УДК 513.88

М. Л. Горбачук,
В. І. Горбачук, доктори фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН України, Київ)

ТЕОРІЯ САМОСПРЯЖЕНИХ РОЗШИРЕНЬ СИМЕТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ, ЦІЛІ ОПЕРАТОРИ І ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ

This is a brief survey of M. G. Krein's contribution to the theory of self-adjoint extensions of Hermitian operators and to the theory of boundary value problems for differential equations. The further development of these results is also considered.

Дано короткий огляд внеску М. Г. Крейна в теорію самоспряжених розширень ермітових операторів і теорію граничних задач для диференціальних рівнянь, а також подальшого розвитку його результатів в цих напрямках.

Теорія розширень симетричних (ермітових) операторів — важливий розділ функціонального аналізу, тісно пов'язаний з різноманітними галузями сучасної математики — проблемою моментів, теорією функцій комплексної змінної, граничними задачами для диференціальних рівнянь, квантовою теорією поля, теорією пасивних систем і систем автоматичного регулювання, тощо. Перші основоположні результати тут були одержані фон Нейманом [1] в 1929 р., хоча витоки, мабуть треба шукати у відомих роботах Г. Вейля [2, 3] 1909 – 1910 рр., де були викладені принципові моменти цієї теорії на прикладі звичайного диференціального оператора другого порядку на півосі. Але як самостійний розділ аналізу вона оформилась в працях М. Г. Крейна і була предметом його зацікавленості на протязі всього життя. Розв'язані ним проблеми і створені методи істотно вплинули як на розвиток абстрактної теорії операторів, так і на застосування. Йому, як нікому, вдалося поєднати зовсім різні на перший погляд і за постановкою, і за методами розв'язання задачі, поставивши в центрі уваги, за його ж висловом, „схований за кулісами вражаючий об'єкт — самоспряжене розширення симетричного оператора".

1. Лінійний оператор A в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ називається симетричним, якщо для будь-яких векторів f, g з його області визначення $\mathfrak{D}(A)$

$$(Af, g) = (f, Ag) \tag{1}$$

($(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в $\mathfrak{H}$). Надалі всі симетричні оператори вважатимемо замкненими і такими, що $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}$; тоді умова (1) еквівалентна включенню $A \subset A^*$ (A^* — оператор, спряжений з A). Оператор $\tilde{A} = \tilde{A}^* \supset A$ називається самоспряженим (с. с.) розширенням A. Питання існування у симетричного оператора с. с. розширень і при наявності останніх їх опису було розв'язане фон Нейманом [1] таким чином.

Нехай λ — точка регулярного типу оператора A, тобто

$$\exists k_\lambda > 0: \|Af - \lambda f\| \geq k_\lambda \|f\| \;\; \forall f \in \mathfrak{D}(A)$$

($\|\cdot\|$ — знак норми). Для будь-якого лінійного оператора множина $\rho(\cdot)$ всіх його точок регулярного типу є відкритою. Покладемо $n_\lambda = \dim \mathfrak{N}_\lambda$, де $\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_\lambda$, $\mathfrak{M}_\lambda = (A - \lambda I)\mathfrak{D}(A)$ (I — тотожний оператор). $\mathfrak{N}_\lambda$ називається дефектним підпростором оператора A для точки λ. Виявляється, що у симетричного оператора A число n_λ зберігає своє значення для всіх λ: $\operatorname{Im}\lambda > 0$ і для всіх λ: $\operatorname{Im}\lambda < 0$ (для довільного лінійного оператора М. Г. Крейном і М. А. Красносельським [4] доведено, що n_λ залишається незмінним для всіх λ

з однієї й тієї ж зв'язної компоненти множини $\rho(\cdot)$). Числа $n_+ = n_\lambda$ ($\operatorname{Im}\lambda > 0$) і $n_- = n_\lambda$ ($\operatorname{Im}\lambda < 0$) називаються дефектними, а впорядкована пара (n_+, n_-) — індексом дефекту оператора A. Справедливе співвідношення $\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_i \dotplus \mathfrak{N}_{-i}$, яке показує, що симетричний оператор є с. с. лише тоді, коли його індекс дефекту дорівнює нулеві. Необхідною і достатньою умовою для існування у оператора A с. с. розширень є рівність дефектних чисел, причому будь-яке с. с. розширення $\tilde{A}$ визначається формулами Неймана

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \mathfrak{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_{-i} + U\mathfrak{N}_{-i}, \quad \tilde{A}f = Af_0 + ig_{-i} - iUg_{-i}$$

$$(f = f_0 + g_{-i} + Ug_{-i}, \; f_0 \in \mathfrak{D}(A), \quad g_{-i} \in \mathfrak{N}_{-i}),$$

де U — унітарний оператор з $\mathfrak{N}_{-i}$ на $\mathfrak{N}_i$. Отже, опис всіх с. с. розширень оператора A зводиться до знаходження всіх унітарних операторів з $\mathfrak{N}_{-i}$ на $\mathfrak{N}_i$.

2. Симетричні оператори, що зустрічаються на практиці, здебільшого бувають напівобмеженими, тобто (для напівобмежених знизу)

$$m = m(A) = \inf_{f \in \mathfrak{D}(A)} \frac{(Af, f)}{(f, f)} < \infty.$$

Фон Нейман [1] довів, що для кожного $m_1 < m$ існує с. с. розширення з нижньою межею m_1, і висловив припущення, що існує і с.с. розширення з нижньою межею m. Таке розширення A_μ (так зване жорстке, або розширення за Фрідріхсом) було побудоване М. Стоуном та К. Фрідріхсом (конструкцію див., наприклад, в [5]). Для звичайних диференціальних операторів і еліптичних операторів з частинними похідними воно відповідає задачі Діріхле. М. Г. Крейном [6 – 8] з'ясовано, коли таке розширення єдине і дано опис всіх можливих с. с. розширень $\tilde{A}$, для яких $m(\tilde{A}) \geq \gamma$, де $\gamma \leq m$ довільне.

Неважко бачити, що заміною A на $A - \gamma I$ та $\tilde{A}$ на $\tilde{A} - \gamma I$ питання зводиться до розгляду додатних с. с. розширень додатного симетричного оператора A ($m(A) \geq 0$). М. Г. Крейн показав, що множина $P(A)$ всіх таких розширень містить два крайніх розширення; одне з них — жорстке A_μ, а друге — так зване м'яке розширення A_M, що визначається рівністю $\mathfrak{D}(A_M) = \mathfrak{D}(A) \dotplus \operatorname{Ker} A^*$. Всі останні додатні с. с. розширення A містяться між A_M та A_μ: $A_M \leq \tilde{A} \leq A_\mu$ (нерівність розуміється в сенсі квадратичних форм), причому

$$\tilde{A} \in P(A) \Leftrightarrow \exists\, a > 0\colon (A_\mu + aI)^{-1} \leq (\tilde{A} + aI)^{-1} \leq (A_M + aI)^{-1}.$$

Знайдено умови, за яких $A_M = A_\mu$. При доведенні використана принципова теорема М. Г. Крейна про існування двох крайніх розширень S_μ та S_M у множині с. с. розширень $\tilde{S}$ із збереженням норми ($\|\tilde{S}\| = \|S\|$) нещільно заданого обмеженого симетричного оператора S. Виявляється, що $\tilde{A}$ можна записати як $\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1}$, і якщо $\tilde{S}$ пробігає множину $\mathfrak{S}(S)$ всіх с. с. розширень оператора $S = (I - A)(I + A)^{-1}$ з властивістю $\|\tilde{S}\| = 1$, то $\tilde{A}$ пробігає $P(A)$. М. Г. Крейн дав також правило підрахунку кількості від'ємних власних значень симетричних розширень додатного оператора зі скінченними дефектними числами.

Подальший розвиток теорія розширень додатних операторів дістала в роботах М. І. Вішика [9] та М. Ш. Бірмана [10], в яких різним класам розширень додатно визначеного оператора співставляються деякі оператори у просторі

Ker A^*. В [10] одержано критерії додатності й додатної визначеності $\tilde{A}$, а також характеристику від'ємної частини його спектру (якщо $\tilde{A}$ не є додатним).

3. Як зазначалось вище, симетричний оператор A не має с.с. розширень у вихідному просторі $\mathfrak{H}$, якщо його дефектні числа не є рівними. Але (див. [11, 12]) він може бути розширений до с. с. оператора $\hat{A}$, що діє в ширшому, ніж $\mathfrak{H}$, просторі $\hat{\mathfrak{H}}$. Спираючись на це, було доведено, що оператор A допускає інтегральне зображення, подібне до спектрального розкладу звичайного с. с. оператора, а саме,

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d(F_t f, g) \quad (f \in \mathfrak{D}(A),\ g \in \mathfrak{H}), \tag{2}$$

$$\|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(F_t f, f), \tag{3}$$

де F_t — так званий узагальнений розклад одиниці; він відрізняється від звичайного (ортогонального) тим, що вимога ортогональності $F_u F_v = F_s$ ($s = \min\{u, v\}$) не є обов'язковою. Узагальнений розклад одиниці, що задовольняє (2), (3), називається спектральною функцією A. М. А. Наймарком [11] було показано, що будь-яка спектральна функція оператора A має вигляд $F_t = \hat{P}\hat{E}_t$, де $\hat{E}_t$ — розклад одиниці деякого с. с. розширення $\tilde{A}$ оператора A з виходом у ширший від $\mathfrak{H}$ простір $\hat{\mathfrak{H}}$, а $\hat{P}$ — оператор проектування $\hat{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$. Звідси випливає, що кожному симетричному оператору належить деяка множина спектральних функцій. Постає питання про опис цієї множини, що еквівалентне опису всіх узагальнених резольвент

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_t}{t-\lambda}$$

оператора A. У випадку, коли індекс дефекту A є $(1, 1)$, ця задача розв'язана М. Г. Крейном [13] (в іншій формі — М. А. Наймарком [14]). А саме, було показано, що згадана множина описується формулою

$$R_\lambda = R_\lambda^0 - \frac{(\cdot, g(\bar{\lambda}))\,g(\lambda)}{\tau(\lambda) + Q_1(\lambda)}, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0, \tag{4}$$

де R_λ^0 — резольвента фіксованого с. с. розширення A, $g(\lambda)$ та $Q_1(\lambda)$ — певні голоморфні у верхній півплощині функції, не залежні від вибору R_λ, а $\tau(\lambda)$ пробігає клас N функцій, визначених і голоморфних при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, що мають у цій півплощині невід'ємну уявну частину. R_λ є звичайною (ортогональною) резольвентою тоді і лише тоді, коли $\tau(\lambda) = c = \text{const}$, $\operatorname{Im} c = 0$.

Формула (4) відіграла істотну роль в теорії розширень симетричних операторів з дефект-індексом $(1, 1)$, розвинутій в роботах [13, 15, 16]. Розглянемо коротко основні моменти цієї теорії. Для простоти вважатимемо оператор A простим (тобто не існує інваріантних підпросторів, в яких A є с. с.).

Виберемо елемент $u \in \mathfrak{H}$ такий, що $u \notin \mathfrak{M}_{\lambda_0}$, $u \notin \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}_0}$ хоча б для одного λ_0, $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$. Кожному $f \in \mathfrak{H}$ співставимо функцію $f_u(\lambda)$ так, щоб $f - f_u(\lambda)\,u \in \mathfrak{M}_\lambda$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Функція $f_u(\lambda)$ мероморфна в кожній з півплощин

$\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Відповідність $f \to f_u(\lambda)$ взаємно однозначна, причому елементові $g = Af$ відповідає функція $g_u(\lambda) = \lambda f_u(\lambda)$. Таким чином, простір $\mathfrak{H}$ ототожнюється з простором мероморфних функцій $f_u(\lambda)$, в якому образ A діє як оператор множення на незалежну змінну (тобто відображення $f \to f_u(\lambda)$ — деякий абстрактний аналог перетворення Фур'є). Якщо „масштаб" u можна вибрати так, щоб всі функції $f_u(\lambda)$ були цілими, то оператор A, за М. Г. Крейном, називається цілим.

Нехай $\{\varphi_k\}$ — ортонормований базис в $\mathfrak{H}$. Покладемо

$$\varphi_k(\lambda) = \varphi_{ku}(\lambda), \quad \psi_k(\lambda) = (\chi_k, u), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де χ_k визначаються з рівностей $(A - \lambda I)\chi_k = \varphi_k - \varphi_k(\lambda)u$. Тоді у випадку цілого A функції

$$\begin{gathered} q_0(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\psi_k(0)}\varphi_k(\lambda), \quad q_1(\lambda) = -\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\varphi_k(0)}\varphi_k(\lambda), \\ p_0(\lambda) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\psi_k(0)}\psi_k(\lambda), \quad p_1(\lambda) = 1 + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\varphi_k(0)}\psi_k(\lambda) \end{gathered} \tag{5}$$

є цілими і для них виконуються співвідношення

$$\begin{gathered} q_0(\lambda)\overline{q_1(\eta)} - q_1(\lambda)\overline{q_0(\eta)} = (\lambda - \eta)\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_k(\eta)}, \\ p_0(\lambda)\overline{p_1(\eta)} - p_1(\lambda)\overline{p_0(\eta)} = (\lambda - \overline{\eta})\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\lambda)\overline{\psi_k(\eta)}, \\ q_0(\lambda)\overline{p_1(\eta)} - q_1(\lambda)\overline{p_0(\eta)} = 1 + (\lambda - \eta)\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\lambda)\overline{\psi_k(\eta)}. \end{gathered} \tag{6}$$

Показано також, що кожна спектральна функція F_t оператора A цілком визначається функцією $\sigma(t) = (F_t u, u)$, $-\infty < t < \infty$. Позначимо множину таких $\sigma(t)$ через $V_u(A)$. Виходячи з (4) – (6), встановлено взаємно однозначну відповідність між функціями $\sigma(t)$ з $V_u(A)$ і функціями $\tau(\lambda)$ класу N за допомогою формули

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - \lambda} = \frac{p_0(\lambda) + \tau(\lambda)p_1(\lambda)}{q_0(\lambda) + \tau(\lambda)q_1(\lambda)}, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0. \tag{7}$$

Матриця-функція $W(\lambda) = \| W_{ik}(\lambda) \|_{i,k=1}^{2}$, що визначається співвідношеннями

$$\begin{gathered} p_1(\lambda)' = (W_{11}(\lambda)u, u), \quad p_0(\lambda) = (W_{12}(\lambda)u, u), \\ q_1(\lambda) = (W_{21}(\lambda)u, u), \quad q_0(\lambda) = (W_{22}(\lambda)u, u), \end{gathered}$$

називається резольвентною матрицею оператора A. Вона відіграє важливу роль при описі різноманітних спектральних властивостей оператора A. Виявляється, що у випадку цілого A для будь-яких $\sigma(t) \in V_u(A)$ і $f, g \in \mathfrak{H}$

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f_u(t)\overline{g_u(t)}\, d\sigma(t). \tag{8}$$

Отже, $\mathfrak{H}$ реалізується у вигляді простору цілих функцій зі скалярним добутком, що записується (взагалі кажучи, неоднозначно) інтегралом Стілтьєса (8), а оператор A — у вигляді множення на λ.

У цілого оператора завжди існує дійсний масштаб u, тобто для кожного $f \in \mathfrak{H}$ знайдеться $g \in \mathfrak{H}$ таке, що $f_u(\overline{\lambda}) = \overline{g_u(\lambda)}$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Нехай

$$D(\lambda) = \sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|f_u(\lambda)|^2}{\|f\|^2} = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(\lambda)|^2.$$

Функція $D(\lambda) = D(x + iy)$ є парною відносно y і монотонно зростає разом з $|y|$, при цьому

$$\log(u, u) + 2h|y| \le \log D(x + iy) \le 2h|y| + \frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log D(t)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt < \infty. \tag{9}$$

Число $h \ge 0$ називається типом цілого оператора A. З нерівностей (9) випливає, що якщо A — цілий оператор типу h, то всі функції $f_u(\lambda)$ є цілими експоненціального типу, не вищого за h, а індикаторна діаграма кожної з них є відрізком уявної осі.

Зауважимо, що цілі оператори з індексом дефекту $(1, 1)$ виникають в різних задачах аналізу — класичній степеневій проблемі моментів, проблемі продовження додатно визначених функцій, проблемі продовження гвинтових дуг у гільбертовому просторі з її застосуваннями до задач екстраполяції і фільтрації стаціонарних випадкових процесів. Цей досить короткий виклад принципових положень теорії цілих операторів з дефект-індексом $(1, 1)$ показує, особливо тим, хто знайомий з класичною проблемою моментів, що в теорії цілих операторів М. Г. Крейну вдалося одержати основні аналоги її досягнень і охопити з єдиної точки зору згадані вище задачі аналізу. Ця теорія зумовила постановку і розв'язання нових оригінальних задач в теорії аналітичних функцій, переконливо підтверджуючи його власне висловлення про те, що „значні успіхи в функціональному аналізі будуть досягнуті шляхом використання все ширшого арсеналу сучасних засобів теорії аналітичних функцій і, з другого боку, функціональний аналіз, виступаючи в ролі замовника, стимулюватиме розвиток останньої".

Формули (4), (7), (8) пізніше були узагальнені М. Г. Крейном [17] на випадок симетричного оператора з рівними скінченними дефектними числами, а в роботі [18] ним була побудована теорія зображень симетричного оператора з дефект-індексом (m, m) $(m < \infty)$, зокрема, вивчений клас цілих операторів. Ця теорія дала можливість однаково поглянути на матричну проблему моментів, проблему продовження додатно визначених матричних функцій та ін. Ще пізніше М. Г. Крейном та Ш. Н. Саакяном [19] формула (7) була розповсюджена на оператори з довільними рівними дефектними числами і М. Г. Крейном та І. Є. Овчаренком [20 – 22] — на деякі спеціальні класи симетричних операторів. В [23] М. Г. Крейн і Ш. Н. Саакян відкрили важливий зв'язок між резольвентною матрицею симетричного оператора з рівними дефектними числами і характеристичною функцією деякого U-вузла.

Чимало задач, в тому числі проблема опису спектральних функцій диференціальних операторів, приводять до своєрідного варіанту теорії зображень симетричних, зокрема цілих операторів, для яких масштаб (масштабний підпростір) містить так звані нèвластиві елементи — вектори з ширшого, ніж $\mathfrak{H}$, простору. На необхідність розгляду цієї ситуації вказав М. Г. Крейн у своїй доповіді [24] на Міжнародному конгресі математиків (Москва, 1966). Вона була розглянута в роботах Ю. Л. Шмульяна (стосовно цих робіт див. огляд [25]).

4. В спектральній теорії диференціальних операторів та її застосуваннях симетричні оператори, як правило, з'являються таким чином. Нехай $l[\cdot]$ — формально с. с. диференціальний вираз.в області $G \subset R^n$. Означимо A як замикання в $\mathfrak{H} = L_2(G)$ оператора, заданого виразом l на $C_0^\infty(G)$. Оператор A симетричний, він називається мінімальним оператором, породженим виразом l. Виявляється, що оператор $\tilde{A}$: $\tilde{A}y = l[y]$, визначений на функціях, що задовольняють граничні умови, є розширенням мінімального і звуженням максимального оператора A^*. Тому виникають задачі: а) виділити ті граничні умови, які визначають с. с. розширення $\tilde{A}$; б) з'ясувати, чи всі самоспряжені розширення $\tilde{A}$ визначаються граничними умовами. Відповіді на ці запитання важливі для теорії крайових задач і вперше були дані М. Г. Крейном [8] у випадку звичайного формально с. с. l, виходячи з викладеної вище загальної теорії розширень симетричного оператора. Застосування ж цієї теорії до диференціальних з частинними похідними або диференціально-операторних виразів у нескінченновимірному гільбертовому просторі наштовхується на труднощі, пов'язані з нескінченністю дефектних чисел оператора A; тому опис с. с. розширень формулами Неймана не вдалося переформулювати в термінах граничних умов.

Суттєвим моментом у подоланні скрути, що виникла, стали роботи Ф. С. Рофе-Бекетова [26, 27], в яких у компактній формі за допомогою граничних умов були описані всі с. с. розширення мінімального оператора (індекс дефекту (∞, ∞)), породженого у просторі $\mathfrak{H} = L_2(H, (0, b))$ квадратично сумовних вектор-функцій на проміжку $[0, b]$, $b < \infty$, із значеннями в гільбертовому просторі H загальним диференціальним с. с. виразом l порядку m з неперервними в H операторними коефіцієнтами. Основну роль при цьому відіграла формула Гріна

$$(l[x], y) - (x, l[y]) = \langle \hat{x}', \hat{y} \rangle_m - \langle \hat{x}, \hat{y}' \rangle_m, \tag{10}$$

встановлена для будь-яких вектор-функцій $x(t)$, $y(t)$ з $\mathfrak{D}(A^*)$ (тут $\hat{x}$ та $\hat{x}'$ — m-мірні вектори, компонентами яких є значення $x(t)$ та її похідних у кінцях інтервалу, $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ — скалярний добуток в $H^m = H \oplus \ldots \oplus H$ (m доданків)) і вперше застосоване для поставленої мети зображення с. с. лінійного (бінарного) відношення — природного узагальнення с. с. оператора. Нагадаємо, що під лінійним відношенням в гільбертовому просторі X розуміється довільна підмножина $\theta \subset X \oplus X$. Відношення θ називається с. с., якщо $(f', g)_X - (f, g')_X = 0$ ($(\cdot, \cdot)_X$ — скалярний добуток в X) для будь-яких $\{f, f'\} \in \theta$, $\{g, g'\} \in \theta$, і остання рівність для деякої пари $\{f, f'\} \in X \oplus X$ і будь-яких $\{g, g'\} \in \theta$ зумовлює включення $\{f, f'\} \in \theta$. Ф. С. Рофе-Бекетов показав, що для будь-якого с. с. відношення $\theta \subset X \oplus X$ існує єдиний унітарний в X оператор U такий, що $\{f, f'\} \in \theta$ тоді і лише тоді, коли

$$(U - I) f' - i(U + I) f = 0. \tag{11}$$

Між с. с. розширеннями $\tilde{A}$ мінімального оператора і с. с. лінійними відношеннями θ в H^m існує взаємно однозначна відповідність, внаслідок якої кожне $\tilde{A}$ породжується операцією $l[y]$ і граничною умовою одного з видів

$$\cos C\,\hat{y}' - \sin C\,\hat{y} = 0, \quad (U-I)\,\hat{y}' + i(U+I)\,\hat{y} = 0, \tag{12}$$

де C і U — відповідно деякий с. с. і унітарний оператор в H^n. Навпаки, кожна з таких граничних умов визначає с. с. розширення A.

Техніка лінійних відношень була використана М. Л. Горбачуком [28] для розв'язання поставлених вище задач у випадку, коли l — вираз Штурма – Ліувілля: $l[y](t) = -y''(t) + q\,y(t)$ з необмеженим операторним потенціалом $q \geq 0$. Зауважимо, що наявність необмеженого операторного коефіцієнта істотно змінює ситуацію: функція з області визначення максимального оператора є досить гладкою лише всередині інтервалу, її граничні значення так само, як і граничні значення її похідної, можуть не існувати в H — вони існують в ширшому за H просторі узагальнених елементів. Тому формула Гріна у вигляді (10) вже не має сенсу. Однак в [28] підібрано такі лінійні комбінації узагальнених граничних значень вектор-функції $x(t)$ з $\mathcal{D}(A^*)$ та її похідної, які належать до H і, взяті за компоненти векторів $\hat{x}$ та $\hat{x}'$, знову приводять до формули (10). А це вже, завдяки зображенню (11), дає можливість отримати всі с. с. розширення мінімального оператора за допомогою умов типу (12), в яких вектори $\hat{x}$ та $\hat{x}'$ побудовані за новим зразком.

Якщо спектр q дискретний, то, як показано в [29, 30], оператор A завжди має с. с. розширення, спектр яких дискретний; всі вони описуються умовами (12) з цілком неперервними $\cos C$ та $U - I$. Знаючи асимптотичний розподіл власних значень оператора q, можна знайти с. с. розширення $\tilde{A}$ з головним членом асимптотики спектру таким самим, як у задачі Діріхле, виділити розширення зі спектром, густішим, ніж у цій задачі, і т. ін. При описі розширень з різними спектральними властивостями істотну роль відіграє деякий аналог формули узагальнених резольвент, в якій оператор U фігурує в явній формі. Таким чином, в роботах [26 – 30] були окреслені найсуттєвіші моменти, необхідні для опису і класифікації с. с. розширень мінімального оператора в термінах граничних умов (формула Гріна, зображення с. с. лінійного відношення, формула узагальнених резольвент). Ці моменти лягли в основу побудови А. Н. Кочубеєм [31] і В. М. Бруком [32] абстрактної теорії розширень симетричного оператора в термінах так званих просторів граничних значень. Про її подальший розвиток див. [33].

1. *Neumann J. von.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren // Math. Ann. – 1929. – **102**. – S. 49 – 131.
2. *Weyl H.* Uber gewohnliche lineare Differentialgleichungen mit Singularen Stellen und ihre Eigenfunktionen // Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. – 1909. – S. 37 – 63.
3. *Weyl H.* Uber gewohnliche Differentialgleichungen mit Singularitaten und die Zugehorigen Entwicklungen willkurlicher Funktionen // Math. Ann. – 1910. – **68**. – S. 220 – 269.
4. *Крейн М. Г., Красносельский М. А.* Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов // Успехи мат. наук. – 1947. – **3**, № 3. – С. 61 – 106.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Спектральная теория. – М.: Мир, 1966. – 1063 с.
6. *Крейн М. Г.* О самосопряженных расширениях ограниченных и полуограниченных эрмитовых операторов // Докл. АН СССР. – 1945. – **48**, № 5. – С. 323 – 326.
7. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Мат сб. – 1947. – **20**, № 3. – С. 431 – 495.
8. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. II // Там же. – 1947. – **21**, № 3. – С. 365 – 404.
9. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. Мат. о-ва. – 1952. – **1**. – С. 187 – 246.
10. *Бирман М. Ш.* К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов // Мат. сб. – 1956. – **38**, № 4. – С. 431 – 450.

11. *Наймарк М. А.* О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора // Изв. АН СССР. – 1940. – **4**, № 1. – С. 53 – 104.
12. *Наймарк М. А.* Спектральные функции симметрического оператора // Там же. – № 3. – С. 277 – 318.
13. *Крейн М. Г.* Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице // Докл. АН СССР. – 1944. – **43**, № 8. – С. 323 – 326.
14. *Наймарк М. А.* О спектральных функциях симметрического оператора // Изв. АН СССР. – 1943. – **7**, № 6. – С. 285 – 296.
15. *Крейн М. Г.* Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице. II // Докл. АН СССР. – 1944. – **44**, № 4. – С. 131 – 134.
16. *Крейн М. Г.* Об одном замечательном классе эрмитовых операторов // Там же. – № 5. – С. 191 – 195.
17. *Крейн М. Г.* О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m) // Там же. – 1946. – **52**, № 8. – С. 657 – 660.
18. *Крейн М. Г.* Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) // Укр. мат. журн. – 1949. – № 2. – С. 1 – 65.
19. *Крейн М. Г., Саакян Ш. Н.* О некоторых новых результатах в теории резольвент эрмитовых операторов // Докл. АН СССР. – 1966. – **169**, № 6. – С. 1269 – 1272.
20. *Крейн М. Г., Овчаренко І. Є.* До теорії узагальнених резольвент нещільно заданих ермітових стиснень // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1977. – № 10. – С. 881 – 884.
21. *Крейн М. Г., Овчаренко И. Е.* О Q-функциях и sc-резольвентах неплотно заданных эрмитовых сжатий // Сиб. мат. журн. – 1987. – **18**, № 5. – С. 1032 – 1056.
22. *Крейн М. Г., Овчаренко И. Е.* Об обобщенных резольвентах и резольвентных матрицах положительных эрмитовых операторов // Докл. АН СССР. – 1977. – **231**, № 5. – С. 1063 – 1066.
23. *Крейн М. Г., Саакян Ш. Н.* Резольвентная матрица эрмитова оператора и связанные с нею характеристические функции // Функцион. анализ и его прил. – 1970. – **4**, № 3. – С. 103 – 104.
24. *Крейн М. Г.* Аналитические проблемы и результаты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве // Тр. Междунар. конгр. математиков (Москва, 1966). – М., 1968. – С. 189 – 231.
25. *Цекановский Э. Р., Шмульян Ю. Л.* Вопросы теории расширения неограниченных операторов в оснащенных гильбертовых пространствах // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1977. – **14**. – С. 59 – 100.
26. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН СССР. – 1969. – **184**, № 5. – С. 1034 – 1037.
27. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1969. – Вып. 8. – С. 3 – 24.
28. *Горбачук М. Л.* Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 1. – С. 10 – 21.
29. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О спектре самосопряженных расширений минимального оператора, порожденного выражением Штурма – Лиувилля с операторным потенциалом // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 6. – С. 726 – 734.
30. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма – Лиувилля с операторным потенциалом // Там же. – № 3. – С. 291 – 304.
31. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41 – 48.
32. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. – 1976. – **100**, № 2. – С. 210 – 216.
33. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л., Кочубей А. Н.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1299 – 1313.

Получено 30. 09. 93