УДК 517.9

С. В. Гонченко, Л. П. Шильников

Об арифметических свойствах топологических инвариантов систем с негрубой гомоклинической траекторией

В настоящей работе показано, что величина θ, введенная в [1], является топологическим инвариантом двумерных диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией. Для диффеоморфизмов с негрубой гетероклинической траекторией соответствующий инвариант найден в [2]. Установлено, что в ряде случаев величина τ (см. [3]) также является топологическим инвариантом. В ситуации, когда в окрестности негрубой гомоклинической орбиты имеет место сложное поведение траекторий, указаны арифметические свойства θ и τ, связанные с существованием счетного множества устойчивых периодических точек.

1. Предварительные сведения. Рассмотрим C^r-гладкий ($r \geqslant 3$) диффеоморфизм T двумерного гладкого многообразия, удовлетворяющий следующим условиям:

А) T имеет седловую неподвижную точку с собственными значениями λ, γ и $0 < |\lambda| < 1 < |\gamma|$;

Б) седловая величина $\sigma = |\lambda\gamma| \leqslant 1$;

В) T имеет негрубую гомоклиническую траекторию Γ, образованную касанием конечного порядка $n \geqslant 1$ устойчивого W^s и неустойчивого W^u многообразий седловой неподвижной точки.

Можно показать, что существует такая окрестность S седловой неподвижной точки диффеоморфизма T, в которой $T|_S$ в некоторых C^r-координатах может быть представлено в виде

$$\bar{x} = \lambda x + f(x, y)\, x^2 y, \quad \bar{y} = \gamma y + g(x, y)\, x y^2, \tag{1}$$

где $O(0, 0)$ соответствует седловой неподвижной точке. Выберем пару точек траектории Γ: $M^+(x^+, 0) \in W^s_{\text{loc}}$ и $M^-(0, y^-) \in W^u_{\text{loc}}$ так, что $T^m M^- = M^+$ для некоторого достаточно большого m. Пусть $\Pi_0\{(x_0, y_0)\}$, $\Pi_1\{(x_1, y_1)\}$ — достаточно малые окрестности точек M^+ и M^- такие, что $T\Pi_i \cap \Pi_i = \varnothing$, $i = 0, 1$. Отображение $\hat{T} = T^m : \Pi_1 \to \Pi_0$ можно представить таким образом: $\bar{x}_0 - x^+ = F(x_1, y_1 - y^-)$, $\bar{y}_0 = G(x_1, y_1 - y^-)$, где $F(0) = G(0) = 0$. В силу условия В

$$\partial G(0)/\partial y_1 = \ldots = \partial^n G(0)/\partial y_1^n = 0, \quad \partial^{n+1} G(0)/\partial y_1^{n+1} = (n+1)!\; d \neq 0. \tag{2}$$

В этом случае отображение $\hat{T}$ имеет вид

$$\bar{x}_0 - x^+ = F(x_1, y_1 - y^-), \; \bar{y}_0 = D(x_1, y_1)\cdot(y_1 - y^- - \varphi(x_1))^{n+1} + \\ + C(x_1)\, x_1 + L(x_1, y_1)\cdot(y_1 - y^- - \varphi(x_1))\cdot x_1.$$

Здесь $y_1 = y^- + \varphi(x_1)$ — уравнение поверхности $\partial^n G(x_1, y_1 - y^-)/\partial y_1^n = 0$, $D(0, y^-) = d$. Пусть $C(0) = G_{x_1}(0) = c$, $F_{y_1}(0) = b$, $L(0, y^-) = l$. Тогда $bc \neq 0$ Предположим, что выполняется следующее условие:

г) при n четном $l \neq 0$.

Можно показать, что существует такое $\bar{k} > 0$, что для любого $k \geqslant \bar{k}$ отображение $T^k: \Pi_0 \to \Pi_1$ определено и представимо в виде $x_1 = \xi_k(x_0, y_1)$, $y_0 = \eta_k(x_0, y_1)$, где

$$\xi_k \equiv \lambda^k x_0 + |\lambda'|^k |\gamma'|^{-k} \theta_k(x_0, y_1), \quad \eta_k \equiv \gamma^{-k} y_1 + |\gamma'|^{-2k} \psi_k(x_0, y_1), \tag{3}$$

а функции θ_k и ψ_k и их производные до любого конечного порядка $\leqslant r$ равномерно ограничены по k. Заметим, что $\lambda' = \lambda$, $\gamma' = \gamma$ в случае $\sigma < 1$ и $|\lambda| \leqslant |\lambda'| \leqslant |\lambda| + \varepsilon_1(k)$, $|\gamma| - \varepsilon_2(k) \leqslant |\gamma'| \leqslant |\gamma|$ в случае $\sigma = 1$, где $\varepsilon_i(k) \to 0$ при $k \to \infty$.

В силу (3) область определения отображения $T^k: \Pi_0 \to \Pi_1$ представляет собой «полоску» σ_k^0 и $\sigma_k^1 = T^k \sigma_k^0 \subset \Pi_1$. Положим $\sigma_i = \bigcup_{k=\bar{k}}^{\infty} \sigma_k^i$, $i = 0,1$. Аналогично [4] выберем специальную окрестность $U_{\bar{k}} = U_{\bar{k}}(\Gamma)$ так, чтобы Π_0 и Π_1 содержали целиком σ_k^0 и σ_k^1 с номерами $k \geqslant \bar{k}$ и $\Pi_i \cap \sigma_k^i = \varnothing$, $i = 0, 1$, если $k < \bar{k}$. В этом случае в качестве окрестностей точек M^+ и M^- без ограничения общности можно взять $\Pi_0 = \{(x_0, y_0) \,|\, |x_0 - x^+| \leqslant \rho_{\bar{k}}$, $|y_0| \leqslant |\gamma|^{-\bar{k}} (y^- + \rho_{\bar{k}})\}$ и $\Pi_1 = \{(x_1, y_1) \,|\, |x_1| \leqslant |\lambda|^{\bar{k}} (x^+ + \rho_{\bar{k}})$, $|y_1 - y^-| \leqslant \leqslant \rho_{\bar{k}}\}$, где $\rho_{\bar{k}} = S_0 \cdot |\gamma|^{-\bar{k}/(n+1)}$.

Пусть Λ — траектория или полутраектория T, не покидающая $U_{\bar{k}}$. Предположим, что Λ не является асимптотической к O. Тогда она пересекает Π_0 только в точках σ_0, а Π_1 — в точках σ_1. Пусть $(\ldots, M_\alpha^{-i}, \ldots \ldots, M_\alpha^i, \ldots)$ — точки пересечения Λ с σ_α, расположенные в порядке возрастания итераций, где $M_\alpha^i(x_\alpha^i, y_\alpha^i) \in \sigma_{j_i}^\alpha$, $\alpha = 0, 1$. Тогда координаты этих точек будут связаны соотношениями

$$x_0^{i+1} = F(\xi_{j_i}(x_0^i, y_1^i),\ y_1^i - y^-),\ \eta_{j_{i+1}}(x_0^{i+1}, y_1^{i+1}) = G(\xi_{j_i}, y_1^i - y^-). \tag{4}$$

Множество траекторий (полутраекторий), целиком лежащих в $U_{\bar{k}}$, обозначим через $N_{\bar{k}}$ $(\tilde{N}_{\bar{k}})$. Траекторию $Q \in N_{\bar{k}}$ назовем s-обходной, если $Q \cap \Pi_0$ состоит из s точек. Пару натуральных чисел (j_i, j_{i+1}) назовем допустимой, если в $U_{\bar{k}}$ есть траектория (полутраектория), пересекающая последовательно $\sigma_{j_i}^1$ и $\sigma_{j_{i+1}}^1$.

При достаточно большом $\bar{k}$ в $N_{\bar{k}}$ $(\tilde{N}_{\bar{k}})$ можно указать подсистему $N'_{\bar{k}}$ $(\tilde{N}'_{\bar{k}})$ траекторий седлового типа (полутраекторий), допустимые пары которых удовлетворяют неравенствам: при нечетном n

$$d\,[\gamma^{-j_{i+1}} y^- - c\lambda^{j_i} x^+] > S_1 (|\lambda|^{j_i} + |\gamma|^{-j_{i+1}}) |\gamma|^{-\bar{k}/(n+1)}, \tag{5}$$

а при четном n

$$|\gamma^{-j_{i+1}} y^- - c\lambda^{j_i} x^+| > S_1 (|\lambda|^{j_i} + |\gamma|^{-j_{i+1}}) |\gamma|^{-\bar{k}/(n+1)}. \tag{6}$$

Это установлено в [4] при $\sigma < 1$, при $\sigma = 1$ доказательство аналогично.

В зависимости от типа описания множества $N_{\bar{k}}$ можно выделить три случая систем с негрубой гомоклинической траекторией при $\sigma < 1$. Во-первых, это диффеоморфизмы с тривиальным описанием, здесь $N_{\bar{k}} = O \cup \Gamma$. Во-вторых, диффеоморфизмы, допускающие полное описание, когда все траектории $N_{\bar{k}}$, за исключением Γ, седловые, и $N_{\bar{k}}$ определяется с помощью топологических схем Бернулли из трех символов при n нечетном или из двух символов при n четном. И, в-третьих, диффеоморфизмы со смешанным описанием; в этом случае в $N_{\bar{k}}$ содержатся гиперболические подмножества и, вообще говоря, устойчивые или негрубые периодические траектории. (Точнее об этом см. в [3].)

Рассмотрим следующие величины: $\theta = -\ln|\lambda|/\ln|\gamma|$, $\tau = (\ln|\gamma|)^{-1} \times \ln|cx^+/y^-|$. Заметим, что τ, вообще говоря, зависит от выбора пар гомоклинических точек. Поэтому τ, построенную по точкам $M_1 \in W^s_{\text{loc}}$ и $M_2 \in W^u_{\text{loc}}$, обозначим через $(\tau(M_1, M_2)$.

Лемма. *Пусть $M_s^+ = T^s M^+ \in W^s_{\text{loc}}$ и $M_p^- = T^p M^- \in W^u_{\text{loc}}$. Тогда*

$$\tau(M_s^+, M_p^-) = \tau(M^+, M^-) + (s - p)(1 - \theta). \tag{7}$$

Доказательство. Возьмем точки $M^{+'} = TM^+ = (\lambda x^+, 0)$ и M^-. В этом случае роль $\hat{T}$ будет играть отображение $\hat{T}' = T\hat{T} : \Pi_1 \to T\Pi_0$. Последнее, используя (1), можно представить в виде

$$x_0' - \lambda x^+ = \lambda F + f(x^+ + F, G) \cdot (x^+ + F)^2 \cdot G \equiv F'(x_1, y_1 - y^-),$$
$$y_0' = \gamma G + g(x^+ + F, G) \cdot (x^+ + F) \cdot G^2 \equiv G'(x_1, y_1 - y^-).$$

Тогда в силу (2) получим $x^{+'} = \lambda x^+$, $y^{-'} = y^-$, $c' = G'_{x_1}(0) = \gamma c$, $\tau(TM^+, M^-) = \tau(M^+, M^-) + (1 - \theta)$.

Аналогично для пары точек M^+ и $T^{-1}M^-$ будет $x^{+'} = x^+$, $y^{-'} = \gamma^{-1} y^-$, $c' = \lambda c$, $\tau(M^+, T^{-1}M^-) = \tau(M^+, M^-) + (1 - \theta)$. Теперь формула (7) легко доказывается по индукции.

Пусть $M_i^s \in W^s_{\text{loc}}$, $M_i^u \in W^u_{\text{loc}}$, $i = 1, 2,$ — пары точек орбиты Γ такие, что $T^k M_i^u = M_i^s$ для некоторого достаточно большого k. Тогда существует целое j такое, что $T^j M_1^s = M_2^s$ и $T^j M_1^u = M_2^u$. В силу (7) в этом случае $\tau(M_1^s, M_1^u) = \tau(M_2^s, M_2^u)$. Таким образом, величина τ инвариантна по отношению к выбору пар точек орбиты Γ, принадлежащих W^u_{loc} и W^s_{loc} и связанных между собой одним и тем же числом итераций отображения T. Отмечая этот факт, величину $\tau(M_1, M_2)$ будем обозначать также через $\tau(k)$, где $T^k M_2 = M_1$ и $M_1 \in W^s_{\text{loc}}$, $M_2 \in W^u_{\text{loc}}$ — точки орбиты Γ.

Отметим также, что величина τ не зависит от гладких замен координат, сохраняющих вид (1) отображения $T|_S$.

2. Модули топологической сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией в случае $\sigma < 1$. Рассмотрим диффеоморфизмы T_1 и T_2 с негрубыми гомоклиническими траекториями Γ_1 и Γ_2, удовлетворяющие условиям А—В с нечетными $n_1 \geqslant 1$ и $n_2 \geqslant 1$ и, вообще говоря, различными. Выберем две пары гомоклинических точек $M_1^+(x_1^+, 0)$, $M_1^-(0, y^-)$ и $M_2^+(x_2^+, 0)$, $M_2^-(0, y_2^-)$ отображений T_1 и T_2 так, чтобы $M_i^+ = T_i^s M_i^-$ для некоторого достаточно большого s. Предположим, что знаки параметров λ, γ, c и d у T_1 и T_2 совпадают. В противном случае диффеоморфизмы заведомо не сопряжены*. По парам точек M_1^+, M_1^- и M_2^+, M_2^- указываем соответственно $\tau_1(\tau_1(s))$ и $\tau_2(\tau_2(s))$.

Теорема 1. *Пусть T_1 и T_2 — диффеоморфизмы с тривиальным описанием. Для сопряженности T_1 и T_2 в случае, когда Γ_1 и Γ_2 не являются предельными траекториями, необходимо, чтобы $\theta_1 = \theta_2$. Для сопряженности T_1 и T_2 в случае, когда Γ_1 и Γ_2 — предельные траектории, необходимо, чтобы $\theta_1 = \theta_2$ и выполнялось одно из условий: 1) если θ_i иррационально, то $\tau_1 = \tau_2$; 2) если θ_i рационально, то τ_1 и τ_2 принадлежат замыканию одной и той же компоненты связности множества $R - R_{\theta_i}$, где $R_{\theta_i} = \{x \mid x = r - k\theta;\ r, k \in Z\}$.*

В первом случае доказательство проводится так же, как и для диффеоморфизмов с негрубой гетероклинической точкой [2, 5] **. Вообще, диф-

* Например, T_1 и T_2, у которых $\lambda > 0$, $\gamma < 0$, но $d_1 < 0$, $c_1 < 0$, а $d_2 > 0$, $c_2 > 0$, не сопряжены, поскольку периоды однообходных периодических траекторий у этих диффеоморфизмов будут числами разных четностей.

** Инвариант, введенный в [2], есть θ, если седла совпадают.

феоморфизмы с тривиальным описанием будут только при нечетном n и $\gamma > 0$, $d < 0$. В частности, если $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c < 0$, $d < 0$, то траектория Γ не является предельной. В остальных таких случаях Γ— ω-предельная траектория. И здесь мы покажем, что если не выполняются условия теоремы, то T_1 и T_2 не будут сопряжены на множествах траекторий, ω-предельных к гомоклиническим.

Рассмотрим, для определенности, случай $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c > 0$, $d < 0$. Пусть $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ и $\tau_1 < \tau_2$. При достаточно большом $\bar{k}$ у T_2 существует множество полутраекторий $\tilde{N}^{2'}_{\bar{k}}$, являющихся ω-предельными к Γ_2, для которых допустимые пары удовлетворяют неравенству (5). Логарифмируя последнее, получаем

$$j_{i+1} > j_i\theta - \tau_2 + S_2 |\gamma_2|^{-\bar{k}/(n_2+1)}. \tag{8}$$

Множество допустимых пар диффеоморфизма T_1 принадлежит множеству целочисленных решений неравенства

$$j_{i+1} \geqslant j_i\theta - \tau_1 - S_2 |\gamma|^{-\bar{k}/(n_1+1)}. \tag{9}$$

Заметим, что если j_i и j_{i+1} не удовлетворяют (9), то левая и правая части системы (4) будут иметь разные знаки. Неравенства (8) и (9) определяют соответственно некоторые полуплоскости P_2 и P_1 на R_2. При этом все точки $(j_i, j_{i+1}) \in P_2$ соответствуют допустимым парам для $\tilde{N}^2_{\bar{k}}$, а в $R_2 \setminus P_1$ нет ни одной точки, отвечающей допустимой паре для $\tilde{N}^1_{\bar{k}}$. Поскольку $\tau_1 < \tau_2$, то при достаточно большом $\bar{k}$ множество $\tilde{P} = P_2 \setminus P_1$ представляет собой полосу шириной порядка $\tau_2 - \tau_1$. Если θ иррационально, то в $\tilde{P}$ содержится счетное множество точек, соответствующих парам допустимым для $\tilde{N}^2_{\bar{k}}$ и недопустимым для $\tilde{N}^1_{\bar{k}}$. И, следовательно, полутраектории из $\tilde{N}^2_{\bar{k}}$, имеющей хотя бы две последовательные точки пересечения с $\sigma^0_{j_i}$ и $\sigma^0_{j_{i+1}}$, где $(j_i, j_{i+1}) \in$ $\in \tilde{P}$, не может быть поставлена в соответствие (при сопряжении) траектория из $\tilde{N}^1_{\bar{k}}$. В случае, когда θ рационально, прямая $j = i\theta - \tau$ при $\tau \notin R_\theta$ лежит на конечном расстоянии от точек целочисленной решетки. Если τ_1 и τ_2 принадлежат разным компонентам связности множества $R - R_\theta$, то $\tilde{P}$ содержит прямую $j = i\theta - \tau'$, где $\tau' \in R_\theta$, и, следовательно, счетное множество точек из $Z \times Z$. В этом случае при достаточно большом $\bar{k}$ диффеоморфизмы T_1 и T_2 также не сопряжены.

В случае $\lambda < 0$ при θ рациональном, если τ_1 и τ_2 принадлежат разным компонентам связности множества $R - R_\theta$, T_1 и T_2 могут быть не сопряжены из-за различного поведения некоторых траекторий, остающихся в U^i_k лишь конечное время, $i = 1, 2$.

Теорема 2. *Для сопряженности диффеоморфизмов T_1 и T_2 с полным описанием необходимо, чтобы $\theta_1 = \theta_2$.*

Доказательство аналогично [2, 5]. Диффеоморфизмы с полным описанием при нечетном n имеют $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c < 0$, $d > 0$. Такие T_1 и T_2 будут Ω-сопряжены на некоторых специальных окрестностях гомоклинических траекторий [3, 4], но топологически не сопряжены при $\theta_1 \neq \theta_2$ из-за различного поведения блуждающих траекторий.

Теорема 3. *Для сопряженности диффеоморфизмов T_1 и T_2 в случае смешанного описания необходимо, чтобы $\theta_1 = \theta_2$ и выполнялось одно из условий*: 1) *если θ_i иррационально, то $\tau_1 = \tau_2$*; 2) *если θ_i рационально, то τ_1 и τ_2 принадлежат замыканию одной и той же компоненты связности множества $R - R_{\theta_i}$*.

Покажем, что если условия теоремы не выполняются, то T_1 и T_2 не будут сопряжены на неблуждающих множествах в окрестностях гомоклинических траекторий. Пусть $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ и $\tau_1 < \tau_2$. Для определенности рассмотрим случай $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c > 0$, $d > 0$. При достаточно большом $\bar{k}$ допустимые пары, соответствующие $N_{\bar{k}}^{1'}$, удовлетворяют неравенству

$$j_{i+1} < j_i\theta - \tau_1 - S_3 |\gamma_1|^{-\bar{k}/(n_1+1)}, \tag{10}$$

а допустимые пары для $N_{\bar{k}}^2$ принадлежат множеству решений неравенства

$$j_{i+1} < j_i\theta - \tau_2 + S_3 |\gamma_2|^{-\bar{k}/(n_2+1)}. \tag{11}$$

Неравенства (10) и (11) определяют соответственно полуплоскости P_1' и P_2' на R_2. В $R_2 \setminus P_2'$ нет точек, отвечающих допустимым парам для $N_{\bar{k}}^2$. Далее доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что величина θ является модулем сопряженности систем с четным n. Этот факт доказывается аналогично [2, 5].

3. Некоторые арифметические свойства θ и τ в случае $\sigma < 1$. В [3] установлено, что на бифуркационных поверхностях, соответствующих диффеоморфизмам со смешанным описанием, всюду плотны системы со счетным множеством устойчивых периодических точек. В подобных случаях тип $N_{\bar{k}}$ значительно зависит от арифметических свойств θ и τ.

Из [1, 4] известно, что в случае $\sigma < 1$ однообходные периодические траектории рассматриваемых диффеоморфизмов всегда седловые, а у систем с четным n, у которых

$$\lambda > 0,\ ld > 0 \text{ либо } \lambda < 0,\ \gamma > 0,\ \operatorname{sign} c = \operatorname{sign} ld, \tag{12}$$

седловыми являются и двухобходные периодические траектории. В остальных случаях последние могут быть устойчивыми. Чтобы это показать, рассмотрим отображение $T_{ij} = \hat{T}T^j\hat{T}T^i : \Pi_0 \to \Pi_0$, которое, используя (3), представим в виде

$$\begin{gathered}\bar{x}_0 - x^+ = F(\xi_i(x_0, y_1),\ y_1, -y^-), \eta_j(\bar{x}_0, \bar{y}_1) = G(\xi_i, y_1 - y^-),\\ \bar{\bar{x}}_0 - x^+ = F(\xi_j(\bar{x}_0, \bar{y}_1), \bar{y}_1 - y^-),\ \ \eta_i(\bar{\bar{x}}_0, \bar{\bar{y}}_1) = G(\xi_j, \bar{y}_1 - y^-).\end{gathered} \tag{13}$$

Для определенности, пусть $j > i \geqslant \bar{k}$. Для нахождения неподвижных точек T_{ij} положим в (13) $\bar{\bar{x}}_0 = x_0$, $\bar{\bar{y}}_1 = y_1$. Тогда, разрешив полученную систему относительно $\bar{x}_0$ и x_0 и введя переменные $\eta_1 = y_1 - y^- - \varphi$, $\eta_2 = \bar{y}_1 - y^- - \varphi$, получим систему

$$\begin{gathered}D\eta_1^{n+1} + (c\lambda^i b_1(\eta_2) - \gamma^{-j})\eta_2 + \lambda^i x^+ l_1(\eta_2)\eta_1 + c\lambda^i x^+ - \gamma^{-j} y^- +\\ + \rho_{ij}^1(\eta_1, \eta_2)(|\lambda|^{2i} + |\gamma|^{-2j}),\ \ D\eta_2^{n+1} + (c\lambda^j b_2(\eta_1) - \gamma^{-i})\eta_1 +\\ + \lambda^j x^+ l_2(\eta_1)\eta_2 + c\lambda^j x^+ - \gamma^{-i} y^- + \rho_{ij}^2(\eta_1, \eta_2)|\gamma|^{-2i},\end{gathered} \tag{14}$$

где $b_\alpha(0) = b$, $l_\alpha(0) = l$, функции ρ_{ij}^α и их производные равномерно ограничены по i и j, $\alpha = 1, 2$. При n нечетном, например, система (14) допускает, вообще говоря, решения вида

$$\begin{gathered}\eta_2 = \pm (d^{-1}\gamma^{-i}y^-(1 + \ldots))^{1/(n+1)},\\ \eta_1 = \pm \{d^{-1}[\gamma^{-j}(y^- + \gamma^{-i/(n+1)}|y^-/d + \ldots|^{1/(n+1)}) -\\ - c\lambda^i(x^+ + b\gamma^{-i/(n+1)}|y^-/d + \ldots|^{1/(n+1)})]\}^{1/(n+1)}.\end{gathered} \tag{15}$$

Характеристическое уравнение $\nu^2 - a_1\nu + a_2 = 0$ для T_{ij} при $j > i$ имеет следующие коэффициенты:

$$a_1 = \gamma^{i+j}\{[d(n+1)\eta_2^n + l\lambda^j x^+][d(n+1)\eta_1^n + l\lambda^i x^+] + bc\lambda^i\gamma^{-i}(1 + \ldots)\},$$

$$a_2 = bc(\lambda\gamma)^{i+j}(1 + \ldots).$$

Условие $|a_1|<1$, означающее, что соответствующая неподвижная точка устойчива, можно представить таким образом:

$$|d(n+1)\eta_1^n + l\lambda^i x^+| < \frac{1}{|d(n+1)|}\left|\frac{y^-}{d}\right|^{-n/(n+1)} |\gamma|^{-j-i/(n+1)}. \qquad (16)$$

Заметим, что это неравенство при $l \neq 0$ может иметь решение только, если $\operatorname{sign}\eta_1 = -\operatorname{sign} ld$, что может выполняться в силу (15). Тогда после логарифмирования неравенства (16) получим

$$\tilde{\omega}_i^1 < j - i\theta + \tau - \frac{1-p}{y^- \ln|\gamma|}\left|\frac{y^-}{d}\right|^{1/(n+1)} |\gamma|^{-i/(n+1)} < \tilde{\omega}_i^2, \qquad (17)$$

где $p = by^-/x^+$; $\tilde{\omega}_i^1 < \tilde{\omega}_i^2$ — величины порядка $|\lambda|^{i/n}|\gamma|^{-i/(n+1)}$. Неравенство (17) имеет счетное множество решений в целых числах, например, в таких случаях: 1) для любого τ при $\theta \in J_\tau$, где $\overline{J}_\tau = \{\theta \mid \theta > 1\}$; 2) для любого иррационального $\theta > 1$ при $\tau \in I_\theta$, где $\overline{I}_\theta = R$. При таких θ и τ диффеоморфизм T будет иметь счетное множество устойчивых двухобходных периодических траекторий. Если $p \neq 1$, то, как легко видеть, J_τ содержит только иррациональные числа. В случае, когда τ рационально, множество J_τ содержит только экспоненциально-приближаемые иррациональные числа. Действительно, из (17) при $\tau = r/s$ получаем неравенство

$$\left|\theta - \frac{js+ri}{is}\right| < \frac{S_4}{is}|\gamma|^{-is/(n+1)}.$$

Отметим, что $\operatorname{mes} J_\tau = \operatorname{mes} I_\theta = 0$.

Рассмотрим теперь диффеоморфизмы с четным n, удовлетворяющие условию (12). Структура неблуждающего множества таких диффеоморфизмов существенно зависит от инвариантов $p = by^-/x^+$ и $q = ly^-/c$. Так, в [3] анонсировано, что в случае $p < -q^2$ на соответствующих бифуркационных поверхностях всюду плотны системы со счетным множеством устойчивых периодических точек. Исследование этого факта проводится путем изучения неподвижных точек отображения $T_{ijk} = \hat{T}T^k\hat{T}T^j\hat{T}T^i : \Pi_0 \to \Pi_0$. Как и в предыдущем случае, можно показать, что T при $p < -q^2$ будет иметь счетное множество устойчивых трехобходных периодических траекторий, когда система неравенств

$$\begin{aligned} \omega_{ij}^1 &< j - i\theta + \tau - \frac{p}{y^- \ln|\gamma|}\left|\frac{y^-}{d}\right|^{1/(n+1)} |\gamma|^{-i/(n+1)} < \omega_{ij}^2, \\ \delta_{ik}^1 &< k - j\theta + \tau - \frac{1}{y^- \ln|\gamma|}\left|\frac{y^-}{d}\right|^{1/(n+1)} |\gamma|^{-i/(n+1)} < \delta_{ik}^2, \end{aligned} \qquad (18)$$

где $\omega_{ij}^1 < \omega_{ij}^2$, $\delta_{ik}^1 < \delta_{ik}^2$, $|\omega_{ij}^\alpha| \sim |\gamma|^{-(i+j)/n}$, $|\delta_{ik}^\alpha| \sim |\gamma|^{-(i+k)/n}$ имеет бесконечно много решений относительно целых i, j, k. Это будет выполняться для всюду плотного множества значений (θ, τ) из полуплоскости $\theta > 1$, причем такие θ и τ будут иррациональными числами, экспоненциально-приближаемыми рациональными дробями. Действительно, из (18) легко вытекают следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \left|\theta - \frac{k-j}{j-i}\right| &< \frac{|p-1|}{y^- \ln|\gamma|}\left|\frac{y^-}{d}\right|^{1/(n+1)} (j-i)^{-1}|\gamma|^{-i/(n+1)}, \\ \left|\tau - \frac{ki-j^2}{j-i}\right| &< \frac{|pj-i|}{y^- \ln|\gamma|}\left|\frac{y^-}{d}\right|^{1/(n+1)} (j-i)^{-1}|\gamma|^{-i/(n+1)}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Поскольку $j \sim i\theta$ при $i \to \infty$, т. е. $j - i \sim (\theta - 1)i$, то выражения в правых частях (19) мажорируются экспонентами от $j - i$.

4. **Диффеоморфизмы с негрубой гомоклинической траекторией в случае $\sigma = 1$.** Очевидно, для таких

систем $\theta = 1$, а из (7) вытекает, что τ не зависит от выбора пар гомоклинических точек. Характерной особенностью этого случая является то, что множество траекторий из некоторой малой окрестности гомоклинической орбиты допускает полное описание, когда τ не является целым числом.

Теорема 4. *Пусть T — диффеоморфизм, удовлетворяющий условиям А — В с $\sigma = 1$ и четным n. Тогда если $\tau \notin Z$, то существует такое $\bar{k} = \bar{k}(\tau) \to \infty$ при $\min_{m \in Z}(\tau - m) \to 0$, что $N_{\bar{k}}$ находится во взаимнооднозначном соответствии с траекториями топологической схемы Бернулли из двух символов, и все траектории $N_{\bar{k}}$, за исключением Γ, седловые.*

Доказательство фактически вытекает из того, что пары (j_i, j_{i+1}), не удовлетворяющие (6), должны быть решениями неравенства

$$|j_{i+1} - j_i + \tau| \leqslant S_5 |\gamma|^{-\bar{k}/(n+1)}. \tag{20}$$

Но если $\tau \notin Z$, то последнее не будет иметь целочисленных решений при достаточно большом $\bar{k} = \bar{k}(\tau)$.

Рассмотрим случай нечетного n. Отметим, что если $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c < 0$, то ситуация будет такой же, как и при $\sigma < 1$, т. е. если $d > 0$, то $N_{\bar{k}}$ описывается полностью и независимо от τ; а если $d < 0$, то $N_{\bar{k}} = O \cup \Gamma$ и Γ не является предельной траекторией. В остальных случаях нетрудно показать, что при нецелых τ множество допустимых пар для достаточно большого $\bar{k} = \bar{k}(\tau)$ будет совпадать со множеством целочисленных решений неравенства (5) при $\sigma = 1$ и, следовательно, все траектории $N_{\bar{k}}$, за исключением Γ, будут седловыми*. Рассмотрим подробнее разные случаи.

В случае $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $d > 0$, $c > 0$ неравенство (5) при $\theta = 1$ принимает вид $j_{i+1} < j_i - \tau + \ldots$, где многоточием обозначены члены, стремящиеся к 0 при $\bar{k} \to \infty$. Если $\tau > 0$, то $j_{i+1} < j_i$ и, очевидно, $N_{\bar{k}(\tau)} = O \cup \Gamma$ (здесь Γ является α-предельной траекторией). Если же $\tau < 0$ и $\tau \notin Z$, то структура $N_{\bar{k}(\tau)}$ нетривиальна. В частности, если $\tau \in (-1; 0)$, то $N_{\bar{k}(\tau)}$ содержит бесконечно много гиперболических базисных множеств типа «подковы Смейла». Отметим, что при $\tau \notin Z$ множество траекторий или полутраекторий из $U_{\bar{k}}$ можно описать с помощью некоторого бесконечного графа $G(\tau)$. Состояния этого графа можно отождествить с $\sigma_k^{0\alpha}$, $k = \bar{k}, \bar{k}+1, \ldots, \alpha = 1, 2$ (здесь σ_k^{01} (σ_k^{02}) — левая (правая) «половинки» σ_k^0, точнее см. в [1]). Матрица переходов графа $G(\tau)$ задается таким образом:

$$a_{i\alpha_j\beta} = \begin{cases} 1 & \text{если } i \geqslant j + [\tau], \\ 0, & \text{если } i < j + [\tau], \ \alpha, \beta = 1, 2, i, j \geqslant \bar{k}(\tau). \end{cases}$$

Граф ** $G(\tau)$ изображен на рисунке при $\tau \in (-1; 0)$ (*а*) и $\tau \in (0; 1)$ (*б*).

В случае $d < 0$, $\gamma > 0$, $\lambda > 0$, $c > 0$ для допустимых пар будет выполняться неравенство $j_{i+1} > j_i - \tau + \ldots$. Если $\tau < 0$, то $j_{i+1} > j_i$ и $N_{\bar{k}} = O \cup \Gamma$ (траектория Γ является ω-предельной). Если же $\tau > 0$ и $\tau \notin Z$, то множество $N_{\bar{k}(\tau)} - \Gamma$ имеет седловую структуру. Матрица переходов графа $G(\tau)$ при $\tau \notin Z$ задается с помощью соотношений

$$a_{i\alpha_j\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leqslant j + [\tau], \\ 0, & \text{если } i > j + [\tau], \ \alpha, \beta = 1, 2, i, j \geqslant \bar{k}(\tau). \end{cases}$$

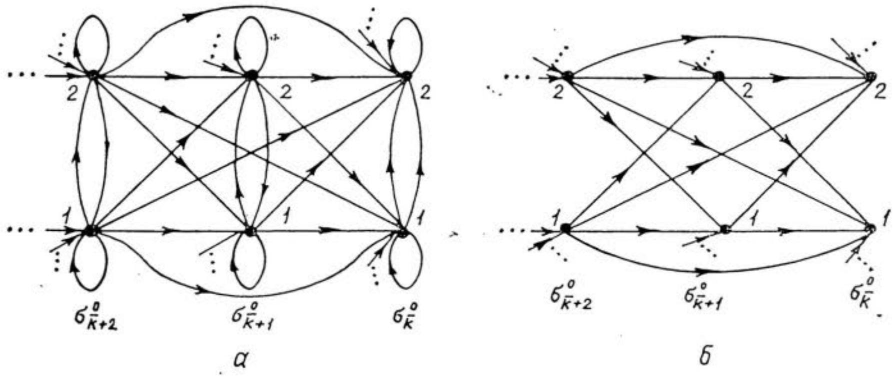
В частности, при $\tau \in (0; 1)$ или $\tau \in (-1; 0)$ граф $G(\tau)$ будет таким, как на рисунке, *а* или *б* соответственно, только направление стрелок нужно изменить на противоположное.

---

* Это вытекает из того, что для траектории неседлового типа хотя бы одна допустимая пара должна удовлетворять неравенству (20). Последнее показывается аналогично [4].

** Математически более точное, но и более громоздкое описание можно получить с помощью топологических марковских цепей.

Можно дать точное описание $N_{\bar{k}(\tau)}$ при $\tau \notin Z$ и в случаях, когда λ или γ отрицательно. Например, если $\lambda < 0$, $\gamma > 0$, $d > 0$, $c > 0$, то условие (5) с $\theta = 1$ при нечетном j_i выполняется для любого $k \leqslant j_{i+1} \leqslant \infty$, а



Граф $G(\tau)$.

допустимые пары с четным j_i удовлетворяют неравенству $j_{i+1} < j_i - \tau + \ldots$. В этом случае матрица переходов графа $G(\tau)$ при $\tau \notin Z$ задается соотношениями

$$a_{i\alpha_j\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ нечетное}, \\ 1, & \text{если } i \text{ четное и } i \geqslant j + [\tau], \\ 0, & \text{если } i \text{ четное и } i < j + [\tau], \quad \alpha, \beta = 1, 2,\ i, j \geqslant \bar{k}(\tau). \end{cases}$$

Как и в п. 2 доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть диффеоморфизмы T_1 и T_2 удовлетворяют условиям* А—В, $\sigma = 1$ *и* $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$ *нечетные, и не выполняется условие* $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c < 0$. *Тогда для сопряженности T_1 и T_2 необходимо, чтобы существовало такое целое k, что* $\tau_1, \tau_2 \in [k; k+1]$.

1. *Гаврилов Н. К., Шильников Л. П.* О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. I // Мат. сб.— 1972.— 88, № 4.— С. 475—492; II.— 1973.— 90, № 1.— С. 139—157.
2. *Palis J.* A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability // Asterisque.— 1978.— N 51.— P. 335—346.
3. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми // Докл. АН СССР.— 1986.— 286, N 5.— С. 1049—1053.
4. *Гонченко С. В.* Нетривиальные гиперболические подмножества систем с негрубой гомоклинической кривой // Методы качественной теории дифференциальных уравнений.— Горький: Горьк. ун-т, 1984.— С. 89—102.
5. *Newhouse S., Palis J., Takens F.* Bifurcations and stability of families of diffeomor — phisms // Math. IHES.— 1983.— N 57.— P. 5—72.

НИИ прикл. математики и кибернетики при Горьк. ун-те Получено 17.07.86