УДК 519.41/47

А. Н. Тузов

Об абелевых группах, ε-чистые подгруппы которых m-дополняемы

Приведено описание абелевых групп, все ε-чистые подгруппы которых m-дополняемы.

Наведено опис абелевих груп, всі ε-чисті підгрупи яких — m-доповнювані.

Абелевы группы, все подгруппы которых m-дополняемы, описаны в работе [1]. В настоящей работе получено описание абелевых групп, в которых m-дополняемы ε-чистые подгруппы. Тем самым развиваются и результаты работы [2].

Подгруппа A группы G называется [1] m-дополняемой в G, если существует такая подгруппа B, что $G = A + B$ и пересечение $A \cap B$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Отметим, что если подгруппа A m-дополняема в группе G, то она m-дополняема в любой содержащей ее подгруппе группы G.

Пусть для каждого простого числа p зафиксирован некоторый (возможно пустой) набор натуральных чисел M_p. Подгруппа A абелевой группы G называется [2] ε_p-чистой в G, если для каждого $a \in A$ и каждого $l \in M_p$ из разрешимости уравнения $a = p^l x$ в группе G следует его разрешимость в A. Подгруппа A называется ε-чистой в G, если A ε_p-чистая в G для каждого p. Если $M_p = \mathbb{N}$ для всех p, то ε-чистые подгруппы — это сервантные подгруппы группы G; если $M_p = \{1\}$ для всех p, то ε-чистые подгруппы — это слабо сервантные подгруппы. Если $M_p = \varnothing$ для всех p, то ε-чистыми являются все подгруппы группы G. Группы, в которых каждая ε-чистая подгруппа выделяется прямым слагаемым, описаны в роботе [2].

Лемма 1. *Если в абелевой группе G m-дополняемы все сервантные подгруппы, то группа G разлагается в прямую сумму $G = D \oplus S \oplus H$, где D — полная группа, S — периодическая группа, порядки элементов каждой при-*

марной компоненты которой ограничены в совокупности, H — прямая сумма конечного числа изоморфных между собой неполных групп без кручения ранга 1 или нулевая группа.

Доказательство. Группа G разлагается в прямую сумму $G = D \oplus G_1$, где D — полная группа, а G_1 — редуцированная. Пусть S — периодическая часть группы G_1. Так как S сервантна в G_1, то существует такая подгруппа B, что $G_1 = S + B$ и пересечение $S \cap B$ удовлетворяет условию минимальности. Очевидно, $S \cap B$ — периодическая часть группы B, значит, $B = (S \cap B) \oplus H$, где H — группа без кручения (возможно, нулевая). Но тогда $G_1 = S \oplus H$. В H все сервантные подгруппы m-дополняемы, а значит, дополняемы и ввиду теоремы 3 работы [3] группа H разлагается в прямую сумму конечного числа изоморфных между собой неполных групп без кручения ранга 1. Покажем, наконец, что порядки элементов произвольной примарной компоненты S_1 группы S ограничены в совокупности. Допустим, это не так. Тогда в группе S_1 можно выделить такую сервантную подгруппу C, которая является прямой суммой счетного множества циклических подгрупп с неограниченными в совокупности порядками. В группе C найдется (см. § 12 работы [4]) такая сервантная подгруппа C^*, что C/C^* — квазициклическая типа p^∞. Если R — m-дополнение подгруппы C^* в C, то, учитывая изоморфизм $R/R \cap C^* \cong C/C^*$ и конечность пересечения $R \cap C^*$ (группа S редуцированная), получаем, что фактор-группа прямой суммы циклических групп по конечной подгруппе — квазициклическая типа p^∞. Это невозможно. Лемма доказана.

Обозначим через $A(p^k)$ прямую сумму циклических подгрупп порядка p^k. Если $M_p \neq \varnothing$, то $M_p = \bigcup_{i=1}^{n} [\alpha_i; \beta_i]$, где $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i < \alpha_{i+1} - 1$, n или β_n могут быть бесконечными, а под $[\alpha_i; \beta_i]$ нужно понимать все натуральные числа от α_i до β_i включительно.

Лемма 2. *В абелевой p-группе G все ε_p-чистые подгруппы m-дополняемы тогда и только тогда, когда группа G разлагается в прямую сумму $G = A \oplus B$, где A — группа с условием минимальности для подгрупп (черниковская группа), а B — группа, в которой каждая ε_p-чистая подгруппа выделяется прямым слагаемым.*

Доказательство. Для $M_p = \varnothing$ утверждение леммы следует из теоремы 1 работы [1], поэтому лемму будем доказывать для $M_p \neq \varnothing$.

Необходимость. Если в абелевой p-группе G m-дополняемы все ε_p-чистые подгруппы, то m-дополняемы все сервантные подгруппы и ввиду леммы 1 $G = (\bigoplus_{k=1}^{t} A(p^k)) \oplus D$, где D — полная группа, а некоторые из групп $A(p^k)$ могут быть нулевыми.

Допустим, группы $A(p^{k_1})$ и $A(p^{k_2})$, где $\beta_{i_0} \leqslant k_1 < k_1 + 2 \leqslant k_2$ и $k_2 \leqslant \alpha_{i_0+1}$, если $i_0 < n$, бесконечны. Тогда $A(p^{k_1}) = (\bigoplus_{j=1}^{\infty} \langle c_j \rangle) \oplus A_1$ и $A(p^{k_2}) = (\bigoplus_{j=1}^{\infty} \langle d_j \rangle) \oplus A_2$, где A_1 и A_2 — некоторые подгруппы. Рассмотрим подгруппу $C = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \langle c_j + pd_j \rangle$ и покажем, что она ε_p-чистая в G. Для этого, очевидно, достаточно показать, что каждая из подгрупп $\langle c_j + pd_j \rangle$ ε_p-чистая в содержащей ее подгруппе $\langle c_j \rangle \oplus \langle d_j \rangle$. Пусть $m(c_j + pd_j)$ — произвольный ненулевой элемент подгруппы $\langle c_j + pd_j \rangle$ и уравнение $m(c_j + pd_j) = p^l x$, где $\alpha_{i_1} \leqslant l \leqslant \beta_{i_1}$, разрешимо в $\langle c_j \rangle \oplus \langle d_j \rangle$. Очевидно, $i_1 \leqslant i_0$. Если $mc_j \neq 0$, то p^l делит m, если $mc_j = 0$, то p^{k_1} делит m. В обоих случаях p^l делит m, значит, указанное уравнение разрешимо в $\langle c_j + pd_j \rangle$ и подгруппа $\langle c_j + pd_j \rangle$ ε_p-чистая в $\langle c_j \rangle \oplus \langle d_j \rangle$. Подгруппа C ε_p-чистая и m-дополняема в G некоторой подгруппой R. Значит, найдутся такие элементы $x_j \in C$ и $r_j \in R$, что $r_j - x_j = c_j + d_j$. Тогда $r_j = x_j + c_j + d_j$ и $p^{k_2-1} r_j = p^{k_2-1} d_j \in C$ Подгруппа, порожденная элементами $p^{k_2-1} r_j$, $j = 1, 2, \ldots$, входит в пересечение $C \cap R$, но является прямой суммой бесконечного чима циклических подгрупп и не удовлетворяет условию минимальности. Получено противоречие.

Если группа $A(p^k)$ при $1 < k \leqslant \alpha_1$ бесконечна, то $A(p^k) = (\bigoplus_{j=1}^{\infty} \langle c_j \rangle) \oplus \oplus A_1$ и подгруппа $\bigoplus_{j=1}^{\infty} \langle pc_j \rangle$, как нетрудно убедиться, ε_p-чистая в G, но не имеет в G m-дополнения. Значит, указанный случай невозможен.

Пусть, наконец, группа $A(p^k)$ при $k \geqslant \beta_n$ бесконечна. Тогда $A(p^k) = (\bigoplus_{j=1}^{\infty} \langle c_j \rangle) \oplus A_1$, где A_1 — некоторая подгруппа. Если ранг группы D бесконечен, то $D = (\bigoplus_{j=1}^{\infty} D_j) \oplus D_1$, где D_j — квазициклические группы типа p^∞, D_1 — некоторая подгруппа. Рассмотрим подгруппу $\bigoplus_{j=1}^{\infty} \langle c_j + d_j \rangle$, где $d_j \in \in D_j$, $d_j \neq 0$ и $|d_j| = p^m > p^k$. Нетрудно убедиться, что эта подгруппа ε_p-чистая в G, но не имеет в G m-дополнения. Значит, ранг группы D должен быть конечным.

Используя теперь теорему 1 работы [2], получаем утверждение леммы. Необходимость доказана.

Достаточность. Рассмотрим сначала редуцированную группу $G_1 = A_1 \oplus B_1$, где A_1 — конечная группа, а в B_1 каждая ε_p-чистая подгруппа выделяется прямым слагаемым. Пусть C — произвольная ε_p-чистая подгруппа группы G_1 и C_1 — ее компонента в B_1. Так как B_1 — прямая сумма циклических групп, то $C_1 = \bigoplus_{i \in I} \langle c_i \rangle$. Пусть среди подгрупп $\langle c_i \rangle, i \in I$, имеется бесконечное множество не ε_p-чистых в B_1. В каждой такой подгруппе $\langle c_j \rangle$ есть элемент $m_j c_j$, для которого уравнение $m_j c_j = p^{l_j} x$, где $l_j \in M_p$, разрещимо в B_1, но не разрешимо в $\langle c_j \rangle$. А раз группа A_1 конечна, то найдутся подгруппы $\langle c_{j_1} \rangle$ и $\langle c_{j_2} \rangle$ и в них указанные элементы $m_{j_1} c_{j_1}$ и $m_{j_2} c_{j_2}$, такие, что $a + m_{j_1} c_{j_1} \in C$ и $a + m_{j_2} c_{j_2} \in C$ для некоторого $a \in A_1$. Тогда $m_{j_1} c_{j_1} - m_{j_2} c_{j_2} \in C$ и уравнение $m_{j_1} c_{j_1} - m_{j_2} c_{j_2} = p^{\min(l_{j_1}, l_{j_2})} x$ разрешимо в B_1. Так как подгруппа C ε_p-чистая, то указанное уравнение должно быть разрешимо в C и, следовательно, в C_1. Последнее невозможно.

Таким образом, среди подгрупп $\langle c_i \rangle$, $i \in I$, может быть лишь конечное число не ε_p-чистых в B_1. Значит, ввиду теоремы 1 работы [2] $C_1 = A_2 \oplus \oplus B_2$, где A_2 — конечная группа, а B_2 —группа, в которой каждая ε_p-чистая подгруппа выделяется прямым слагаемым. Если группа B_2 содержит циклическую ε_p-чистую подгруппу $\langle a_1 \rangle$, не являющуюся ε_p-чистой в B_1, то $B_2 = \langle a_1 \rangle \oplus S_1$, где S_1 — группа, в которой каждая ε_p-чистая подгруппа выделяется прямым слагаемым. Если S_1 содержит циклическую ε_p-чистую подгруппу $\langle a_2 \rangle$, не являющуюся ε_p-чистой в B_1, то $S_1 = \langle a_2 \rangle \oplus S_2$ и $B_2 = = \langle a_1 \rangle \oplus \langle a_2 \rangle \oplus S_2$, причем каждая ε_p-чистая подгруппа группы S_2 выделяется в ней прямым слагаемым. Продолжая этот процесс и учитывая, что разложение группы C_1 в прямую сумму циклических подгрупп может содержать лишь конечное число слагаемых, не являющихся ε_p-чистыми в B_1, получаем разложение группы B_2 в прямую сумму $B_2 = K \oplus S$, где K — конечная группа, а S — группа, все циклические ε_p-чистые подгруппы которой являются ε_p-чистыми в B_1. В группе S выделим циклическое прямое слагаемое $\langle b_1 \rangle$. Подгруппа $\langle b_1 \rangle$ ε_p-чистая в S, а значит, и в B_1. Но в B_1 каждая ε_p-чистая подгруппа выделяется прямым слагаемым, поэтому $B_1 = = \langle b_1 \rangle \oplus R_1$ и $S = \langle b_1 \rangle \oplus (S \cap R_1)$. В группе $S \cap R_1$ выделим циклическое прямое слагаемое $\langle b_2 \rangle$. Подгруппа $\langle b_2 \rangle$ ε_p-чистая в B_1, значит, $R_1 = \langle b_2 \rangle \oplus R_2$ и $B_1 = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus R_2$, $S = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_1 \rangle \oplus (S \cap \cap R_2)$. Теперь в группе $S \cap R_2$ выделим циклическое прямое слагаемое $\langle b_3 \rangle$ и получим $B_1 = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \langle b_3 \rangle \oplus R_3$. Обозначим через T прямую сумму подгрупп $\langle b_1 \rangle$, $\langle b_2 \rangle$, $\langle b_3 \rangle$, ..., $\langle b_n \rangle$, ... Очевидно, подгруппа T ε_p-чистая в B_1, значит, $B_1 = T \oplus R_w$ и $S = T \oplus (S \cap R_w)$. В группе $S \cap \cap R_\omega$ снова выделим циклическое прямое слагаемое и т. д. Применяя трансфинитную индукцию, убеждаемся, что $B_1 = S \oplus R$. А воспользовавшись предложением 4 работы [5], нетрудно показать, что $A_1 \oplus R$ является m-дополнением подгруппы C в группе G_1.

Пусть теперь G — группа, указанная в лемме. Ее можно представить как прямую сумму полной группы D и рассмотренной выше редуцированной группы G_1. Пусть C — произвольная ε_p-чистая подгруппа группы G, $C = D_0 \oplus C_0$, где D_0 — полная группа, C_0 — редуцированная группа. Очевидно, $D = D_0 \oplus D_1$, где D_1 — некоторая подгруппа. Если C_1 — компонента подгруппы C в G_1, то, очевидно, C_1 ε_p-чистая в G_1 и, значит, $G_1 = C_1 + L_1$, где пересечение $C_1 \cap L_1$ конечно (поскольку G_1 редуцированная). Покажем, что $D_1 \oplus L_1$ — m-дополнение подгруппы C в группе G. Ввиду предложения 4 работы [5] достаточно показать, что пересечение $C \cap D_1$ конечно. Если ранг группы D конечен, то конечность пересечения $C \cap D_1$ вытекает из его редуцированности. Пусть ранг группы D бесконечен. Тогда, как следует из теоремы 1 работы [2], $G = D \oplus A_1 \oplus B_1$, где A_1 — конечная группа, а порядки элементов группы B_1 меньше некоторого p^β, где $\beta \in M_p$. Допустим, пересечение $C \cap D_1$ бесконечно. Тогда ввиду предложения 4 работы [5] пересечение $C_0 \cap D$ бесконечно и, значит, подгруппа $p^\beta C_0$ бесконечна. Но $p^\beta C_0$ входит в $p^{\beta-1} C_0$. Так как группа C^0 редуцированная, то $p^{\beta-1}C_0 = (\bigoplus_{i=1}^{t} \langle c_i + a_i \rangle) \oplus F$, где $c_i \in D$, $a_i \in A_1$, $t > |A_1|$, F — некоторая подгруппа. Очевидно, $a_{i_1} = a_{i_2}$ для некоторых $i_1 \neq i_2$. Отличный от нуля элемент $c_{i_1} - c_{i_2}$ принадлежит $p^{\beta-1}C_0$ и уравнение $c_{i_1} - c_{i_2} = p^\beta x$ разрешимо в G, а значит, и в C_0. Но тогда в $p^{\beta-1}C_0$ должно быть разрешимо уравнение $c_{i_1} - c_{i_2} = px$, что, как легко видеть, невозможно. Таким образом, пересечение $C \cap D_1$ конечно. Достаточность доказана. Лемма доказана.

Теорема 1. *В периодической абелевой группе G все ε-чистые подгруппы m-дополняемы тогда и только тогда, когда группа G разлагается в прямую сумму $G = A \oplus B$, где A — группа с условием минимальности для подгрупп (черниковская группа), а B — группа, в которой каждая ε-чистая подгруппа выделяется прямым слагаемым.*

Доказательство. Необходимость. Если в группе G m-дополняемы все ε-чистые подгруппы, то в каждой p_i-компоненте группы G m-дополняемы ε_{p_i}-чистые подгруппы. Ввиду теоремы 2 работы [2] и леммы 2 достаточно показать, что среди p_i-компонент группы G может быть лишь конечное число таких, в которых не все ε_{p_i}-чистые подгруппы выделяются прямыми слагаемыми. Допустим противное. Тогда в каждой из таких p_i-компонент зафиксируем ε-чистую подгруппу C_i, не выделяемую прямым слагаемым, и рассмотрим подгруппу $\bigoplus_i C_i$. Эта подгруппа ε-чистая в G, но, как легко убедиться, не имеет в G m-дополнения. Получено противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность очевидна (см. лемму 2). Теорема доказана.

Теорема 2. *В непериодической абелевой группе G все ε-чистые подгруппы m-дополняемы тогда и только тогда, когда группа G разлагается в прямую сумму $G = A \oplus B$, где A — конечная группа, экспонента каждой p-компоненты которой меньше $p^{\max M_p}$ (если $\max M_p$ существует), а B — группа, в которой каждая ε-чистая подгруппа выделяется прямым слагаемым.*

Теорема доказывается аналогично теореме 3 работы [2] с использованием предложения 4 работы [5].

Из приведенных теорем следуют результаты, анонсированные автором в [6].

1. *Цыбанев М. В.* Об абелевых вполне $M(m)$-факторизуемых группах // Укр. мат. журн. — 1971.— **23**, № 5.— С. 699—706.
2. *Рохлина В. С.* Об ε-чистоте в абелевых группах // Сиб. мат. журн.— 1970.— **11**, № 1.— С. 161—167.
3. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Мат. сб.— 1954.— **35**, № 1.— С. 93—128.
4. *Prüfer H.* Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Aberschen Gruppen // Math. Z.— 1923.— **17**.— S. 35—61.

5. *Цыбанев М. В.* Об абелевом нормальном делителе группы, все подгруппы которого m-дополняемы в ней // Алгебра и логика.— 1974.— **13**, № 1.— С. 77—87.
6. *Тузов А. Н.* Об абелевых группах, слабо сервантные подгруппы которых m-дополняемы // XIX Всесоюз. алгебр. конф., Львов, 9—11 сент. 1987 г.: Тез сообщ.— Львов: Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, 1987.— Ч. 2.— С. 283.

Киев. ин-т нар. хоз-ва

Получено 25.12.87