УДК 517.53

В. И. Максимов

Конструктивное описание классов гармонических функций с особенностями на континуумах без нулевых внешних углов

Получено конструктивное описание классов функций, непрерывных в расширенной плоскости, гармонических вне некоторого континуума без нулевых внешних углов и с мажорантой их модуля непрерывности, удовлетворяющей некоторым стандартным ограничениям, в терминах равномерных оценок.

Одержано конструктивний опис класів функцій, неперервних в розширеній площині, гармонійних зовні деякого континууму без нульових зовнішніх кутів і з мажорантою їх модуля неперервності, яка задовольняє деяким стандартним обмеженням, в термінах рівномірних оцінок.

1. Пусть K — ограниченный континуум комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ($\operatorname{diam} K > 0$) с односвязным дополнением $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ ($L = \partial\Omega = \partial K$ — их общая граница), не содержащий внутренних точек. Через $w = \Phi(z)$ обозначим функцию, конформно и однолистно отображающую Ω на $\Omega' = \{w : |w| > 1\}$ и нормированную условиями $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$. Компактифицируем область Ω простыми концами по Каратеодори (см., например, [1, с. 62—92]). Как известно, существует гомеоморфизм между компактификацией $\tilde{\Omega}$ и $\bar{\Omega}'$, совпадающий в Ω с $\Phi(z)$. Сохраним за этим гомеоморфизмом обозначение Φ, а обратный к нему гомеоморфизм обозначим через Ψ. Внутренние точки $z \in \Omega$ также можно рассматривать как простые концы $z = Z \in \tilde{\Omega}$. Пусть $\tilde{L} = \tilde{\Omega} \setminus \Omega$ — множество всех граничных простых концов. Если $Z \in \tilde{\Omega}$, то через $|Z| = z$ будем обозначать тело простого конца Z.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями:

$$L_R = \{\zeta : |\Phi(\zeta)| = R\},\ R > 1,$$

$$U(z, \delta) = \{\zeta : |\zeta - z| < \delta\}, \quad z \in \mathbb{C},\ \delta > 0,$$

$$\rho_R(z) = \operatorname{dist}(z, L_R) = \inf_{\zeta \in L_R} |z - \zeta|, \quad z \in \mathbb{C},\ R > 1,$$

$$d(n) = \sup_{z \in L} \rho_{1 + \frac{1}{n}}(z), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

$$G_n = \bigcup_{\zeta \in L} U(\zeta, d(n)), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

$\omega(\delta)$, $\delta > 0$,— функция типа модуля непрерывности; $C^{\omega}_{\Delta}(K)$ — класс вещественных, непрерывных в $\overline{\mathbb{C}}$, гармонических в Ω функций $u(z)$, удовлетворяющих при z и $\zeta \in \mathbb{C}$ условию

$$|u(z) - u(\zeta)| \leqslant C\omega(|z - \zeta|), \quad C = C(u) > 0.$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что континуум K обладает следующими двумя свойствами:

1) существует такое число $A = A(K) \geqslant 1$, что любые две точки z и $\zeta \in K$ можно соединить дугой (т. е. разомкнутой жордановой кривой) $\gamma(z, \zeta) \subset K$, диаметр которой удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{diam} \gamma(z, \zeta) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{\xi, \eta \in \gamma(z, \zeta)} |\xi - \eta| \leqslant A|z - \zeta|;$$

2) существует такое число $B = B(K) \geqslant 1$, что для любого $R > 1$ и

© В. И. МАКСИМОВ, 1990

любой точки $z \in L$ существует такой простой конец $Z \in \tilde{L}$ ($|Z| = z$), что

$$|z - \Psi[\Phi(Z) R]| \leqslant B\rho_R(z).$$

Приведем примеры.

1. Ограниченные квазиконформные дуги (согласно результатам работы [2]) удовлетворяют условиям 1 и 2;

2. Континуумы из класса H^* без внутренних точек (см., например, [3]) удовлетворяют указанным выше свойствам 1 и 2.

3. Очевидно, что континуум

$$K = \{z : |x| \leqslant 1,\ y = 0\} \cup \{z : |x| \leqslant 1,\ y = x\},$$

где $z = x + iy$, также удовлетворяет условиям 1, 2.

Достаточно большие, неотрицательные, зависящие, возможно, только от несущественных для рассматриваемых вопросов параметров числа будем обозначать через $C, C_1, C_2, \ldots$

Ниже под символом $A \preccurlyeq B$ понимается неравенство $A \leqslant CB$, в котором число C не зависит от A и B. Символ $A \asymp B$ означает, что одновременно имеет место $A \preccurlyeq B$ и $B \preccurlyeq A$.

Если $K = L$ — квазиконформная дуга, а $\omega(\delta)$ удовлетворяет некоторым дополнительным ограничениям (в частности, если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$), то, как показано в работе [4], классы $C_\Delta^\omega(K)$ подобно аналитическому случаю (см., например, [5]) могут быть конструктивно описаны в терминах расстояния $\rho_{1+1/n}(z)$ от точки z до $(1 + 1/n)$-й линии уровня внешней функции Римана.

В данной работе, в отличие от результатов работы [4], при более общих предположениях на континуум K получено конструктивное описание классов $C_\Delta^\omega(K)$ в терминах равномерных оценок, а именно, в терминах величины $d(n)$.

Сформулируем основные результаты.

Пусть $B_\Delta^\omega(K)$ — класс вещественных, непрерывных в $\overline{\mathbb{C}}$, гармонических в Ω функций $u(z)$, для каждой из которых существует последовательность таких гармонических полиномов $Q_n(z) = \operatorname{Re} \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, $n = 1, 2, \ldots$; a_j — комплексные числа, что

$$|u(z) - Q_n(z)| \leqslant C\omega[d(n)], \quad z \in G_n.$$

Теорема 1. $C_\Delta^\omega(K) \subset B_\Delta^\omega(K)$.

Пусть $\omega(\delta)$, $\delta > 0$, — функция типа модуля непрерывности;

$$\mu(\delta) = \begin{cases} \delta \displaystyle\int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt, & 0 < \delta < 1/2; \\[2ex] \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt, & \delta \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Теорема 2. $B_\Delta^\omega(K) \subset C_\Delta^\mu(K)$.

Следствие. *Если* $\mu(\delta) \leqslant C_1\omega(\delta)$, *то* $C_\Delta^\omega(K) = B_\Delta^\omega(K)$.

2. Доказательство теоремы 2 проводится по стандартной схеме доказательства обратных теорем (см., например, [5, 6]).

Приведем ряд геометрических фактов, положенных в основу доказательства теоремы .

Пусть n достаточно велико. Обозначим через Z_0 граничный простой конец, обладающий свойством $\Phi(Z_0) = 1$, и пусть $z_0 = |Z_0| \in L$. Построим следующую систему точек: $\{t_k\}_{k=0}^N$: $t_k \in [0, 2\pi]$, $k = \overline{0, N}$; $t_0 = 0$; $N = N(n, K)$. Пусть t_1 такова, что

$$|\Psi(e^{it_1}) - z_0| = d(n), \quad |\Psi(e^{it}) - z_0| < d(n), \quad 0 < t < t_1,$$

Точку $t_2 \in (t_1, 2\pi]$ выберем так, чтобы имели место соотношения

$$|\Psi(e^{it_2}) - \Psi(e^{it_1})| = d(n),$$
$$|\Psi(e^{it}) - \Psi(e^{it_1})| < d(n), \qquad t_1 < t < t_2.$$

Продолжим этот процесс до тех пор, пока не найдем такую точку t_{N+1}, что

$$|\Psi(e^{it_{N+1}}) - \Psi(e^{it})| < d(n), \; t_{N+1} \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

В последних соотношениях символы типа $\Psi(e^{it})$ нужно понимать как тела соответствующих простых концов.

Построенная таким образом система точек $\{t_k\}_{k=0}^{N}$ порождает на единичной окружности систему точек $w_k = e^{it_k}$, $k = \overline{0, N}$.

Отметим следующее несложно устанавливаемое с помощью теорем 4, 7 работы [7] свойство этой системы:

$$|w_0 - w_1| \asymp |w_0 - w_N|, \; |w_k - w_{k+1}| \asymp |w_{k-1} - w_k|, \qquad k = \overline{1, N-1}. \quad (1)$$

Построим также систему точек $\{v_k\}_{k=0}^{N}$ в w-плоскости, полагая

$$v_k = (1 + C_2 |w_k - w_{k+1}|) w_k, \qquad k = \overline{0, N-1},$$
$$v_N = (1 + C_2 |w_N - w_0|) w_N.$$

Соединим точки v_k, $k = \overline{0, N}$, ломаной Γ_n. Путем применения теорем 5, 7 работы [7] и соотношения (1) несложно обосновывается возможность выбора таких чисел $C_2 \geqslant 1$ и $C_3 > 1$, чтобы выполнялись вложения

$$\bigcup_{\zeta \in K} U(\zeta, C_3 d(n)) \supset \overline{B}_n \supset \bigcup_{\zeta \in K} U(\zeta, d(n)) = G_n, \quad (2)$$

где B_n — внутренность кривой $\Psi(\Gamma_n)$.

Докажем некоторые свойства кривых Γ_n и $\Psi(\Gamma_n)$. Отметим прежде всего, что согласно результатам работы [7] с учетом вложений (2) легко доказывается следующая лемма.

Л е м м а 1. *Пусть t и $w \in \Gamma_n$; $t_L = t/|t|$; $w_L = w/|w|$. Тогда при некотором $0 < \alpha_1 = \alpha_1(K) \leqslant 1$ имеет место соотношение*

$$\left|\frac{t - t_L}{w - t_L}\right| \leqslant \left|\frac{w - w_L}{w - t_L}\right|^{\alpha_1}. \quad (3)$$

Через Λ_n обозначим внешность кривой Γ_n, а через $\Theta = h(w)$ — функцию, конформно отображающую область Λ_n на Ω' и нормированную условиями $h(\infty) = \infty$, $h'(\infty) > 0$. Для $w \in \Gamma_n$ положим $\tilde{w}_R = h^{-1}[h(w) R]$.

Ниже мы используем хорошо известные понятия семейства отделяющих кривых и модуля семейства отделяющих кривых (см., например, [8]), а также некоторые основные свойства модулей семейств кривых (см., например, [9, 10]).

Л е м м а 2. *При $w \in \Gamma_n$ и $R \leqslant |w|$ справедливо неравенство*

$$|w - \tilde{w}_R| \leqslant |w| - 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, прежде всего, что в ходе доказательства леммы 2 будут использованы рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 2 работы [11]. Зафиксируем достаточно удаленную от начала координат точку $\xi_0 \in \Lambda_n$. Через $w^* \in \Lambda_n$ обозначим точку со свойствами $|w - w^*| = |w| - 1$, $\arg w^* = \arg w$. Рассмотрим семейство $\Gamma = \Gamma(w, w^*; \xi_0; \Lambda_n)$ локально-спрямляемых дуг и кривых, отделяющих в Λ_n точки w и w^* от ξ_0 и ∞. Оценим сверху его модуль $m(\Gamma)$. Как следует из леммы 1, для любой дуги γ, отделяющей в Λ_n точку w от ∞, выполняется соотношение

$$|w - \tau \leqslant \operatorname{mes} \gamma, \quad \tau \in \gamma, \quad (4)$$

где символ mes обозначает линейную меру Лебега. Пользуясь неравенством (3), можно подобрать положительные числа $\pi > C_4 > 0$ и $C_5 > 1$ так, чтобы дуга

$$\{t : t = (1 + r) e^{i\varphi}; \quad \arg w - C_4 \leqslant \varphi \leqslant \arg w + C_4,$$
$$r = C_5 (|w| - 1)^{\delta} (|w| - 1 + |\varphi - \arg w|)^{1-\delta}\},$$

где $\delta = \alpha_1$, целиком лежала в Λ_n. Положим

$$\xi_1 = [1 + C_5 (|w| - 1)] w |w|^{-1},$$

$$\rho_1 (t) = \begin{cases} \pi^{-1} (|t - \xi_1| - C_6 (|w| - 1)^{\delta} |t - \xi_1|^{1-\delta})^{-1}, \text{ если} \\ t = (1 + r) e^{i\varphi}, \ \arg w - C_4 \leqslant \varphi \leqslant \arg w + C_4, \\ r \geqslant C_5 (|w| - 1)^{\delta} (|w| - 1 + |\varphi - \arg w|)^{1-\delta}, \\ C_7 (|w| - 1) \leqslant |t - \xi_1| \leqslant C_4/2; \\ 0 \text{ — во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\rho_2 (t) = \begin{cases} C_8 (|w| - 1)^{-1}, \ |t - w| \leqslant C_8 (|w| - 1); \\ 0 \text{ — во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\rho_3 (t) = \begin{cases} C_9 \ |t - w| \leqslant C_{10}; \\ 0 \text{ — во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Несложный подсчет с учетом леммы 1 и соотношения (4) показывает, что числа $C_i > 0$, $i = \overline{6, 10}$, могут быть выбраны так, чтобы метрика $\rho (t) = \max \{\rho_1 (t), \rho_2 (t), \rho_3 (t)\}$ была допустимой для семейства Γ, т. е. удовлетворяла неравенству

$$\int_{\gamma} \rho (t) \, dt \geqslant 1, \qquad \gamma \in \Gamma.$$

Следовательно, согласно L-определению модуля семейства кривых (см. например, [10]), имеем

$$m (\Gamma) \leqslant \sum_{i=1}^{3} \iint_{\overline{\mathbb{C}}} \rho_i^2 (t) \, d\sigma_t \leqslant C_{11} +$$

$$+ \int_{C_7(|w|-1)}^{C_4/2} \frac{r\pi (1 + C_{12} r) \, dr}{\pi^2 (r - C_6 (|w| - 1)^{\delta} r^{1-\delta})^2} \leqslant C_{13} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|w| - 1} . \tag{5}$$

Положим $h (w) = \Theta$, $h (w^*) = \Theta^*$, $\Gamma' = h (\Gamma)$. Как показано в [8], для модуля $m (\Gamma')$ выполняется неравенство

$$m (\Gamma') \geqslant \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|\Theta - \Theta^*|} - C_{14}. \tag{6}$$

Таким образом, учитывая конформную инвариантность модуля, из соотношений (5) и (6) заключаем, что $|\Theta - \Theta^*| \geqslant C_{15} (|w| - 1)$. Значит, как следствие этого факта, имеем

$$m (w, w^*; \tilde{w}_{R'}; \Lambda_n) \leqslant C_{16}.$$

Откуда следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Любые две точки z и $\zeta \in \overline{B}_n$ можно соединить жордановой дугой $\gamma (z, \zeta) \subset \overline{B}_n$, диаметр которой удовлетворяет неравенству*

$$\operatorname{diam} \gamma (z, \zeta) \leqslant C_{17} |z - \zeta|,$$

причем число $C_{17} = C_{17} (K)$ не зависит от n.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что z и $\zeta \in \Psi [\Gamma_n]$, $\varphi_1 = \arg \tau$, $\varphi_2 = \arg \eta$, $\pi > \varphi_2 - \varphi_1 > 0$, где $\tau = \Phi (z)$, $\eta =$

$= \Phi(\zeta)$. Положим

$$\Gamma_n(\varphi_1, \varphi_2) = \{w : w \in \Gamma_n,\ \varphi_1 \leqslant \arg w \leqslant \varphi_2\}.$$

Возможны два варианта расположения точек z и ζ.

1. Пусть $|\tau - \eta| < e^{-2\pi}(|\tau| - 1)$. Тогда, применяя теорему 1 работы [12], получаем $\operatorname{diam} \Psi[\Gamma_n(\varphi_1, \varphi_2)] \leqslant |z - \zeta|$.

2. Если $|\tau - \eta| \geqslant e^{-2\pi}(|\tau| - 1)$, то, полагая $Z_L = \Psi[\tau/|\tau|]$, $\mathfrak{Z}_L = \Psi[\eta/|\eta|]$, $z_L = |Z_L|$, $\zeta_L = |\mathfrak{Z}_L|$ и учитывая теоремы 5, 11 работы [7], а также рассуждения, используемые при доказательстве теоремы 1 работы [12], находим

$$\operatorname{diam}[\Gamma_{Z_L}(z) \cup \gamma(z_L;\ \zeta_L) \cup \Gamma_{\mathfrak{Z}_L}(\zeta)] \leqslant |z - \zeta|,$$

где $\gamma(z_L;\ \zeta_L)$ — жорданова дуга с концами в точках z_L и ζ_L, содержащаяся в K; $\Gamma_{Z_L}(z)$ — часть дуги $\Gamma_{Z_L} = \{t : t \in \Omega,\ \arg\Phi(t) = \arg\Phi(Z_L)\}$, заключенная между точками z и z_L; $\Gamma_{\mathfrak{Z}_L}(\zeta)$ — часть дуги $\Gamma_{\mathfrak{Z}_L} = \{t : t \in \Omega,\ \arg\Phi(t) = \arg\Phi(\mathfrak{Z}_L)\}$, заключенная между точками ζ и ζ_L.

При доказательстве теоремы 1 возникает необходимость решения задачи приближения логарифмического ядра $\ln\left|\dfrac{\zeta - z}{\zeta_0 - z}\right|$, где ζ и $z \in G_n$, а ζ_0 — некоторая фиксированная точка из L_2, гармоническими многочленными ядрами. При этом полезен следующий результат, доказательство которого базируется на использовании многочленных ядер В. К. Дзядыка [5, с. 429] и проводится по аналогии с доказательством леммы 2 работы [4] с учетом изложенного выше.

Лемма 4. *Пусть $\zeta_0 \in L_2$, z и $\zeta \in G_n$. Тогда для любого фиксированного $p > 2$ и для любого достаточно большого натурального n существует гармоническое многочленное ядро $\pi_n(\zeta, z)$ вида* $\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{n} a_j(\zeta) z^j$, *где $a_j(\zeta)$, $j = 0, 1, 2, \ldots,$ — комплекснозначные суммируемые функции, удовлетворяющее неравенству*

$$\left|\ln\left|\frac{\zeta - z}{\zeta_0 - z}\right| - \pi_n(\zeta, z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C_{18} d^p(n)/|\zeta - z|^p, & |\zeta - z| \geqslant d(n); \\ C_{18} \ln(C_{19} d(n)/|\zeta - z|), & |\zeta - z| < d(n). \end{cases}$$

Схема доказательства теоремы 1 аналогична доказательству теоремы 1 работы [4].

1. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2-х т.— М. : Наука, 1968.— Т. 2.— 624 с.
2. *Андриевский В. В.* Аппроксимационная характеристика классов функций на континуумах комплексной плоскости // Мат. сб.— 1984.— **125**, № 1.— С. 70—87.
3. *Андриевский В. В.* Геометрическое строение областей и прямые теоремы конструктивной теории функций // Там же.— 1985.— **126**, № 1.— С. 41—58.
4. *Андриевский В. В.* Конструктивное описание классов гармонических функций с особенностями на квазиконформной дуге // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 1.— С. 3—7.
5. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.
6. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев : Наук. думка, 1975.— 271 с.
7. *Максимов В. И.* Геометрические свойства континуумов без нулевых внешних углов.— Донецк, 1988.— 22 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 2544 Ук88.
8. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей // Мат. сб.— 1977.— **102**, № 3.— С. 331—361.
9. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям.— М. : Мир, 1969.— 133 с.
10. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1974.— 96 с.
11. *Андриевский В. В.* Конструктивная характеристика гармонических функций в областях с квазиконформной границей // Квазиконформное продолжение и приближение функций на множествах комплексной плоскости.— Киев, 1985.— С. 3—14.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 12.86).

12. *Андриевский В. В.* О приближении функций частными суммами ряда по полиномам Фабера на континуумах с ненулевой локальной геометрической характеристикой // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, № 1.— С. 3—10.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР,
Донецк

Получено 24.11.88