УДК 517.984.54:534.12.2:534.24

А. Л. Мильман

Обратная задача акустической теории рассеяния для центрально-симметричных финитных препятствий в двумерном пространстве

Теория рассеяния для волнового уравнения в двумерном пространстве, возмущенного финитной функцией радиальной переменной, суммируемой всюду, кроме, быть может, начала координат, рассматривается с точки зрения схемы Лакса — Филлипса. Рассматривается оператор сжатия, связанный с соответствующей задачей рассеяния. Показано, что это сжатие имеет одномерные дефектные подпространства, а его характеристическая оператор-функция является мероморфной функцией, нули и полюсы которой совпадают соответственно с собственными значениями определенного диссипативного оператора и сопряженного ему. Решение обратной задачи рассеяния получено путем сведения ее к обратной задаче по двум спектрам для сингулярного самосопряженного оператора Штурма — Лиувилля.

Теорія розсіяння для хвильового рівняння у двовимірному просторі, збуреного фінітною функцією радіальної змінної, сумовною всюди, крім, може бути, початку координат, розглядається з точки зору схеми Лакса — Філліпса. Розглядається оператор стиску, зв'язаний з відповідною задачею розсіяння. Показано, що цей стиск має одновимірні дефектні підпростори, а його характеристична оператор-функція являється міроморфною функцією, нулі та полюси якої співпадають відповідно з власними значеннями певного дисипативного оператора та спряженого йому. Розв'язок оберненої задачі розсіяння здобутий шляхом зведення її до оберненої задачі по двох спектрах для сингулярного самоспряженого оператора Штурма — Ліувілля.

В абстрактной теории рассеяния известна схема Лакса — Филлипса [1], позволяющая успешно изучать рассеяние волн на финитных препятствиях. Применение этой схемы в случае, когда размерность пространства — четное число, осложнено рядом его существенных особенностей по сравнению с нечетномерным случаем [2]. Тем не менее, для четномерных пространств с помощью данной схемы удается получить некоторые содержательные результаты. В частности, в работе [3] указан подход к построению эффективных алгоритмов извлечения информации о рассеивателе из данных рассеяния. Представляет интерес рассмотрение с такой точки зрения конкретных задач теории рассеяния в четномерных пространствах. В. М. Адамян поставил задачу: исследовать случай, когда в однородной двумерной среде рассматривается рассеяние сферических волн на препятствии, представляющем собой сферическую область определенного радиуса a, внутри которой волновые процессы в среде описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - q(r)\,u, \qquad (1)$$

где $q(r)$ — неизвестная сферически симметричная функция координат, тождественно равная нулю за пределами рассеивающей области (т. е. вне отрезка $0 \leqslant r \leqslant a$), неотрицательная внутри нее и суммируемая на любом промежутке $\varepsilon \leqslant r \leqslant a$, где $\varepsilon > 0$. В нечетномерном случае уравнение (1) как акустическое уравнение с потенциалом рассматривалось в [1] (уравнение (1) может описывать также распространение поперечных волн в бесконечной мембране, связанной с винклеровским основанием, жесткость которого задается функцией q). В настоящей статье показано, что в данном случае изучение характеристической оператор-функции Θ_T сжатия T, рассмотренного в [3] (здесь и далее следуем обозначениям, принятым в [3]), позволяет получить полное решение обратной задачи для уравнения (1). Поскольку величина Θ_T, как известно, с точностью до дробно-линейного преобразования аргумента совпадает с S-матрицей соответствующей задачи рассеяния, последнее означает возможность восстановления структуры рассеивателя по данным рассеяния.

Рассмотрим гильбертово пространство H, элементами которого служат двухкомпонентные вектор-функции

$$f(r) = \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix},$$

определенные при $0 \leqslant r < \infty$ и нормированные в энергетической метрике, заданной выражением

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\left| \frac{\partial f_1}{\partial r} \right|^2 + q|f_1|^2 + |f_2|^2 \right) r dr,$$

где $q(r)$ — неотрицательная функция, суммируемая на каждом промежутке $[\varepsilon, a]$, где $\varepsilon > 0$, и равная нулю вне интервала $[0, a]$:

$$q(r > a) \equiv 0. \tag{2}$$

Вследствие (2) приходящее и уходящее пространства $\mathcal{D}^a_\pm$ состоят из тех же элементов, что и при $q \equiv 0$. В этом случае вместо (1) имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}. \tag{3}$$

Элементарными средствами (например, методом разделения переменных) для любого решения уравнения (3), удовлетворяющего условию

$$|u(r = 0, t)| < \infty,$$

нетрудно получить представление

$$u(r, t) = \int_R e^{-ikt} J_0(kr)\, u_k dk, \tag{4}$$

содержащее произвольную функцию u_k параметра k. Подчиняя выражение (4) начальным условиям

$$u(r, t = 0) = f_1(r),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, t = 0) = f_2(r),$$

находим, что u_k выражается через начальные данные $f_1(r)$ и $f_2(r)$ следующим образом:

$$u_k = \frac{1}{2}\operatorname{sign} k \int_{R_+} [k f_1(r) + i f_2(r)]\, J_0(kr)\, r dr.$$

Отсюда, в частности,

$$\| f \|^2 = \frac{1}{2} \int_{R_+} \left(\left| \frac{\partial f_1}{\partial r} \right|^2 + | f_2 |^2 \right) r dr = \int_R | u_k |^2 k \operatorname{sign} k dk. \tag{5}$$

Рассмотрим две функции $\mathcal{J}_+(k)$ и $\mathcal{J}_-(k)$, определенные при действительных значениях аргумента k таким образом:

$$\mathcal{J}_\pm (k) = \begin{cases} \sqrt{k}, & k \geqslant 0, \\ \mp i \sqrt{|k|} & k < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Из определения (6) следует, что любая функция из класса допускающих аналитическое продолжение в нижнюю (верхнюю) полуплоскость при умножении на $\mathcal{J}_+ (\mathcal{J}_-)$ не выходит за пределы этого класса. Положим

$$h(k) = \mathcal{J}_+ (k) u_k = \frac{1}{2} \mathcal{J}_- (k) \int_{R_+} [k f_1 (r) + i f_2 (r)] J_0 (kr) r dr, \tag{7}$$

тогда в силу (5)

$$\| f \|^2 = \int_R | h(k) |^2 dk. \tag{8}$$

Таким образом, любому элементу f из пространства H формулой (7) ставится в соответствие функция $h(k)$, вследствие (8) принадлежащая L^2. Если, к тому же, $f \in \mathcal{D}_+^a$, а значит, по определению $\mathcal{D}_+^a$ $u(r, t) = 0$ для всех $t > 0$ при $r < t + a$, то в силу (4) функция $e^{ika} h(k)$ является граничным значением функции, аналитической в нижней полуплоскости. Аналогично если $f \in \mathcal{D}_-^a$, то $\operatorname{sign} k e^{-ika} h(k)$ — граничное значение функции, аналитической в верхней полуплоскости. Покажем, что указанное соответствие взаимно однозначно. Для этого обратим (7). Из (4) следует

$$\begin{aligned} f_1 (r) &= \int_R h(k) \; J_0 (kr) \frac{dk}{\mathcal{J}_+ (k)}, \\ f_2 (r) &= - i \int_R h(k) \; J_0 (kr) \mathcal{J}_+ (k) dk. \end{aligned} \tag{9}$$

Поэтому для любой функции $h(k) \in L^2$ существует элемент $f \in H$, компоненты которого вычисляются по формулам (9), причем с учетом (4), очевидно, если h удовлетворяет описанным выше дополнительным условиям, то f принадлежит $\mathcal{D}_+^a$ или $\mathcal{D}_-^a$ соответственно.

Значит, отображение

$$\mathcal{F}_+ : f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \mapsto h = \mathcal{J}_+ u_k$$

представляет собой уходящее унитарное спектральное представление, причем (в отличие от [3])

$$\mathcal{F}_+ : \mathcal{D}_+^a \mapsto e^{-ika} H_+^2, \quad \mathcal{D}_-^a \mapsto \operatorname{sign} k e^{ika} H_+^2,$$

где $H_+^2 (H_-^2)$ — класс Харди квадратично интегрируемых функций действительной переменной, допускающих аналитическое продолжение в нижнюю (верхнюю) полуплоскость. Аналогично приходящее унитарное спектральное представление определяется следующим образом: $\mathcal{F}_- : f \to h = \mathcal{J}_- u_k$.

При этом

$$\mathcal{F}_- : \mathcal{D}_+^a \mapsto \operatorname{sign} k e^{-ika} H_+^2, \quad \mathcal{D}_-^a \mapsto e^{ika} H_-^2.$$

Далее, рассмотрев $\mathcal{F}_+$, опишем подпространство $K = H \ominus (\mathcal{D}_+^a \oplus \mathcal{D}_-^a)$.

Для этого изучим произвольный элемент $g \in \mathcal{F}_+(K)$. Учитывая очевидные соотношения

$$K = (\mathcal{D}_+^a)^\perp \cap (\mathcal{D}_-^a)^\perp,$$

$$\mathcal{F}_+(K) = \mathcal{F}_+[(\mathcal{D}_+^a)^\perp] \cap \mathcal{F}_+[(\mathcal{D}_-^a)^\perp],$$

$$\mathcal{F}_+[(\mathcal{D}_+^a)^\perp] = e^{-ika}H_-^2, \quad \mathcal{F}_+[(\mathcal{D}_-^a)^\perp] = \operatorname{sign} k e^{ika} H_+^2,$$

получаем, что при некоторых

$$g_\pm \in H_\pm^2 \tag{10}$$

должны выполняться равенства

$$g = e^{-ika}g_-, \quad g = \operatorname{sign} k e^{ika} g_+,$$

или

$$\varphi_- = e^{2ika}\varphi_+, \tag{11}$$

где введены обозначения $\varphi_\pm = \mathcal{J}_\pm g_\pm$.

Как обобщенные функции из класса медленно растущих (это следует из (10)), функции $\varphi_\pm$ имеют преобразования Фурье в том же классе [4]. Рассматривая носитель Фурье-образа $\tilde{\varphi}(s)$ функции $\varphi_+(k)$, заключаем, что, с одной стороны, в силу (10) он не может содержать точек отрицательной полуоси. Действительно, поскольку $\mathcal{J}_+(k)$ как функция комплексной переменной k допускает не более, чем степенной рост при $|k| \to \infty$, носитель ее Фурье-образа по теореме Пэли — Винера [4] сосредоточен в нуле. Тогда на основании теоремы о свертке носители Фурье-образов функций φ_+ и g_+ совпадают. С другой стороны, в силу (1) и аналогичного свойства функции φ_- носитель функции $\tilde{\varphi}(s)$ не может содержать точек, находящихся правее точки $2a$. Следовательно, в смысле обобщенных функций должно иметь место равенство

$$\varphi_+(k) = \int_0^{2a} e^{-iks}\tilde{\varphi}(s)\,ds,$$

откуда для $g(k)$ вытекает представление

$$g(k) = \frac{1}{\mathcal{J}_-(k)} \int_{-a}^{a} e^{-iks}\varphi(s)\,ds,$$

где введено обозначение $\varphi(s) \equiv \tilde{\varphi}(s+a)$.

Ввиду изложенного выше в представлении $\mathcal{F}_+$ подпространство K исчерпывается всеми элементами $g(k)$ из пространства $\mathcal{F}_+(H) = L^2$, для которых носитель Фурье-образа $\mathcal{J}_- g_-$ как обобщенной функции целиком принадлежит отрезку $[-a, a]$.

Теперь, по-прежнему не выходя за пределы представления $\mathcal{F}_+$, построим оператор P_k ортогонального проектирования на подпространство K.

В силу определения подпространства K произвольный элемент f пространства H может быть представлен в виде

$$f = f_{\mathcal{D}^a} + f_K, \tag{12}$$

$$f_K \in K, \quad f_{\mathcal{D}^a} = \lim_{n\to\infty} ({}_nf_+^a + {}_nf_-^a), \quad {}_nf_\pm^a \in \mathcal{D}_\pm^a, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

причем представление (12) единственно. Оператор P_K может быть определен как отображение $P_K: f \mapsto f_K$, тогда его нахождение сводится к получению выражения для f_K при произвольном $f \in H$. В представлении $\mathcal{F}_+$ соответствующая задача формулируется следующим образом: дана произвольная функция $h(k)$, принадлежащая пространству $\mathcal{F}_+(H) = L^2$; требуется найти функцию $g_K(k)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $g_K(k) \in L^2$; (13)

2) в смысле обобщенных функций имеет место равенство

$$g_K(k) = \frac{1}{\mathcal{F}_-(k)} \int_{-a}^{a} e^{-iks}\varphi(s)\, ds; \tag{14}$$

3) существуют две последовательности функций ${}_ng_+$ и ${}_ng_-$ из классов H_+^2 и H_-^2 соответственно такие, что

$$h = \lim_{n\to\infty} (e^{-ika}\,{}_ng_+ + \operatorname{sign} k e^{ika}\,{}_ng_-) + g_K. \tag{15}$$

Тем самым будет построен оператор

$$\mathcal{F}_+ P_K \mathcal{F}_+^{-1} : h \mapsto g_K. \tag{16}$$

Перепишем (15) с учетом (14) в виде

$$\mathcal{F}_+ h = \lim_{n\to\infty} (e^{-ika}\mathcal{F}_+\,{}_ng_+ + e^{ika}\mathcal{F}_-\,{}_ng_-) + \operatorname{sign} k \int_{-a}^{a} e^{-iks}\varphi(s)\, ds.$$

Выполняя (обобщенное) преобразование Фурье, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{ik\sigma}\mathcal{F}_+(k)\, h(k)\, dk = \lim_{n\to\infty} ({}_n\gamma_+(\sigma - a) + {}_n\gamma_-(\sigma + a)) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R dk e^{ik\sigma} \operatorname{sign} k \int_{-a}^{a} e^{-iks}\varphi(s)\, ds, \tag{17}$$

где через ${}_n\gamma_+(\sigma)$ (${}_n\gamma_-(\sigma)$) обозначена обобщенная функция с носителем, сосредоточенным на положительной (отрицательной) полуоси

$$\operatorname{supp} {}_n\gamma_\pm(\sigma) \subset R_\pm, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{18}$$

Линейный и ограниченный проектор (16) может быть задан не на всем пространстве L^2, а лишь на некотором его плотном подмножестве, в качестве которого возьмем C_0^∞. Тогда его продолжение на все L^2 единственно и может быть получено распространением по непрерывности. Итак, временно предположим, что $h \in C_0^\infty$.

Из (17) вследствие (18) имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(s')\, ds'}{s - s'} = f(s), \quad -a < s < a, \tag{19}$$

где

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_R e^{iks}\mathcal{F}_+(k)\, h(k)\, dk.$$

Решая уравнение (19) (см., например, [5]), получаем

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - s^2}} \left\{ C - \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - s'^2}}{s - s'} f(s')\, ds' \right\}, \tag{20}$$

где C — неопределенная константа. Следовательно,

$$g_K(k) = \frac{a}{2} \mathcal{F}_-(k) \int_R \frac{J_1(ka) J_0(k'a) - J_1(k'a) J_0(ka)}{k - k'} \mathcal{F}_+(k')\, h(k')\, dk' +$$

$$+ \frac{C}{\mathcal{F}_-(k)} J_0(ka).$$

Интеграл в правой части сходится при всех действительных значениях k и определяет функцию, локально квадратично интегрируемую. Кроме того, в силу выбора $h(k)$ интегрирование можно считать ведущимся не вдоль всей действительной оси, а по некоторому конечному отрезку $[-A, A]$, целиком содержащему носитель функции $h(k)$. Тогда асимптотические формулы для функций Бесселя обеспечивают оценку

$$\left| \frac{J_1(ka)\,J_0(k'a) - J_1(k'a)\,J_0(ka)}{k-k'} \right| < M\,|k|^{-\frac{3}{2}},$$

выполняющуюся при достаточно больших k с некоторой константой M для всех $k' \in [-A, A]$. Это гарантирует принадлежность рассматриваемой функции к L^2.

Таким образом, подставляя (20) в (14), получаем два слагаемых, из которых одно, а именно: содержащее константу C, не принадлежит L^2 ни при каком $C \neq 0$. Выполнение условия (13) показывает, что $C = 0$, и

$$g_K(k) \equiv (\mathcal{F}_+ P_K \mathcal{F}_+^{-1} h)(k) = \frac{a}{2}\,\mathcal{J}_-(k) \int_R \frac{J_1(ka)\,J_0(k'a) - J_1(k'a)\,J_0(ka)}{k-k'} \times$$

$$\times\, \mathcal{J}_+(k')\,h(k')\,dk'. \tag{21}$$

Используя (7) и (9), применяем к (21) обратное преобразование. Тогда действие оператора P_K в исходном пространстве H будет описываться формулами

$$(P_K f)_{1,2}(r) = \int_{R_+} \mathcal{P}_{1,2}(r, \rho)\,f_{1,2}(\rho)\,\rho d\rho,$$

$$\mathcal{P}_1(r, \rho) = a \int_{R_+} \left\{ \int_{R_+} \frac{k' J_0(k'a)\,J_1(ka) - kJ_0(ka)\,J_1(k'a)}{k^2 - k'^2}\; J_0(kr)\,dk \right\} J_0(k'\rho)\,k'^2 dk',$$

$$\mathcal{P}_2(r, \rho) = a \int_{R_+} \left\{ \int_{R_+} \frac{kJ_1(ka)\,J_0(k'a) - k'J_1(k'a)\,J_0(ka)}{k^2 - k'^2}\; J_0(kr)\,kdk \right\} \times$$

$$\times\, J_0(k'\rho)\,k'dk'. \tag{22}$$

Рассмотрим, например, $\mathcal{P}_2$. Используем равенство

$$a\,\frac{kJ_1(ka)\,J_0(k'a) - k'J_1(k'a)\,J_0(ka)}{k^2 - k'^2} = \int_0^a J_0(kx)\,J_0(k'x)\,xdx.$$

Тогда из (22) получаем

$$\mathcal{P}_2(r, \rho) = \int_0^a \left\{ \int_{R_+} J_0(kx)\,J_0(kr)\,kdk \right\} \left\{ \int_{R_+} J_0(k'\rho)\,J_0(k'x)\,k'dk' \right\} xdx =$$

$$= \int_0^a \frac{\delta(x-z)}{x}\,\frac{\delta(x-\rho)}{x}\,xdx = \begin{cases} \dfrac{\delta(\rho - r)}{\rho}, & 0 \leqslant r \leqslant a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Аналогично

$$\mathcal{P}_1(r, \rho) = \begin{cases} \dfrac{\delta(\rho - r)}{\rho}, & 0 \leqslant r \leqslant a, \\ \dfrac{\delta(\rho - a)}{\rho}, & r > a. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(P_K f)_1(r) = \begin{cases} f_1(r), & 0 \leqslant r \leqslant a, \\ f_1(a), & r > a; \end{cases} \tag{23}$$

$$(P_K f)_2(r) = \begin{cases} f_2(r), & 0 \leqslant r \leqslant a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \tag{24}$$

Выше предполагалось, что элемент f берется из плотного в H подмножества, являющегося прообразом C_0^∞ при отображении $\mathscr{F}_+$, однако анализ формул (23) и (24) показывает, что найденное выражение для проектора P_K справедливо при произвольном $f \in H$, так как определяемое ими отображение непрерывно.

Рассмотрим сжатие T [3]. Учитывая, что группа $\{U(t)\}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $i \dfrac{\partial}{\partial t} U(t) = \mathscr{H} U(t)$, где, как это следует из (1),

$$\mathscr{H} = i \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta - q(r) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}, \tag{25}$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} [e^{-t} U(t)] = - e^{-t} U(t) - i e^{-t} \mathscr{H} U(t),$$

откуда

$$e^{-t} P_K U(t) = - \frac{\partial}{\partial t} [P_K (I + i\mathscr{H})^{-1} e^{-t} U(t)]. \tag{26}$$

Интегрируя (26), получаем

$$T = I|_K + 2i P_K (\mathscr{H} - i)^{-1}|_K.$$

Вычисление показывает, что действие оператора $(\mathscr{H} - i)^{-1}$ на произвольный элемент f описывается выражением

$$(\mathscr{H} - i)^{-1} f = \int_0^\infty \begin{pmatrix} iG & iG \\ iG - i\delta(r - r') & iG \end{pmatrix} (r, r') \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} (r')\, dr',$$

где $G(r, r')$ — функция Грина краевой задачи

$$\begin{gathered} (-\Delta + q(r))\, y = -y, \quad 0 \leqslant r < \infty, \\ |y(r \to 0)| < \infty, \\ |y(r \to \infty)| < \infty, \end{gathered} \tag{27}$$

которая может быть выражена через решения задачи (27) $\varphi_i(r)$ и $\psi_i(r)$, удовлетворяющие граничным условиям соответственно в нуле и на бесконечности, следующим образом:

$$G(r, r') = \frac{1}{\omega_i} \varphi_i(r_<)\, \psi_i(r_>),$$

где

$$\omega_i \equiv a [\varphi_i'(a) \psi_i(a) - \varphi_i(a) \psi_i'(a)], \quad r_< = \min(r, r'), \quad r_> = \max(r, r').$$

Тогда если $f \in K$, то при $0 \leqslant r \leqslant a$:

$$Tf = f + 2i \int_0^a \begin{pmatrix} iG & iG \\ iG - i\delta & iG \end{pmatrix} f\, dr' - 2i \frac{f_1(a)}{\omega_i} \left[\int_a^\infty \psi_i(r')\, r' dr' \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi_i(r),$$

а так как

$$\int\limits_a^\infty \psi_i(r')\,r'dr' = \int\limits_a^\infty \frac{1}{r'}\,\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\,\frac{\partial \psi_i(r')}{\partial r'}\right) r'dr' = -\,a\varphi_i'(a),$$

то

$$Tf = f + 2i\int\limits_0^a \begin{pmatrix} iG & iG \\ iG - i\delta & iG \end{pmatrix} f dr' + 2ai\,\frac{\psi_i'(a)}{\omega_i}\,f_1(a)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\varphi_i(r). \qquad (28)$$

Нетрудно убедиться, что при любом действительном значении параметра h оператор $\mathcal{H}_h$, определенный выражением (25) на подмножестве элементов f из K, удовлетворяющих дополнительному граничному условию при $r = a$: $\partial f_1/\partial r = ihf_2$, самосопряжен, а следовательно, при любом таком h оператор $U_h = I + 2i(\mathcal{H}_h - i)^{-1}$, оказывается унитарным. Кроме того, выясняется, что сжатие T отличается от оператора U_h на одномерный оператор, а именно; $T = U_h + p_h(\cdot, \hat{\varphi}_{-i})\,\hat{\varphi}_i$, где p_h — некоторая константа,

$$\hat{\varphi}_{-i}(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\bar{\varphi}_i(r), \qquad (29)$$

$$\hat{\varphi}_i(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\varphi_i(r). \qquad (30)$$

Вычислим характеристическую оператор-функцию $\Theta_T(\lambda)$ сжатия T, определенную следующим образом:

$$\Theta_T(\lambda) = -T + \lambda(I - TT^*)^{1/2}(I - \lambda T^*)^{-1}(I - T^*T)^{1/2}.$$

Дефектные подпространства в этом случае оказываются натянутыми на векторы (29) и (30) одномерными пространствами, переходящими друг в друга под действием операторов T и T^* соответственно.

В результате $\Theta_T(\lambda)$ — оператор, отображающий одно дефектное подпространство на другое, определяется величиной

$$(\Theta_T(\lambda)\,\hat{\varphi}_{-i}, \hat{\varphi}_i) = \Theta_0\,\frac{\varphi'_{i\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}(a) - iH\,\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}\,\varphi_{i\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}(a)}{\varphi'_{i\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}(a) - i\bar{H}\,\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}\,\varphi_{i\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}(a)}\,, \qquad (31)$$

где Θ_0 — унитарная константа, $H = -H_1^{(1)}(ia)/H_0^{(1)}(ia)$, а $\varphi_\mu(r)$ — регулярное при $r \to 0$ решение уравнения $(-\Delta + q)\,\varphi_\mu(r) = \mu^2\varphi_\mu(r)$. Исключив из (31) константу Θ_0 (например, полагая $\lambda \to 1$), получим величину

$$m(z) = \frac{\varphi_z'(a) - Hz\varphi_z(a)}{\varphi_z'(a) - \bar{H}z\varphi_z(a)}\,,$$

значения которой достаточно для определения искомой функции $q(r)$. Действительно, из тождества

$$\frac{(z\bar{H} - h_1)\,m - (zH - h_1)}{(z\bar{H} - h_2)\,m - (zH - h_2)} = \frac{\varphi_z'(a) - h_1\varphi_z(a)}{\varphi_z'(a) - h_2\varphi_z(a)}\,, \qquad (32)$$

где h_1, h_2 — произвольные действительные числа, следует, что величина (32) — мероморфная функция, нули и полюсы которой совпадают с двумя спектрами самосопряженного оператора Штурма — Лиувилля на отрезке $[0, a]$ с сингулярным концом

$$L = -\frac{d^2}{dr^2} + q(r) - \frac{1}{4r^2}\,, \qquad (33)$$

собственными функциями которого, соответствующими собственным значениям λ, являются функции $\sqrt{r}\varphi_{\sqrt{\lambda}}(r)$. Восстановление оператора L с помощью процедуры из [6] в силу (33) решает задачу нахождения функции $q(r)$. При этом оказывается, что действие оператора $B = i(T+I)(T-I)^{-1}$ определено на функциях, удовлетворяющих граничному условию

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = -i\frac{H_1^{(1)}(ia)}{H_0^{(1)}(ia)} f_2, \quad r = a, \tag{34}$$

и задается выражением (25). Это следует из того, что область определения оператора B составляют векторы, получающиеся по формулам (23), (24) из элементов вида (28), компоненты которых при $r > a$ вследствие (2) пропорциональны функции Ганкеля первого рода и удовлетворяют условию (34) при приближении к правому концу отрезка $[0, a]$ извне, которое в силу суммируемости функции $q(r)$ сохраняется в данном случае и при аналогичном приближении изнутри отрезка.

Таким образом, $\Theta_T(\lambda)$ является мероморфной оператор-функцией, нули которой совпадают с собственными значениями диссипативного оператора B, связанного со сжатием T преобразованием Кэли, а полюсы — с собственными значениями сопряженного оператора B^*.

1. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния.— М. : Мир, 1971.— 312 с.
2. *Lax P. D., Phillips R. S.* Scattering theory for acoustic equation in an even number of space dimensions // Indiana Univ. Math. J.— 1972.— **22**.— P. 101—134.
3. *Адамян В. М.* К теории рассеяния для волновых уравнений в четномерных пространствах // Функцион. анализ и его прил.— 1976.— **10**, вып. 4.— С. 1—8.
4. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т.— М. : Мир, 1978.— Т. 2.— 395 с.
5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5-ти т.— М. : Гостехтеоретиздат, 1958.— Т. 4.— 804 с.
6. *Гасымов М. Г., Левитан Б. М.* О дифференциальных операторах Штурма — Лиувилля с дискретным спектром // Мат. сб.— 1964.— **63**, № 3.— С. 445—458.

Одес. ун-т
Получено 21.03.89