УДК 517.988

А. Ю. Лучка

Вариационно-итеративный метод для интегральных уравнений

Обосновывается применение вариационно-итеративного метода к нелинейным интегральным уравнениям с потенциальными сильно монотонными и липшиц-непрерывными операторами, и исследуется его скорость сходимости для специальных систем координатных функций.

Обгрунтовується застосування варіаційно-ітеративного методу до нелінійних інтегральних рівнянь з потенціальними строго монотонними та ліпшіць-неперервними операторами, і досліджується його швидкість збіжності для спеціальних систем координатних функцій.

В работах [1, 2] изложена теория вариационно-итеративного метода применительно к нелинейным уравнениям в гильбертовом пространстве с монотонным потенциальным и липшиц-непрерывным оператором. В данной статье обосновывается вариационно-итеративный метод и изучается его скорость сходимости для интегральных уравнений

$$u(x)+\int_{\Omega} C(x,t)\,F\Big[t,\ \int_{\Omega} G(t,s)\,u(s)\,ds\Big]\,dt=f(x), \tag{1}$$

где $u\in L_2(\Omega)$ — искомая функция, $\Omega\in\mathbb{R}^m$ — ограниченная или неограниченная область, $L_2(\Omega)$ — вещественное пространство с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$. Заданные функция $f:\Omega\to\mathbb{R}$ из класса $L_2(\Omega)$ и функция $F:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори, а линейные интегральные операторы

$$(Gu)(x)=\int_{\Omega} G(x,t)\,u(t)\,dt,\quad (Cy)(x)=\int_{\Omega} C(x,t)\,y(t)\,dt \tag{2}$$

действуют из $L_2(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и из $L_q(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ соответственно, причем $p+q=pq$.

1. Потенциальный монотонный и липшиц-непрерывный оператор. Предположим, что интегральные операторы (2) взаимно сопряжены и ограничены, т. е.

$$G(x,t)=C(t,x), \tag{3}$$

$$\Big\|\int_{\Omega} G(\cdot,s)\,z(s)\,ds\Big\|_0\leqslant\beta\|z\|,\quad \beta>0,\quad \forall z\in L_2(\Omega), \tag{4}$$

и выполняются условия

$$|F(x,z)|\leqslant a(x)+b\,|z|^{p-1},\quad p\geqslant 2, \tag{5}$$

$$[F(x,y)-F(x,z)]\,(y-z)\geqslant 0\qquad \forall x\in\Omega,\quad y,\ z\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

$$\|F(\cdot,u)-F(\cdot,v)\|_*\leqslant N\,\|u-v\|_0\qquad \forall u,\ v\in L_p(\Omega), \tag{7}$$

где функция $a\in L_q(\Omega)$, $b>0$, $N>0$ — постоянные, а $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|_0$ — нормы в вещественных пространствах $L_q(\Omega)$ и $L_p(\Omega)$ соответственно.

В приложениях часто встречается случай, когда функция F удовлетворяет условию Липшица, т. е.

$$|F(x,y)-F(x,z)|\leqslant N\,|y-z|\quad \forall x\in\Omega,\quad y,\ z\in\mathbb{R}, \tag{8}$$

и верно соотношение

$$F(\cdot,0)\in L_2(\Omega). \tag{9}$$

В таком случае, как известно, из условий (8) и (9) следует справедливость неравенств (5) и (7) при $p = q = 2$.

В [3, § 5] установлено, что при выполнении неравенства (5) оператор Немыцкого $(Fz)(x) = F[x, z(x)]$ отображает $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, является непрерывным потенциальным оператором и его потенциал определяется формулой

$$\Psi(z) = \Psi(0) + \int_\Omega dx \int_0^{z(x)} F(x, y)\, dy.$$

Из этого факта и соотношения (3) видно, что оператор

$$(Au)(x) := u(x) + \int_\Omega C(x, t) F\left[t, \int_\Omega G(t, s) u(s)\, ds\right] dt \tag{10}$$

отображает $L_2(\Omega)$ в себя, непрерывен и потенциален, потенциал его имеет вид

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x)\, dx + \Psi\left(\int_\Omega G(x, t) u(t)\, dt\right).$$

При соблюдении условия (6) оператор A сильно монотонен, т. е. выполняется неравенство

$$\gamma \| u - v \|^2 \leqslant \langle Au - Av, u - v\rangle, \quad \gamma > 0, \quad \forall u,\ v \in L_2(\Omega). \tag{11}$$

В самом деле, полагая

$$y(t) = \int_\Omega G(x, t) u(t)\, dt, \quad z(t) = \int_\Omega G(t, s) v(s)\, ds, \tag{12}$$

в силу выражений (3) и (10) имеем

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_\Omega |u(x) - v(x)|^2\, dx + \int_\Omega [u(x) - v(x)] \int_\Omega C(x, t) \times$$

$$\times \left\{F\left[t, \int_\Omega G(t, s) u(s)\, ds\right] - F\left[t, \int_\Omega G(t, s) v(s)\, ds\right]\right\} dt dx = \int_\Omega |u(x) - v(x)|^2\, dx +$$

$$+ \int_\Omega [y(t) - z(t)] \{F[t, y(t)] - F[t, z(t)]\}\, dt, \tag{13}$$

откуда с учетом условия (6) следует неравенство (11) при $\gamma = 1$.

Если же выполняется условие (7), то справедливо неравенство

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \leqslant \delta \| u - v \|^2, \quad \delta > 0, \quad \forall u, \quad v \in L_2(\Omega). \tag{14}$$

Это следует из формул (13), (7) и (12), причем в неравенстве (14) $\delta \leqslant 1 + N\beta^3$, β — константа из неравенства (4). Согласно лемме 1 [1] при выполнении неравенства (14) следует, что оператор A является липшиц-непрерывным.

Таким образом, если выполняются предположения (3)—(7), то оператор A, определяемый формулой (10), отображает $L_2(\Omega)$ в себя и является сильно монотонным, потенциальным и липшиц-непрерывным. Следовательно, в силу теоремы 3.4 [4, гл. III] уравнение (1) имеет единственное решение $u^* \in L_2(\Omega)$.

2. Суть метода. Согласно вариационно-итеративному методу приближенные решения интегрального уравнения (1) находим по формуле

$$u_k(x) = y_k(x) + w_k(x), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

в которой функция $y_k(x)$ определяется с помощью итерационного процесса

$$y_k(x) = u_{k-1}(x) + \tau_k \varepsilon_k(x). \tag{16}$$

Поправка $w_k(x)$ строится согласно методу Ритца, т. е. определяется из условий

$$w_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j(x), \quad \int_{\Omega} \varepsilon_{k+1}(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{17}$$

где τ_k — динамический параметр,

$$\varepsilon_{k+1}(x) = f(x) - u_k(x) + \int_{\Omega} C(x, t)\,F\Big[t, \int_{\Omega} G(t, s)\,u_k(s)\,ds\Big]\,dt, \tag{18}$$

и $\{\varphi_i(x)\}$ — заданная система линейно независимых функций из $L_2(\Omega)$, которую в дальнейшем для простоты изложений считаем ортонормированной.

На основании соотношений (15), (17) и (18), выполнив несложные преобразования, для определения неизвестных параметров a_j^k, $j = \overline{1, n}$, получим систему уравнений

$$a_i^k + S_i(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k) = b_i^k, \quad i = \overline{1, n}, \tag{19}$$

в которой

$$b_i^k = \int_{\Omega} r_k(x)\,\varphi_i(x)\,dx, \quad S_i(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k) = \int_{\Omega} \eta_i(t)\Big\{F\Big[t, z_k(t) + \sum_{j=1}^{n} a_j^k \eta_j(t)\Big] -$$

$$- F[t, z_k(t)]\Big\}\,dt, \tag{20}$$

$$r_k(x) = f(x) - y_k(x) + \int_{\Omega} C(x, t)\,F[t, z_k(t)]\,dt. \tag{21}$$

$$z_k(t) = \int_{\Omega} G(t, s)\,y_k(s)\,ds, \quad \eta_j(t) = \int_{\Omega} G(t, s)\,\varphi_j(s)\,ds. \tag{22}$$

В качестве начального приближения будем брать функцию

$$u_0(x) = y_0(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j(x), \quad y_0 \in L_2(\Omega),$$

определив параметры a_i^0, $i = \overline{1, n}$, из системы уравнений (19) при $k = 0$.

В случае, когда в каждой итерации $w_k(x) = 0$, вариационно-итеративный метод вырождается в итерационный процесс

$$y_k(x) = y_{k-1}(x) + \tau_k r_k(x), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

в котором невязка $r_k(x)$ выражается формулой (21).

Систему уравнений (19) запишем в виде

$$\Lambda_k a_k = b_k, \tag{24}$$

где

$$\begin{gathered} a_k = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k), \quad b_k = (b_1^k, b_2^k, \dots, b_n^k), \\ \Lambda_k a_k = a_k + (S_1(a_k), S_2(a_k), \dots, S_n(a_k)), \end{gathered} \tag{25}$$

и заметим, что при каждом k оператор Λ_k отображает евклидово пространство E_n в себя, является сильно монотонным и липшиц-непрерывным. Чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться условиями (3)—(7) и формулами (20), (22), (25), а также выполнить ряд несложных преобразований. Следовательно, согласно теореме 3.4 [4, гл. III] уравнение (24) при каждом k однозначно разрешимо, а поэтому последовательные приближения по методу (15)—(18) строятся единственным образом.

3. Стационарный вариационно-итеративный метод. Представляет интерес стационарный вариант, когда в каждой итерации $\tau_k = \tau = \text{const}$. В этом случае, используя результаты работы [1], в частности повторяя доказательство теорем 1 и 2, приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а 1. *Если выполняются условия* (3)—(7), *то уравнение* (1) *имеет единственное решение* $u^* \in L_2(\Omega)$ *при любой функции* $f \in L_2(\Omega)$ *и последовательность* $\{u_k(x)\}$, *построенная по методу* (15)—(18) *при* $\tau \in (0, 2/\eta)$, *сходится в среднем к этому решению.*

Справедлива оценка

$$\| u^* - u_k \| \leqslant lq^k \| u^* - y_0 - v_n \|, \tag{26}$$

характеризующая скорость сходимости метода, и конструктивная оценка погрешности

$$\| u^* - u_k \| \leqslant q^{k-m} \| \varepsilon_{m+1} \|, \quad 0 \leqslant m \leqslant k, \tag{27}$$

частными случаями которой являются априорная при $m = 0$ и апостериорная при $m = k$ оценки погрешности.

В оценках (26) и (27) $\varepsilon_{m+1}(x)$ — невязка, определяемая формулой (18),

$$q = \max\{1 - \sigma\tau, \ \eta\tau - 1\}, \quad l^2 = \eta, \tag{28}$$

$$v_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \int_{\Omega} \{u^*(t) - y_0(t)\} \varphi_i(t)\, dt. \tag{29}$$

Константы σ и η — это соответственно нижняя и верхняя грани в неравенствах, аналогичных (11) и (14), для оператора W, правило построения которого по исходному оператору (10) и заданной системе координатных функций описано в [1]. Там же установлено (см. лемму 4) справедливость соотношений $\gamma \leqslant \sigma \leqslant \eta \leqslant \delta$.

Следует заметить, что получить точные значения констант σ и η затруднительно. В ряде случаев для этих величин можно установить оценки снизу и сверху соответственно. Так, предполагая справедливость неравенства

$$\left\| \int_{\Omega} R_n(\cdot, t)\, v(t)\, dt \right\|_0 \leqslant \beta_n \| v \| \qquad \forall v \in L_2(\Omega), \tag{30}$$

в котором $\beta_n > 0$ и

$$R_n(x, t) = G(x, t) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t) \int_{\Omega} G(x, s)\, \varphi_i(s)\, ds, \tag{31}$$

и используя лемму 1.7 [2], убеждаемся в справедливости оценок

$$\sigma \geqslant 1, \quad \eta \leqslant \eta_n = 1 + \alpha_n, \quad \alpha_n = (N + N^2\beta^2)\, \beta_n^2, \tag{32}$$

где β и N — постоянные из соотношений (4) и (7).

В неравенстве (30) $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$ в случае, когда интегральный оператор G вполне непрерывен и система функций $\{\varphi_i(x)\}$ полна в $L_2(\Omega)$, поэтому $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, в формуле (32) $\sigma = 1$ и $\eta_n \to 1$ при $n \to \infty$. В частности, когда ядро $G(x, t)$ суммируемо с квадратом по обеим переменным, имеем

$$\beta_n^2 \leqslant \int_{\Omega} \int_{\Omega} R_n^2(x, t)\, dx dt. \tag{33}$$

Из анализа соотношения (28) вытекает, что при

$$\tau = \tau_* = 2/(\sigma + \eta) \tag{34}$$

величина q принимает наименьшее значение, а именно:

$$q = (\eta - \sigma)/(\eta + \sigma). \tag{35}$$

При таком выборе параметра имеем оптимальный стационарный вариационно-итеративный метод, обладающий наилучшей скоростью сходимости.

Однако в связи с отсутствием точных значений величин σ и η целесообразно пользоваться стационарным вариационно-итеративным методом, близким к оптимальному, в котором значение параметра определяется формулой

$$\tau = \tau_n = 2/(2 + \alpha_n), \tag{36}$$

вытекающей из оценки выражения (34) с учетом неравенств (32). Скорость сходимости такого метода характеризуется оценкой (26), в которой, как это следует из выражений (35), (32) и (28),

$$q \leqslant q_n = \alpha_n/(2 + \alpha_n), \quad l^2 \leqslant l_n^2 = 1 + \alpha_n. \tag{37}$$

4. Специальный выбор системы координатных функций. Ограничимся случаем, когда интегральные операторы (2) отображают $L_2(\Omega)$ в себя, т. е. $p = 2$, и являются вполне непрерывными, а также соблюдается условие (8) и $F(x, 0) = 0$. Пусть в стационарном вариационно-итеративном методе параметр τ определяется формулой (36), и в качестве координатной системы функций взяты собственные функции интегрального оператора

$$(Bu)(x) = \int_\Omega B(x, t)\, u(t)\, dt, \quad B(x, t) = \int_\Omega C(x, s)\, G(s, t)\, ds, \tag{38}$$

отвечающие n первым наименьшим характеристическим значениям, т. е.

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_\Omega B(x, t)\, \varphi_i(t)\, dt, \quad i = \overline{1, n}, \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n. \tag{39}$$

Обозначим

$$a = N + N^2\beta^2, \quad e_n = N\beta\,(1 + a\lambda_{n+1}^{-1})^{0,5}, \tag{40}$$

где β, N — константы, фигурирующие в формулах (4), (8). В силу принятых предположений установим следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть в вариационно-итеративном методе* $y_0(x) = f(x)$, *координатная система функций, удовлетворяющая уравнению* (39) *с вполне непрерывным оператором, полна в* $L_2(\Omega)$ *и параметр* τ *определяется формулой* (36). *Тогда справедлива оценка*

$$\frac{\| u^* - u_h \|}{\| u^* \|} \leqslant \frac{e_n}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} \left(\frac{a}{a + 2\lambda_{n+1}} \right)^k, \tag{41}$$

характеризующая скорость сходимости метода, где a *и* e_n — *константы, определяемые формулой* (40), $u^* \in L_2(\Omega)$ — *единственное решение уравнения* (1) *и* $u_h \in L_2(\Omega)$ — *приближение, построенное по алгоритму* (15)—(18).

Доказательство. С помощью выражений (3), (31), (38) и (39) не представляет труда установить, что в неравенствах (4) и (30)

$$\beta^2 = \lambda_1^{-1}, \quad \beta_n^2 = \lambda_{n+1}^{-1}. \tag{42}$$

Следовательно, с помощью выражений (37), (32), (40), (42) приходим к заключению, что в оценке (26)

$$q \leqslant q_n = a/(a + 2\lambda_{n+1}), \quad l^2 \leqslant l_n^2 = 1 + a\lambda_{n+1}^{-1}. \tag{43}$$

В силу уравнения (1) и предположения $\mathrm{F}(t, 0) = 0$ имеем

$$u^*(x) - y_0(x) = u^*(x) - f(x) = \int_\Omega C(x, t)\, \Phi(t)\, dt, \tag{44}$$

где

$$\Phi(t) = F(t, 0) - F\Big[t, \int_\Omega G(t, s)\, u^*(s)\, ds\Big]. \tag{45}$$

На основании условий (8), (4) и формулы (45) получаем

$$\| \Phi \| \leqslant N\beta \| u^* \|. \tag{46}$$

Введем теперь в рассмотрение ядро

$$R_n^*(x, t) = C(x, t) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \int_{\Omega} \varphi_i(s) C(s, t)\, ds \tag{47}$$

и заметим, что оно в силу свойства (3) сопряжено ядру (31), поэтому, учитывая неравенство (30), для любой функции $z \in L_2(\Omega)$ верно неравенство

$$\left\| \int_{\Omega} R_n^*(\cdot, t) z(t)\, dt \right\| \leqslant \beta_n \| z \|. \tag{48}$$

При помощи формул (29), (44), (47) легко убедиться в справедливости равенства

$$u^*(x) - y_0(x) - v_n(x) = \int_{\Omega} R_n^*(x, t) \Phi(t)\, dt, \tag{49}$$

а поэтому на основании соотношений (49), (48), (46) и (42) находим

$$\| u^* - y_0 - v_n \| \leqslant N\beta\lambda_{n+1}^{-0,5} \| u^* \|. \tag{50}$$

Усилив оценку (26) с помощью неравенств (43) и (50), получим с учетом обозначения (40) искомую формулу (41).

Замечание 1. В силу предположения, очевидно, $\lambda_{n+1} \to \infty$ при $n \to \infty$, а поэтому, как это вытекает из формул (43) и (40), $q_n \to 0$ и $e_n \to N\beta$ при $n \to \infty$. Следовательно, при достаточно больших n стационарный вариационно-итеративный метод с параметром τ, определяемым формулой (36) и координатной системой, являющейся собственными функциями вполне непрерывного оператора (38), может оказаться гораздо эффективнее оптимального стационарного итерационного процесса (23), скорость сходимости которого характеризуется величиной ρ^k, где $\rho = (\delta - \gamma)/(\delta + \gamma)$, а γ и δ — точные константы, при которых соблюдаются неравенства (11) и (14). Это следует из того факта, что при достаточно больших n величина $q \leqslant q_n$, характеризующая скорость сходимости стационарного вариационно-итеративного метода, может быть существенно меньше величины ρ.

5. Скорость сходимости метода для одномерного интегрального уравнения с гладкими ядрами. Рассмотрим случай, когда в уравнении (1) $\Omega = [-1, 1]$ и ядро $C(x, t)$ обладает свойством

$$\left\| \frac{d^m g}{dx^m} \right\| \leqslant b \| z \|, \quad g(x) = \int_{-1}^{1} C(x, t) z(t)\, dt, \tag{51}$$

где $z \in L_2(-1, 1)$ — любая функция, $m \geqslant 1$ и b — постоянная, зависящая от m. В стационарном вариационно-итеративном методе параметр τ определяется формулой (36), причем для его построения целесообразно пользоваться формулой (33), и

$$\varphi_i(x) = P_{i-1}(x), \quad i = \overline{1, n}, \tag{52}$$

где $P_i(x)$ — ортонормированные полиномы Лежандра. Для такого случая скорость сходимости метода характеризуется следующими оценками.

Теорема 3. *Пусть* $y_0(x) = f(x)$ *и выполняются условия* (3), (6), (8) *и* (51). *Тогда справедливы оценки*

$$\| u^* - u_k \| \leqslant \frac{\mu_n}{n^m} \left(\frac{c}{c + 2n^{2m}} \right)^k, \tag{53}$$

$$\frac{\| u^* - u_k \|}{\| u^* \|} \leqslant \frac{d_n}{n^m} \left(\frac{c}{c + 2n^{2m}} \right)^k, \tag{54}$$

в которых $\mu_n \to 0$, $d_n \to d$ *при* $n \to \infty$ *и*

$$c = \nu^2 b^2 (N + N^2\beta^2), \quad d = \nu b N\beta, \tag{55}$$

где β, N, b и ν — *постоянные из неравенств* (4), (8), (51) *и* (56).

Доказательство. Сначала заметим, что согласно лемме 2 [5] для функции $g(x)$ из класса $W_2^m(-1, 1)$, состоящего из функций, имеющих суммируемые с квадратом производные m-го порядка, и координатной системы (52) верна оценка

$$\| g - g_n \| \leqslant \nu n^{-m} \| h - h_n \|, \tag{56}$$

в которой $\nu > 0$ — некоторая постоянная, вообще говоря, зависящая от m, и

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \int_{-1}^{1} g(t)\varphi_i(t)\,dt, \tag{57}$$

$$h(x) = (1 - x^2)^{0,5m} g^{(m)}(x), \quad h_n(x) = \sum_{i=m}^{n-1} c_i \psi_i(x), \quad n > m,$$

$$c_i = \int_{-1}^{1} h(x)\psi_i(x)\,dx, \quad \psi_i(x) = \theta_i (1 - x^2)^{0,5m} P_i^{(m)}(x),$$

где $\{\psi_i(x)\}$ — ортонормированная и полная в $L_2(-1, 1)$ система, а поэтому при $n \to \infty$

$$\gamma_n = \| h - h_n \| \to 0. \tag{58}$$

Теперь можно установить справедливость неравенства (48) с

$$\beta_n \leqslant \nu b n^{-m}. \tag{59}$$

Для этой цели воспользуемся формулами (47), (51) и (57), на основании которых верно соотношение

$$g(x) - g_n(x) = \int_{-1}^{1} R_n^*(x, t) z(t)\,dt. \tag{60}$$

В силу формулы (56), изъяв в ней функцию $h_n(x)$, от чего неравенство лишь усилится, с учетом условия (51) и выражения (60) получим

$$\left\| \int_{-1}^{1} R_n^*(\cdot, t) z(t)\,dt \right\| \leqslant \nu b n^{-m} \| z \|. \tag{61}$$

Следовательно, верно соотношение (59), на основании которого и формул (37), (55) имеем

$$q \leqslant q_n = \frac{a\beta_n^2}{2 + a\beta_n^2} \leqslant \frac{ab^2\nu^2 n^{-2m}}{2 + ab^2\nu^2 n^{-2m}} = \frac{c}{c + 2n^{2m}}, \tag{62}$$

$$l^2 \leqslant l_n^2 = 1 + a\beta_n^2 \leqslant 1 + cn^{-2m}. \tag{63}$$

Рассмотрим теперь функцию $g(x) = u^*(x) - y_0(x)$ и отметим, что, как это следует из формулы (44) и условия (51), $g \in W_2^m(-1, 1)$, а в силу выражений (29) и (57), очевидно, $g_n(x) = v_n(x)$. Учитывая эти факты, согласно формулам (56) и (58) имеем

$$\| u^* - y_0 - v_n \| \leqslant \nu n^{-m} \gamma_n, \tag{64}$$

причем $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Далее, используя выражения (49), (51) и (46) находим

$$\| u^* - y_0 - v_n \| \leqslant \nu b N \beta n^{-m} \| u^* \|. \tag{65}$$

Оценку (26) усилим с помощью неравенств (62) — (65). В итоге получим оценки (53) и (54), в которых $\mu_n = \nu l_n \gamma_n$, $d_n = dl_n$, причем, очевидно, $\mu_n \to 0$ и $d_n \to d$ при $n \to \infty$.

Замечание 2. Если $u^* - y_0 \in W_2^s(-1, 1)$, $s > m$, то при соблюдении условий теоремы 3 справедлива оценка

$$\| u^* - u_k \| \leqslant \frac{\mu_n}{n^s} \left(\frac{c}{c + 2n^{2m}} \right)^k. \tag{66}$$

Оценка (66) получается таким же образом, как и оценка (53), если учесть что в принятом предположении верно неравенство (64) с заменой m на s.

Замечание 3. В случае, когда $\Omega = [-\pi, \pi]$ и исходная задача (1) периодическая, а в стационарном вариационно-итеративном методе в качестве координатной системы функций взята тригонометрическая система, скорость сходимости метода также характеризуется оценками (53), (54) и (66), причем в формуле (56) $\nu = 1$. Такие же оценки справедливы и для случая, когда поправки $w_k(x)$ в методе — полиномиальные интерполяционные сплайны.

Замечание 4. При $k = 0$ оценки (53), (54) и (66) вырождаются в оценки, характеризующие скорость сходимости метода Ритца.

6. Нестационарный вариационно-итеративный метод. Представляет интерес метод, согласно которому приближения строятся по формуле

$$u_k(x) = u_{k-1}(x) + \tau_k \varepsilon_k(x) + w_k(x), \tag{67}$$

в которой невязка $\varepsilon_k(x)$ находится по формуле (18), а неизвестные параметр τ_k и параметры a_i^k, $i = \overline{1, n}$, в поправке $w_k(x)$, имеющей вид (17), определяется из условий

$$\int_\Omega \varepsilon_{k+1}(x)\, \varepsilon_k(x)\, dx = 0, \quad \int_\Omega \varepsilon_{k+1}(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{68}$$

Подставив функцию (67) в выражение (18), затем полученный результат — в условие (68) и выполнив некоторые преобразования с учетом вида поправки (17), получим для определения неизвестных параметров нелинейную систему уравнений. Если ее записать в операторном виде, то полученный оператор при каждом k будет сильно монотонным и липшиц-непрерывным. Следовательно, параметры определяются из системы нелинейных уравнений однозначно, а поэтому приближения с помощью описанного метода можно построить.

Нестационарный вариационно-итеративный метод сходится не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем q, определяемым формулой (35). В ряде случаев нестационарный вариационно-итеративный метод более эффективен, чем известный метод наискорейшего спуска, так как скорость сходимости первого метода всегда не хуже скорости сходимости второго.

7. Линейный случай. Некоторые задачи математической физики можно свести к линейному интегральному уравнению

$$u(x) + \int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x), \tag{69}$$

в котором $f \in L_2(\Omega)$ и ядро имеет вид

$$K(x, t) = \int_\Omega C(x, s)\, q(s)\, G(s, t)\, ds, \tag{70}$$

где $0 \leqslant q(x) \leqslant N$, а интегральные операторы C и G, имеющие вид (2), отображают $L_2(\Omega)$ в себя и обладают свойством (3) и (4).

Уравнение (69) с ядром (70) — частный случай уравнения (1), в котором $F(x, z) = q(x) z$, $x \in \Omega$, $z \in R$. При таких предположениях, очевидно, выполняются условия (5)—(7). Следовательно, интегральный оператор

$$(Au)(x) = u(x) + \int_{\Omega} K(x, t) u(t) \, dt \tag{71}$$

отображает $L_2(\Omega)$ в себя, является самосопряженным ограниченным положительно определенным оператором. Исходя из оператора A (71) и заданной системы координатных функций $\{\varphi_i(x)\}$, можно построить оператор $W : V \to V$, который в силу леммы 4 [1] также является самосопряженным ограниченным и положительно определенным оператором, причем для его границ спектра σ и η справедливы оценки (32).

Вариационно-итеративный метод применительно к уравнению (69) имеет вид

$$u_k(x) = y_k(x) + w_k(x), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{72}$$

$$y_k(x) = u_{k-1}(x) + \tau_k \varepsilon_k(x), \tag{73}$$

$$\varepsilon_k(x) = f(x) - u_{k-1}(x) + \int_{\Omega} K(x, t) u_{k-1}(t) \, dt, \tag{74}$$

$$w_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j(x), \quad \int_{\Omega} \varepsilon_{k+1}(x) \varphi_i(x) \, dx = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{75}$$

где $\{\varphi_i(x)\}$ — заданная система функций, которую полагаем ортонормированной, что не является обязательным для метода.

В рассматриваемом случае система уравнений (19) приобретает вид

$$a_i^k + \sum_{j=1}^{n} K_{ij} a_j^k = b_i^k, \quad i = \overline{1, n}, \tag{76}$$

которая однозначно разрешима при каждом n, так как матрица системы (76) положительно определена, где

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \eta_i(t) q(t) \eta_j(t) \, dt, \quad \eta_i(x) = \int_{\Omega} G(x, t) \varphi_i(t) \, dt, \quad i, \ j = \overline{1, n},$$

$$b_i^k = \int_{\Omega} r_k(x) \varphi_i(x) \, dx, \quad r_k(x) = f(x) - y_k(x) + \int_{\Omega} K(x, t) y_k(t) \, dt.$$

Представляет интерес оптимальный стационарный вариационно-итеративный метод (72)—(75), в котором параметр $\tau_k = \tau$ определяется формулой (34). Для такого метода справедливы оценки (26) и (27), где величина q определяется формулой (35).

Можно строить и нестационарные вариационно-итеративные методы, обладающие более быстрой сходимостью, чем стационарные. К их числу принадлежит метод с чебышевским набором параметров

$$\tau_m = \frac{\tau}{1 + q t_m}, \quad t_m = \cos \frac{(2m - 1)\pi}{2k}, \quad m = \overline{1, k}, \tag{77}$$

где τ и q вычисляются по формулам (34) и (35). Используя методику § 19 [6] можно установить, что метод (72)—(75) и (77) является оптимальным нестационарным, скорость сходимости которого характеризуется оценкой

$$\| u^* - u_k \| \leqslant \frac{2\xi p^k}{1 + p^{2k}} \| u^* - y_0 - v_n \|, \tag{78}$$

где функция $v_n(x)$ имеет вид (29) и

$$p = (\xi - 1)/(\xi + 1), \quad \xi^2 = \eta/\sigma. \tag{79}$$

Поскольку найти точные значения величин σ и η затруднительно, целесообразно строить итерационные процессы с использованием их оценок (32). В этом случае при достаточно больших n вариационно-итеративные методы как стационарный, так и нестационарный, в силу соотношений (32), (78), (79) могут сходиться быстрее оптимального нестационарного итерационного процесса с чебышевским набором параметров. Примеры подтверждают теоретические выводы.

1. *Лучка А. Ю.* Вариационно-итеративный метод для нелинейных уравнений // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 10.— С. 1328—1338.
2. *Лучка А. Ю.* Вариационно-итеративный метод.— Киев, 1983.— С. 3—52.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.55).
3. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов.— М. : Наука, 1972.— 416 с.
4. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1978.— 336 с.
5. *Лучка А. Ю.* Быстрота сходимости проекционно-итеративного метода для интегральных уравнений // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 2.— С. 190—198.
6. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.—Киев : Наук. думка, 1980.— 264 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 07.12.89