порядка p. Можно считать, не ограничивая общности, что p — простое число. Если n не делится на p, то $[h]$ — неограничено делимый на n элемент, а значит, $[h] = 0$. Поэтому будем считать, что p — делитель n. Имеем $p[h] = 0$, т. е. $ph \in H'$. Значит, для любого натурального l существует $z \in H$, что $ph = n^{l+1}z$. Тогда $p\left(h - \frac{n^{l+1}}{p}z\right) = 0$. Так как $K^{(n)} = K$, то $\{h \in H : nh = 0\} = \{0\}$. Поскольку p — делитель n, то $h = n^l\frac{n}{p}z$, т. е. $h \in H'$, а $[h] = 0$.

Итак L — дискретная группа, не содержащая элементов конечного порядка. Значит, группа L^* связна. Поскольку $L^* \approx A(K, H')$, то $A(K, H') \subset C_X$, и из (6) вытекает $\{x \in A(K, H') : nx = 0\} = \{0\}$. Отсюда $L^n = L$. Значит, группа L состоит из неограничено делимых на n элементов, т. е. $L = 0$. Таким образом, $H = H'$, и поэтому $H^{(n)} = H$. Лемма доказана.

Лемма 3 [2]. *Пусть p — простое число и $X^{(p)} = \{0\}$. Тогда*

$$I_A(X) = \Gamma_A(X)$$

для любого $A \in \mathfrak{M}(X)$.

Пусть группа X дискретна и не содержит элементов конечного порядка. Будем называть элемент $x \in X$ зависящим от элементов $x_1, \ldots, x_l \in X$, если существуют такие $n \neq 0$, $n_1, \ldots, n_l \in Z$, что $nx = n_1x_1 + \ldots + n_lx_l$. Через L_x обозначим подгруппу элементов, зависящих от $x \in X$. Группа L_x изоморфна некоторой подгруппе группы Q.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть группа C_X содержит элементы порядка p при всех простых p, т. е. $\{x \in C_X : px = 0\} \neq \{0\}$, и поэтому $(C_X^*)^{(p)} \neq C_X^*$. Будем считать, не ограничивая общности, что группа $C_X = G$ компактна. Тогда группа $H = G^*$ дискретна и не содержит элементов конечного порядка. Пусть $A = \{a_j\}_{j=0}^s \in \mathfrak{M}(X)$. Рассмотрим уравнение

$$f(a_0y) = f(a_1y) \ldots f(a_sy), \quad y \in H. \qquad (9)$$

Обозначим через $E = \{p_1, \ldots, p_k\}$ множество простых чисел, входящих в разложение каждого числа a_j, $j = 0, 1, \ldots, s$, на простые множители. Поскольку при всех $i = 1, \ldots, k$ выполнено $H^{(p_i)} \neq H$, то существует такой элемент $h_0 \in H$, что $L_{h_0}^{(p_i)} \neq L_{h_0}$, $i = 1, \ldots, k$. Действительно, поскольку $H^{(p_i)} \neq H$, то $L_{h_i}^{(p_i)} \neq L_{h_i}$ для некоторого $h_i \in H$. Рассмотрим подгруппу $H_1 \subset H$, состоящую из всех элементов, зависящих от $h_1, \ldots, h_k$. Пусть ранг H_1 равен l. Выберем в H_1 элементы $z_1, \ldots, z_n$, $n = (l-1)k + 1$, таким образом, чтобы любые l элементов $\{z_{j_1}, \ldots, z_{j_l}\}$ порождали подгруппу ранга l. Заметим теперь, что если элемент mz, $m \in Z$, неограничено делим на p_i, то и z неограничено делим на p_i. Поэтому среди элементов $\{z_1, \ldots, z_n\}$ не более $(l-1)$-го элемента неограничено делимого на p_i при каждом $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, по крайней мере один элемент $h_0 = z_j$ не является неограничено делимым ни на одно из чисел p_i, т. е. $L_{h_0}^{(p_i)} \neq L_{h_0}$, $i = 1, \ldots, k$.

Группа L_{h_0} изоморфна некоторой подгруппе $B \in Q$. Подгруппу B можно считать обладающей тем свойством, что если $m/n \in B$, то n не делится ни на одно из чисел p_i, $i = 1, \ldots, k$. Обозначим через π изоморфизм $\Pi : L_{h_0} \to B$.

Рассмотрим B_E — подмножество в B, состоящее из чисел m, $m = \pm p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$, $p_i \in E$, $b_i \geqslant 0$. Очевидно, что если $m \in B_E$, то при всех $j = 0, 1, \dots, s$ $a_j m \in B_E$. Если же $m \in B$ и при некотором j выполнено $a_j m \in B_E$, то $m \in B_E$.

Рассмотрим на группе H функцию

$$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y = 0, \\ \exp\{-m^2\}, & \text{если } y = \pi^{-1}(m),\ m \in B_E, \\ 0, & \text{если } y \in H \setminus \pi^{-1}(B_E) \cup \{0\}, \end{cases}$$

которая по построению удовлетворяет уравнению (9). Положим

$$\rho(g) = \sum_{y \in H} f(y) \overline{(g, y)}, \quad g \in G.$$

Функция $\rho(g)$ непрерывна, а так как $\sum\limits_{y \in H, y \neq 0} f(y) < 1$, то $\rho(g) > 0$ Поэтому $f(y)$ — характеристическая функция некоторого распределения $\mu \in \Gamma_A(G)$ с плотностью (относительно меры Хаара m_G) $\rho(g)$. По построению $\mu \overline{\in} I(X) * \Gamma(X)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Если при некотором простом p в группе C_X нет элементов порядка p, то $\{x \in C_X : px = 0\} = \{0\}$. Значит, по лемме 2 группа X удовлетворяет условию (α), а тогда по лемме 1 имеет место равенство (5) с $A = \{a_j\}_{j=0}^s$, $a_0 = p$, $a_1 = \dots = a_s = 1$, $s = p^2$. Если $X^{(p)} \neq \{0\}$, то $A \in \mathfrak{M}(X)$. Если же $X^{(p)} = \{0\}$, то по лемме 3 имеет место равенство (8), а значит, и (5) при любом $A \in \mathfrak{M}(X)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Простейшим примером связной компактной группы, содержащей при любом простом p элемент порядка p, является группа вращений окружности T. Еще один пример моежт быть получен следующим образом. Рассмотрим группу Q в дискретной топологии. Пусть H — подгруппа в Q, состоящая из чисел m/n, где n не делится на квадрат ни одного простого числа. Тогда для любого простого p выполнено $H^{(p)} \neq H$. Группа $X = H^*$ связна и при любом простом p содержит элемент порядка p.

Замечание 2. Обозначим через $\mathfrak{N}(X)$ класс множеств $A \in \mathfrak{M}(X)$, для которых справедливо равенство (5). Как отмечено выше, в [2] получено полное описание групп X, для которых $\mathfrak{N}(X) = \mathfrak{M}(X)$. С другой стороны, теорема 1 дает полное описание тех групп X, для которых $\mathfrak{N}(X) = \varnothing$. Поэтому представляет интерес следующая задача: в зависимости от строения группы X описать класс множеств $\mathfrak{N}(X)$.

1. *Партасарати К. Р., Ранга Рао Р., Варадхан С. Р. С.* Распределения вероятностей на локально компактных абелевых группах // Сб. пер.: Математика.— 1965.— **9**, вып. 2.— С. 115—146.
2. *Фельдман Г. М.* К характеризации гауссовского распределения на группах равнораспределенностью одночлена и линейной статистики // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 8.— С. 1112—1118.
3. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики.— М. : Наука, 1972.— 656 с.
4. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ : в 3-х т.— М. : Наука, 1975.— Т. 1.— 656 с.
5. *Фельдман Г. М.* Об одной характеризации гауссовского распределения на абелевых группах // Теория вероятностей и ее применения.— 1987.— **32**, вып. 3.— С. 446—449.

Физ.-техн. ин-т низ. температур,
Харьков

Получено 25.11.87