УДК 513.88+519.4

Н. Я. Виленкин, А. У. Климык

Спектральные разложения некоторых представлений групп Ли

Изучаются представления классических некомпактных групп Ли, индуцированные представлениями максимальной параболической подгруппы. Получены формулы для $SO_0(2p, 2q)/U(p, q)$ и $U(2p, 2q) \uparrow Sp(p, q)$.

Вивчаються представлення класичних некомпактних груп Лі, індуковані представленчями максимальної параболічної підгрупи. Одержані формули для $SO_0(2p, 2q)$ і $U(p, q)$ і $U(2p, 2q) \uparrow Sp(p, q)$.

Пусть R, C, H — поля соответственно вещественных, комплексных и кватернионных чисел, а F — одно из этих полей. В F^{p+q} вводим форму

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_p\overline{y_p} - x_{p+1}\overline{y_{p+1}} - \ldots - x_{p+q}\overline{y_{p+q}}.$$

Множество точек $\mathbf{x} \in F^{p+q}$, $\mathbf{x} \neq 0$, для которых $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 0$, образует конус Γ_F в F^{p+q}. Группы $SO_0(p, q)$, $U(p, q)$, $Sp(p, q)$, которые ниже обозначаем через G, оставляют инвариантными соответственно Γ_R, Γ_C, Γ_H. Пусть K — максимальная компактная подгруппа в G. Тогда $K = SO(p) \times SO(q)$ для $SO_0(p, q)$, $K = U(p) \times U(q)$ для $U(p, q)$ и $K = Sp(p) \times Sp(q)$ для $Sp(p, q)$. Выделяем в G однопараметрическую подгруппу B, состоящую из гиперболических вращений $g(t) = \exp t(E_{1,p+q} + E_{p+q,1})$, где E_{ij} — матрица с элементами $(E_{ij})_{st} = \delta_{is}\delta_{jt}$. Централизатор M' подгруппы B в G состоит из матриц $\operatorname{diag}(u, h, u)$, где $u \in F$, $|u| = 1$, и h — матрица подгруппы H, совпадающей соответственно с $SO_0(p-1, q-1)$, $U(p-1, q-1)$ или $Sp(p-1, q-1)$. Имеем $\Gamma_F = G/H$. Подгруппа M' изоморфна группе $H \times Q$, где Q — одна из групп Z_2 (группа, состоящая из двух элементов), $U(1)$, $Sp(1)$.

Произведение $P' = M'BN'$, где N' — минимальная нильпотентная подгруппа [1], является максимальной параболической подгруппой в G. Для любых $\sigma \in C$ и $\delta \in \hat{Q}$ соответствие $mag(t)n \to e^{t\sigma}\,\delta(a)$, $m \in H$, $a \in Q$, $n \in N'$, задает неприводимое представление подгруппы P'. Оно индуцирует представление группы G. Так как $\Gamma_F = G/H$, то эти представления можно реализовать в пространстве функций на Γ_F. Именно, пусть $\mathcal{H}_F$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ на Γ_F со значением в пространстве H представления δ, удовлетворяющих условиям однородности $f(a\mathbf{x}) = a^\sigma f(\mathbf{x})$, $a > 0$, $f(\mathbf{x}u) = \delta(u^{-1}) f(\mathbf{x})$, $u \in Q$. Для $SO_0(p, q)$ и $U(p, q)$ пространство H одномерно. Соответствующее параметрам

$\sigma \in C$ и $\delta \in \hat{Q}$ представление $T_{\sigma\delta}$ группы G действует в $\mathcal{H}_F$ по формуле $T_{\sigma\delta}(g) f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x})$. Для $Q = Z_2$ представление δ задается числом $\varepsilon = 0$ или 1, для $Q = \mathrm{U}(1)$ оно совпадает с представлением $e^{i\varphi} \to e^{ik\varphi}$, а для $Q = \mathrm{Sp}(1) \backsim \mathrm{SU}(2)$ δ задается целым неотрицательным числом k. Поэтому представления $T_{\sigma\delta}$ обозначаем соответственно через $T_{\sigma\varepsilon}$ или $T_{\sigma k}$. Стандартным образом в $\mathcal{H}_F$ вводится скалярное произведение [1]. Пополнив $\mathcal{H}_F$ по скалярному произведению, получим гильбертово пространство $\mathcal{L}_F^{\sigma\varepsilon}$ или $\mathcal{L}_F^{\sigma k}$.

Если p и q четные, то представления $T_{l\varepsilon}$ группы $\mathrm{SO}_0(p, q)$, для которых l — целые неотрицательные числа такие, что $l \equiv \varepsilon \pmod 2$, приводимы [2, 3]. Выделяем в $T_{l\varepsilon}$ неприводимые представления T_+^l и T_-^l, $l \equiv \equiv \varepsilon \pmod 2$. Сужения T_+^l и T_-^l на $\mathrm{SO}(p) \times \mathrm{SO}(q)$ разлагается в сумму неприводимых представлений этой подгруппы, имеющих старшие веса $(m, 0, \ldots, 0)(m', 0, \ldots, 0)$, для которых соответственно $m' - m > l + p - 2$ и $m - m' > l + q - 2$, если $p > 2$ и $q > 2$, $m' - m > l + p - 2$ и $m + m' < -l - p + 2$, если $p > 2$, $q = 2$ [2, 3].

Представление T_{lk} группы $\mathrm{U}(p, q)$ (и группы $\mathrm{U}(p, 1)$) приводимо тогда и только тогда, когда l — целое число той же четности что и k [3, 4]. Выделяем в T_{lk} неприводимые представления T_+^{lk}, T_-^{lk}, $l \equiv k \pmod 2$. Сужения T_+^{lk} и T_-^{lk} на $\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)$, $p > 1$, $q > 1$, разлагается в сумму неприводимых представлений этой подгруппы, имеющих старшие веса $(m_1, \dot{0}, m_2)(n_1, \dot{0}, n_2)$ ($\dot{0}$ обозначает подходящее количество нулей в весе), $m_1 \geqslant \geqslant 0 \geqslant m_2$, $n_1 \geqslant 0 \geqslant n_2$, для которых соответственно [4]

$$n_1 - n_2 - m_1 + m_2 > l + 2p - 2, \quad m_1 - m_2 - n_1 + n_2 > l + 2q - 2. \qquad (1)$$

В случае группы $\mathrm{U}(p, 1)$ старшие веса, содержащиеся в сужении представления $T_{\sigma k}$ на $\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(1)$, имеют вид $(m_1, \dot{0}, m_2)(k - m_1 + m_2)$ и условия (1) для T_+^{lk} и T_-^{lk} заменяются соответственно условиями [3] $2m' - - k > l + 2p - 2$, $2m - k < -l - 2p + 2$.

При $k = 0$ представления $T_{\sigma k}$ группы $\mathrm{Sp}(p, q)$ изучены в [5]. Используя результаты § 130 в [6], так же как в [5], находим спектр сужения представления $T_{\sigma k}$, $k \geqslant 0$, на $K = \mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(q)$. Неприводимые представления группы $\mathrm{Sp}(n)$ со старшим весом $(m_1, m_2, \dot{0})$, $m_1 \geqslant m_2 \geqslant 0$, обозначаем через $T(m_1, m_2)$. Сужение $T_{\sigma k}$ на K разлагается в сумму тех представлений $T(m_1, m_2) \otimes T(r_1, r_2)$, для которых $m_1 + m_2 + r_1 + r_2 \equiv k \pmod 2$, выполняется условие $N + N' \geqslant k \geqslant N - N'$, если $N \equiv m_1 - m_2 > N' \equiv \equiv r_1 - r_2$, и условие $N + N' \geqslant k \geqslant N' - N$, если $N' > N$, причем каждое представление содержится в разложении один раз. В [5] для изучения представлений $T_{\sigma 0}$ использованы инфинитезимальные операторы этих представлений. Для вывода формул действия инфинитезимальных операторов на базисные функции использована лемма 5.2 из [3] (лемма 1 в [5]). С помощью результатов § 7 гл. 5 в [3] эта лемма обобщается до пространства $L_1^2(K)$ функций из $L^2(K)$, инвариантных относительно сдвигов на элементы подгруппы $\mathrm{Sp}(p-1) \times \mathrm{Sp}(q-1)$. Представления $T_{\sigma k}$ можно реализовать в подпространствах этих пространств. Поэтому, повторяя рассуждения работы [5], выводим формулу для инфинитезимальных операторов представлений $T_{\sigma k}$, отличающуюся от формулы (22) в [5] только областью значений старших весов $(m_1, m_2, \dot{0})(r_1, r_2, \dot{0})$ представлений подгруппы K и значениями коэффициентов K_{rs}^{mn}. Как и в [5], полученные коэффициенты K_{rs}^{mn} выражаются через известные коэффициенты Клебша — Гордана подгрупп $\mathrm{Sp}(p)$ и $\mathrm{Sp}(q)$ (см. формулу (19) в [5]).

Анализ представлений $T_{\sigma k}$ группы $\mathrm{Sp}(p, q)$ с помощью инфинитезимальных операторов проводится так же, как в [5]. Поэтому дадим только формулировку результатов. Представление $T_{\sigma k}$ приводимо тогда и только тогда, когда $\sigma \equiv l$ — целое число той же четности, что и k. Если $l \geqslant 0$, $l \equiv k \pmod 2$, то T_{lk} состоит из четырех неприводимых представлений

T_+^{lk}, T_-^{lk}, T_0^{lk}, T_1^{lk}. Они характеризуются содержащимися в них представлениями $T(m_1, m_2) \otimes T(r_1, r_2)$ подгруппы $\mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(q)$. Для T_+^{lk} имеем $J' - J > l + 4p - 2$, где $J = m_1 + m_2$, $J' = r_1 + r_2$. Для T_-^{lk} имеем $J - J' > l + 4q - 2$. Представление T_0^{lk} конечномерно и для него $k \leqslant J + J' \leqslant l$. Представление T_1^{lk} содержит оставшиеся представления подгруппы K. При $-2p - 2q + 1 < l < k$ представление T_0^{lk} исчезает При $l = -2p - 2q + 1$ исчезает и представление T_1^{lk} и мы имеем $T_{lk} = T_+^{lk} \oplus \oplus T_-^{lk}$. Представления $T_{\sigma k}$, для которых $\sigma = ib - 2p - 2q + 1$, $b \in R$, или $-2p - 2q < \sigma < -2p - 2q + 2$ и k четно, унитарны. Унитарны также представления T_+^{lk}, T_-^{lk} и $T_1^{-2p-2q+2,k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 1. *Представление $T_{\sigma\varepsilon}$ группы $\mathrm{SO}_0(2p, 2q)$ при сужении на подгруппу $\mathrm{U}(p, q)$ разлагается в ортогональную сумму представлений $T_{\sigma, 2s+\varepsilon}$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Представления $T_\pm^l$, $l \equiv \varepsilon \pmod 2$, группы $\mathrm{SO}_0(2p, 2q)$ разлагаются в ортогональную сумму представлений $T_\pm^{l, 2s+\varepsilon}$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, группы $\mathrm{U}(p, q)$.*

Для доказательства теоремы заметим, что C^{p+q} можно отождествить с R^{2p+2q}. При этом конус Γ_C в C^{p+q} отождествляется с конусом Γ_R в R^{2p+2q}. Пространства функций $\mathscr{L}_C^{\sigma k}$ превращаются в подпространства пространства $\mathscr{L}_R^{\sigma\varepsilon}$, $k \equiv \varepsilon \pmod 2$. Более того, пространство $\mathscr{L}_R^{\sigma\varepsilon}$ разлагается в ортогональную сумму подпространств $\mathscr{L}_C^{\sigma, \varepsilon+2s}$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Это приводит к доказательству теоремы для представлений $T_{\sigma\varepsilon}$. Анализируя множества неприводимых представлений подгруппы K, содержащиеся в неприводимых составляющих приводимых представлений $T_{\sigma\varepsilon}$ и $T_{\sigma k}$, приходим к утверждению теоремы для представлений $T_\pm^l$.

Теорема 2. *Представления $T_{\sigma k}$ и $T_\pm^{lk}$ группы $\mathrm{U}(2p, 2q)$ при сужении на подгруппу $\mathrm{Sp}(p, q)$ разлагаются соответственно в ортогональные суммы представлений $T_{\sigma, |k|+2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и представлений $T_\pm^{\sigma, |k|+2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Эта теорема доказывается так же, как теорема 1, путем отождествления H^{p+q} с C^{2p+2q} или R^{4p+4q}.

Теорема 3. *Представления $T_{\sigma\varepsilon}$ и $T_\pm^l$, $l \equiv \varepsilon \pmod 2$, группы $\mathrm{SO}_0(4p, 4q)$ при сужении на подгруппу $\mathrm{Sp}(p, q)$ разлагаются соответственно в ортогональные суммы представлений $T_{\sigma, 2n+\varepsilon}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и представлений $T_\pm^{l, 2n+\varepsilon}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, причем $T_{\sigma, 2n+\varepsilon}$ и $T_\pm^{l, 2n+\varepsilon}$ содержатся в разложении по $2n + \varepsilon + 1$ раз.*

Пусть X_F — гиперболоид в F^{p+q}, состоящий из точек $\mathbf{x}$, для которых $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = -1$. Тогда $X_F = G/H'$, где H' совпадает соответственно с $\mathrm{SO}_0(p, q-1)$, $\mathrm{U}(p, q-1)$ или $\mathrm{Sp}(p, q-1)$. Операторы $\pi_F(g) f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x})$ задают квазирегулярное представление группы G в гильбертовом пространстве $L^2(X_F)$ относительно инвариантной меры на X_F. При отождествлении C^{p+q} с R^{2p+2q} гиперболоид $X_C \subset C^{p+q}$ отождествляется с гиперболоидом $X_R \subset \subset R^{2p+2q}$. Это приводит к совпадению соответствующих пространств $L^2(X_C)$ и $L^2(X_R)$. Квазирегулярное представление π_G группы $\mathrm{U}(p, q)$ превращается в сужение квазирегулярного представления π_R группы $\mathrm{SO}_0(2p, 2q)$ на подгруппу $\mathrm{U}(p, q)$. Поэтому для разложения представления π_C на неприводимые представления достаточно представление π_R группы $\mathrm{SO}_0(2p, 2q)$ разложить на неприводимые, а затем сузить последние на подгруппу $\mathrm{U}(p, q)$. Используя результаты работы [7] по разложению представления π_R и теорему 1, получаем

$$\pi_G \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_L \oplus T_{\sigma k}\, d\mu(\sigma) \oplus \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_l \oplus T_+^{lk}, \tag{2}$$

где мера Планшереля $d\mu(\sigma)$ и контур L такие, как в разложении представления π_R группы $SO_0(2p, 2q)$ в [7], и последняя сумма ведется по тем значениям l, для которых $l > -p-q+1$, $l \equiv k \pmod 2$.

Аналогичным образом с помощью теоремы 2 получаем разложение представления π_H группы $\mathrm{Sp}(p, q)$:

$$\pi_H \sim \sum_{n=0}^{\infty} \int_{L'} (n+1) T_{\sigma n}\, d\mu'(\sigma) \oplus \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l} \oplus (n+1) T_{+}^{lk}. \tag{3}$$

Здесь $d\mu'(\sigma)$ и L' совпадают с $d\mu(\sigma)$ и L из формулы (2), взятыми для группы $U(2p, 2q)$ и суммирование ведется по тем значениям l, для которых $l > -2p-2q+1$, $l \equiv n \pmod 2$. Если в $X_F = G/H'$ заменим подгруппу H', совпадающую с $U(p, q-1)$, или $\mathrm{Sp}(p, q-1)$, соответственно на $U(p-1, q)$ и $\mathrm{Sp}(p-1, q)$, то представления T_{+}^{lk} в (2) и (3) заменятся на T_{-}^{lk}. Из формул (2) и (3) легко получить результаты Фаро [1] по разложению квазирегулярных представлений групп $U(p, q)$ и $\mathrm{Sp}(p, q)$ соответственно на $U(p, q)/(U(p, q-1) \times U(1))$ и $\mathrm{Sp}(p, q)/(\mathrm{Sp}(p, q-1) \times \mathrm{Sp}(1))$.

Матрицы $g \in U(p, q)$ представляются в виде $g = hg(t)n$, $h \in U(1) \times U(p-1, q)$, $n \in N'$. Поэтому представление $T_{\sigma k}$ группы $U(p, q)$ можно реализовать в пространстве функций $F(e^{i\varphi}, y)$ на $U(1) \times Y$, $Y = U(p-1, q)/U(p-1, q-1)$, удовлетворяющих условию $F(e^{i(\psi+\varphi)}, e^{i\psi} y) = e^{ik\psi} F(e^{i\varphi}, y)$. При этом для элементов $u \times h \in U(1) \times U(p-1, q)$ имеем $T_{\sigma k}(u \times h) F(e^{i\varphi}, y) = F(u^{-1} e^{i\varphi}, h^{-1} y)$. Здесь содержится квазирегулярное представление подгруппы $U(p-1, q)$ Используя теорему 1 и свойство однородности функций F, приходим к заключению, что сужение представления $T_{\sigma k}$ группы $U(p, q)$ на подгруппу $U(1) \times U(p-1, q)$ разлагается в следующую ортогональную сумму представлений этой подгруппы:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{L''} \oplus (T^{1n} \oplus T_{\tau, k-n})\, d\mu(\tau) \oplus \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l} \oplus (T^{1n} \oplus T_{+}^{l, k-n}),$$

где L'' и $d\mu(\tau)$ совпадают с L и $d\mu(\sigma)$ из формулы (2), взятыми для группы $U(p-1, q)$, T^{1n} — представление $e^{i\varphi} \to e^{in\varphi}$ подгруппы $U(1)$ и суммирование ведется по тем значениям l, для которых $l > -p-q+2$, $l \equiv (k-n) \pmod 2$. Аналогичным образом представление $T_{\sigma k}$ группы $\mathrm{Sp}(p, q)$ разлагается на неприводимые представления подгруппы $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(p-1, q)$.

1. *Faraut J.* Distributions spheriques sur les espaces hyperboliques // J. Math. Pure Appl.— 1979.— **58**.— P. 369—444.
2. *Молчанов В. Ф.* Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом // Мат. сб.— 1970.— **81**, № 3.— С. 358—375.
3. *Климык А. У.* Матричные элементы и коэффициенты Клебша—Гордана представлений групп.— Киев : Наук. думка, 1979.— 304 с.
4. *Klimyk A. U., Gruber B.* Structure and matrix elements of the degenerate representations of $U(p+q)$ and $U(p, q)$ in $U(p) \otimes U(q)$ basis // J. Math. Phys.— 1982.— **23**.— P. 1399—1408.
5. *Klimyk A. U., Gruber B.* Infinitesimal operators and structure of the most degenerate representations of the groups $\mathrm{Sp}(p+q)$ and $\mathrm{Sp}(p, q)$ // Ibid.— 1984.— **25**.— P. 743—750.
6. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления.— М. : Наука, 1970.— 664 с.
7. *Rossmann W.* Analysis on real hyperboloid spaces // J. Funct. Anal.— 1978.— **30**, N 3.— P. 448—477.

Ин-т теорет. физики АН УССР, Киев Получено 01.07.87