УДК 517.968

С. Г. Солодкий

Оптимизация адаптивных прямых методов решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве

Получены некоторые общие теоремы об оценке погрешности оптимальных адаптивных прямых методов решения операторных уравнений II рода в гильбертовом пространстве.

Одержані деякі загальні теореми про оцінку похибки оптимальних адаптивних прямих методів розв'язку операторних рівнянь II роду в гільбертовому просторі.

Основным результатом настоящей работы является нахождение верхней и нижней оценок погрешности оптимального адаптивного прямого метода решения операторных уравнений II рода в гильбертовом пространстве. В качестве примера в пространстве L_2 рассматриваются слабо сингулярные интегральные уравнения Фредгольма.

1. Приведем постановку задачи об оптимальном адаптивном прямом методе, представляющую собой конкретизацию (на случай прямых методов) общей постановки задачи об оптимальном приближенном методе (см., например, [1]).

Пусть X — линейное нормированное пространство, $\mathcal{H}$ — некоторое множество линейных непрерывных операторов, действующих из X в X и таких, что уравнение

$$z = Hz + f \tag{1}$$

однозначно разрешимо при любых $H \in \mathcal{H}$ и $f \in \Phi \subset X$. Класс уравнений вида (1) будем обозначать $[\mathcal{H}, \Phi]$.

Следуя [2], к прямым методам решения уравнения (1) будем относить методы, при которых нахождение приближенного решения (1) сводится к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Таким образом, под прямым методом решения (1) будем понимать правило A, согласно которому оператору $H \in \mathcal{H}$ сопоставляется подпространство $F_N \subset X$ размерности N и оператор H_N из X в F_N такие, что уравнение

$$w = H_N w + f \tag{2}$$

однозначно разрешимо, а $w = w(A)$ берется в качестве приближенного решения (1). При фиксированном N множество всех прямых методов A обозначим через $\mathcal{A}_N$. Под погрешностью прямого метода A на классе $[\mathcal{H}, \Phi]$

будем понимать величину

$$e([\mathcal{H}, \Phi], A) = \sup_{\substack{z=Hz+f\\ H\in\mathcal{H}, f\in\Phi}} \|z - w(A)\|_X.$$

Следуя [3, 4], рассмотрим оптимизацию прямых методов решения (1) по точности в смысле величины

$$\Theta_N([\mathcal{H}, \Phi], X) = \inf_{A\in\mathcal{A}_N} \sup_{[\mathcal{H},\Phi]} \|z - w(A)\|_X.$$

2. Прежде всего введем ряд необходимых обозначений. В дальнейшем соотношение $a(n) \ll b(n)$ будет означать, что начиная с некоторого n_1, $a(n) \leqslant c\, b(n)$, $n \geqslant n_1$, где постоянная c не зависит от n. Кроме того, $a(n) \asymp b(n)$ означает, что одновременно имеют место соотношения $a(n) \ll \ll b(n)$ и $b(n) \ll a(n)$.

Под обозначением $Y \hookrightarrow X$ будем понимать, что $Y \subset X$ и для любого элемента $f \in Y$ выполняется соотношение $\|f\|_X \leqslant \|f\|_Y$.

Пусть теперь X — гильбертово пространство, а Y — некоторое линейное нормированное подпространство X, причем $Y \hookrightarrow X$. Положим

$$\mathcal{H} = \{H : X \to Y,\ \|H\|_{X\to Y} \leqslant \alpha,\ \|(I-H)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \beta\},$$

где I — тождественный оператор; $\Psi = [\mathcal{H}, Y_\gamma]$ — класс уравнений вида (1) где $H \in \mathcal{H}$, $f \in Y_\gamma = \{\varphi : \varphi \in Y,\ \|\varphi\|_Y \leqslant \gamma\}$.

Теорема 1. *Пусть задана последовательность подпространств* $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots \subset Y$, $\dim F_n = L(n)$, *таких, что начиная с некоторого* n_0 *для ортопроекторов* $P_n : X \to F_n$ *выполняется условие* $\alpha\beta\, \|I - P_n\|_{Y\to X} \leqslant \nu < 1$. *Тогда имеют место оценки*

$$\|P_{n+k}\|_{X\to Y}^{-2} \ll \Theta_N(\Psi, X) \ll \|I - P_n\|_{Y\to X}^2, \tag{3}$$

где $N = 2L(n)$, *а* k *удовлетворяет соотношению* $\dim F_{n+k} > N$. *Оценку сверху доставляет прямой метод* A^*, *сопоставляющий каждому оператору* $H \in \mathcal{H}$ *конечномерный оператор*

$$H_N^* = P_n H + HP_n - P_n H P_n. \tag{4}$$

Замечание. Операторы вида (4) ранее рассматривались в работе [5].

Доказательство. Для нахождения оценки сверху нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1

$$\|H - H_N^*\|_{Y\to X} \leqslant \alpha \|I - P_n\|_{Y\to X}^2, \tag{5}$$

$$\|H - H_N^*\|_{X\to X} \leqslant \alpha \|I - P_n\|_{Y\to X}, \tag{6}$$

$$\|(I - H_N^*)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \frac{\beta}{1-\nu}, \quad N \geqslant 2L(n_0). \tag{7}$$

Доказательство леммы. Для произвольного элемента $z \in X$ введем вспомогательную функцию $\varphi = (H - HP_n)z = H(z - P_n z)$. В силу очевидного вложения $z - P_n z \in X$ имеем $\varphi \in Y$.

Тогда с учетом (4) получаем

$$\|(H - H_N^*)z\|_X = \|\varphi - P_n\varphi\|_X \leqslant \|I - P_n\|_{Y\to X} \|\varphi\|_Y, \tag{8}$$

где для $z \in Y$ имеем

$$\|\varphi\|_Y = \|H(z - P_n z)\|_Y \leqslant \|H\|_{X\to Y} \|z - P_n z\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \|H\|_{X\to Y} \|I - P_n\|_{Y\to X} \|z\|_Y.$$

Подставляя найденную оценку в (8), получаем (5). Соотношение (6) устанавливается аналогично.

Неравенство (7) непосредственно вытекает из теоремы о разрешимости приближенного уравнения [6, с. 517] и оценки (6)

$$\|(I - H_N^*)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \frac{\|(I - H)^{-1}\|_{X\to X}}{1 - \|H - H_N^*\|_{X\to X}\|(I - H)^{-1}\|_{X\to X}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta}{1 - \alpha\beta\|I - P_n\|_{Y\to X}} \leqslant \frac{\beta}{1 - \nu},$$

где $N \geqslant 2L(n_0)$. Лемма доказана.

Вернемся теперь к получению оценки сверху. Заметим прежде всего, что в силу (1) и (2) $z - w(A) = (I - H_N)^{-1}(H - H_N)z$. Но тогда для метода A^* имеем

$$\|z - w(A^*)\|_X \leqslant \|(I - H_N^*)^{-1}\|_{X\to X}\|H - H_N^*\|_{Y\to X}\|z\|_Y, \tag{9}$$

где

$$\|z\|_Y = \|Hz + f\|_Y = \|H(I - H)^{-1}f + f\|_Y \leqslant \|H(I - H)^{-1}f\|_Y + \|f\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \|H\|_{X\to Y}\|(I - H)^{-1}\|_{X\to X}\|f\|_X + \|f\|_Y \leqslant \gamma(\alpha\beta + 1). \tag{10}$$

Подставляя найденную оценку (10) в (9) и учитывая (5) и (7), получаем

$$\|z - w(A^*)\|_X \leqslant \frac{\alpha\beta\gamma(\alpha\beta + 1)}{1 - \nu}\|I - P_n\|^2_{Y\to X} \ll \|I - P_n\|^2_{Y\to X}.$$

В силу произвольности $H \in \mathcal{H}$ и $f \in Y_\gamma$ отсюда сразу же следует правая часть соотношения (3).

Для получения оценки снизу зафиксируем n (следовательно, и N), а затем подберем натуральное число k так, чтобы выполнялось требование $\dim F_{n+k} > N$.

Теперь рассмотрим оператор $H_0 = \delta\|P_{n+k}\|^{-1}_{X\to Y}P_{n+k}$, где $\delta > 0$ — произвольное число, а $P_{n+k}: X \to F_{n+k}$, $\dim F_{n+k} = L(n+k)$.

Коэффициент δ можно выбрать так, чтобы $H_0 \in \mathcal{H}$. Для этого прежде всего нужно, чтобы

$$\|H_0\|_{X\to Y} = \delta\|P_{n+k}\|^{-1}_{X\to Y}\|P_{n+k}\|_{X\to Y} = \delta \leqslant \alpha.$$

Кроме того, потребуем выполнения следующего условия:

$$\|H_0\|_{X\to X} = \delta\|P_{n+k}\|^{-1}_{X\to Y}\|P_{n+k}\|_{X\to X} = \delta\|P_{n+k}\|^{-1}_{X\to Y} < 1.$$

Тогда, согласно теореме 5 [7, с. 230], имеем

$$\|(I - H_0)^{-1}\|_{X\to X} = \left\|I + \sum_{i=1}^{\infty}(H_0)^i\right\|_{X\to X} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\|H_0\|^i_{X\to X} = \frac{1}{1 - \|H_0\|_{X\to X}}.$$

Наложение условия на норму резольвенты из определения класса $\mathcal{H}$ приводит к оценке $\delta \leqslant \frac{\beta - 1}{\beta}\|P_{n+k}\|_{X\to Y}$.

Таким образом, достаточно положить $\delta = \min\left\{\alpha, \frac{\beta - 1}{\beta}\right\}$, чтобы выполнялось вложение $H_0 \in \mathcal{H}$.

Покажем теперь, что на H_0 достигается оценка снизу. Пусть $S_{\gamma_0} = S_{L(n+k),\gamma_0}$ — шар радиуса γ_0 в F_{n+k} с нормой пространства X. Выберем γ_0 так, чтобы элементы $f = z - H_0 z$ принадлежали Y_γ при $z \in S_{\gamma_0}$. Для этого заметим, что

$$\|f\|_Y = \|z - H_0 z\|_Y = \|z - \delta\|P_{n+k}\|^{-1}_{X\to Y}P_{n+k}z\|_Y =$$

$$= (1 - \delta \| P_{n+k} \|^{-1}_{X \to Y}) \| P_{n+k} z \|_Y \leqslant (1 - \delta \| P_{n+k} \|^{-1}_{X \to Y}) \| P_{n+k} \|_{X \to Y} \| z \|_X \leqslant$$
$$\leqslant (\| P_{n+k} \|_{X \to Y} - \delta) \gamma_0.$$

Таким образом, при условии $\gamma_0 = \dfrac{\gamma}{\| P_{n+k} \|_{X \to Y} - \delta} \asymp \| P_{n+k} \|^{-1}_{X \to Y}$ элементы $f = z - H_0 z$ заполняют шар Y_γ, когда $z \in S_{\gamma_0}$. Обозначим $\Phi_{\gamma_0} = \{f : f = z - H_0 z, z \in S_{\gamma_0}\}$. Легко видеть, что множество решений уравнений $z = H_0 z + f$, $f \in \Phi_{\gamma_0}$, совпадает с шаром S_{γ_0}, а элементы $H_0 z = \delta \| P_{n+k} \|^{-1}_{X \to Y} P_{n+k} z = \delta \| P_{n+k} \|^{-1}_{X \to Y} z$ заполняют шар $S_{\gamma_1} = S_{L(n+k), \gamma_1}$ радиуса $\gamma_1 \asymp \| P_{n+k} \|^{-2}_{X \to Y}$ в F_{n+k} с нормой пространства X, когда $z \in S_{\gamma_0}$.

В силу теоремы о поперечнике шара [8, с. 255] имеем

$$\Theta_N (\Psi, X) = \inf_{A \in \mathscr{A}_N} \sup_{\substack{z = Hz + f \\ H \in \mathscr{H}, f \in Y_\gamma}} \| z - w(A) \|_X \geqslant \inf_{A \in \mathscr{A}_N} \sup_{\substack{z = H_0 z + f \\ f \in \Phi_{\gamma_0}}} \| z - w(A) \|_X =$$
$$= \inf_{A \in \mathscr{A}_N} \sup_{z \in S_{\gamma_0}} \| H_0 z - H_N w(A) \|_X \geqslant \inf_{\substack{M_N \subset X \\ \dim M_N \leqslant N}} \sup_{z \in S_{\gamma_1}} \inf_{\varphi \in M_N} \| z - \varphi \|_X =$$
$$= d_N (S_{\gamma_1}, X) = \gamma_1 \asymp \| P_{n+k} \|^{-2}_{X \to Y},$$

где $d_N (S_{\gamma_1}, X)$ — N-мерный поперечник (по Колмогорову) шара S_{γ_1}. Теорема 1 полностью доказана.

3. Пример. Пусть $X = L_2$ — пространство суммируемых в квадрате на $[0; 2\pi]$ функций с нормой $\| f \|_{L_2} = \left\{ \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f^2(t)\, dt \right\}^{1/2}$. В качестве Y возьмем соболевское пространство W_2^1 абсолютно непрерывных 2π-периодических функций f, у которых производные $f' \in L_2$, причем $\| f \|_{W_2^1} = \| f \|_{L_2} + \| f' \|_{L_2}$.

В качестве $\mathscr{H}$ рассмотрим множество операторов H вида $H = H_1 + H_2$, где

$$H_1 z(t) = \int\limits_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t - \tau}{2} \right| g(\tau) z(\tau)\, d\tau, \quad g \in C, \quad \| g \|_C \leqslant \alpha_1$$

(C — пространство непрерывных 2π-периодических функций),

$$H_2 z(t) = \int\limits_0^{2\pi} h(t, \tau) z(\tau)\, d\tau, \quad h \in W_2^1(Q), \quad \| h \|_{W_2^1(Q)} \leqslant \alpha_2$$

($W_2^1(Q)$ — соболевское пространство абсолютно непрерывных 2π-периодических по каждой переменной на $Q = [0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$ функций $f(x, y)$, у которых f'_x и f'_y суммируемы в квадрате на Q). Кроме того, $\| (I - H)^{-1} \|_{L_2 \to L_2} \leqslant \beta$.

Отметим, что интегральные операторы такого вида рассматривались ранее в [9].

Легко видеть, что оператор H_2 действует из L_2 в W_2^1 (из X в Y). Что же касается оператора H_1, то он является сверткой функций $g(\tau) z(\tau) \in L_2$ $(g \in C)$ с ядром $\ln \left| \sin \dfrac{t - \tau}{2} \right|$. Но тогда, как известно [10, с. 27; 11, с. 598], каждой функции $z(t) \in L_2$ оператор H_1 ставит в соответствие функцию

$$\varphi(t) = - a_0 \ln 2 - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a_m \cos mt}{m} + \frac{b_m \sin mt}{m} \right),$$

где a_m, b_m — коэффициенты Фурье функции $g(t)\, z(t)$. Нетрудно заметить, что функция φ имеет суммируемую в L_2 производную и, следовательно, принадлежит W_2^1. Это означает, что H является непрерывным оператором из L_2 в W_2^1.

Теперь, если в качестве F_n взять пространство T_n тригонометрических полиномов степени не выше n, то в этом случае ортопроектор $P_n : X \to T_n$ каждой функции f ставит в соответствие частную сумму $S_n f$ ее ряда Фурье, Но тогда выполняются все условия теоремы 1. А поэтому, используя известное соотношение $\| f - S_n f \|_{L_2} \leqslant n^{-1} \| f' \|_{L_2}$ для произвольной $f \in W_2^1$ и теорему 1, получаем, что для погрешности приближенного решения уравнений

$$z(t) = \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right| g(\tau) z(\tau) d\tau + \int_0^{2\pi} h(t, \tau) z(\tau) d\tau + f(t), \tag{11}$$

$g \in C$, $h \in W_2^1(Q)$, $f \in W_2^1$, с помощью адаптивного прямого метода A^* имеет место оценка

$$\| z - w(A^*) \|_{L_2} \ll n^{-2}. \tag{12}$$

Уравнения вида (11) относятся к классу слабо сингулярных. Глубокое исследование приближенных методов решения таких уравнений содержится в работе [12], откуда видно (см. соотношение (3.19), с. 49), что в случае рассмотренной в данном примере гладкости ядер и свободных членов применение метода Галеркина, построенного на базе подпространства сплайнов со специально выбранными узлами, гарантировало бы погрешность $O(n^{-1})$, что по порядку в два раза хуже, чем оценка (12).

Пусть $\{l_m\}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства X, а последовательность чисел $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$ такова, что $1 \leqslant |\beta_1| \leqslant |\beta_2| \leqslant \ldots \leqslant \leqslant |\beta_n| \leqslant \ldots$, причем $|\beta_{n+1}| \asymp |\beta_{2n+1}|$. В качестве Y рассмотрим подпространство

$$Y = \{\varphi : \varphi \in X, \quad \| \varphi \|_Y^2 := \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 (\varphi, l_m)^2 < \infty\},$$

а в качестве F_n возьмем линейную оболочку первых n элементов базиса

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1

$$\Theta_{2n}(\Psi, X) \asymp \beta_{2n+1}^{-2}.$$

Оптимальным по порядку является метод A^*.

Доказательство. Заметим, что

$$\| P_{2n+1} \|_{X \to Y}^2 = \sup_{\|\varphi\|_X \leqslant 1} \| P_{2n+1} \varphi \|_Y^2 = \sup_{\|\varphi\|_X \leqslant 1} \sum_{m=1}^{2n+1} \beta_m^2 (\varphi, l_m)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{2n+1}^2 \sup_{\|\varphi\|_X \leqslant 1} \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi, l_m)^2 = \beta_{2n+1}^2.$$

С другой стороны,

$$\| I - P_n \|_{Y \to X}^2 = \sup_{\|f\|_Y \leqslant 1} \sum_{m=n+1}^{\infty} (f, l_m)^2 = \beta_{n+1}^{-2} \sup_{\|f\|_Y \leqslant 1} \sum_{m=n+1}^{\infty} \beta_{n+1}^2 (f, l_m)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{n+1}^{-2} \sup_{\|f\|_Y \leqslant 1} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 (f, l_m)^2 = \beta_{n+1}^{-2}.$$

Но тогда, учитывая, что $|\beta_{n+1}| \asymp |\beta_{2n+1}|$, из теоремы 1 при $L(n) = n$ и $k = n + 1$ получаем утверждение теоремы 2.

4. Пусть теперь X — гильбертово пространство, а Y — некоторое его подпространство, в котором норма задается с помощью конечной совокупности линейных операторов $A_0 = I, A_1, \ldots, A_l$, $A_i : Y \to X$, $i = \overline{0, l}$, так, что для любого $\varphi \in Y$ $\| \varphi \|_Y := \sum_{i=0}^{l} \| A_i \varphi \|_X$. Пусть еще множество $\mathcal{H}$ операторов $H : X \to Y$ содержит операторы, удовлетворяющие условиям:

1) $\| H \|_{X \to Y} \leqslant \alpha$, $\| (I - H)^{-1} \|_{X \to X} \leqslant \beta$;

2) операторы $(A_i H)^*$ действуют из X в Y и $\| (A_i H)^* \|_{X \to Y} \leqslant \mu_i$, $i = \overline{0, l}$, при любом $H \in \mathcal{H}$.

Как и ранее, $\Psi = [\mathcal{H}, Y_\gamma]$ — класс уравнений вида (1) с операторами из $\mathcal{H}$ и свободными членами из Y_γ.

Теорема 3. *Пусть задана последовательность подпространств $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots \subset Y$, $\dim F_n = L(n)$, таких, что начиная с некоторого n_0 для ортопроекторов $P_n : X \to F_n$ выполняется условие $\| I - P_n \|^2_{Y \to X} \beta \sum_{i=0}^{l} \mu_i \leqslant \nu < 1$. Тогда имеют место оценки*

$$\| P_{n+k} \|^{-3}_{X \to Y} \ll \Theta_N (\Psi, X) \ll \| I - P_n \|^3_{Y \to X}, \tag{13}$$

где $N = 2L(n)$, а k удовлетворяет соотношению $\dim F_{n+k} > N$. Оценку сверху доставляет прямой метод A^*.

Доказательство. Для нахождения оценки сверху нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 3

$$\| H - H^*_N \|_{Y \to X} \leqslant \| I - P_n \|^3_{Y \to X} \sum_{i=0}^{l} \mu_i, \tag{14}$$

$$\| H - H^*_N \|_{X \to X} \leqslant \| I - P_n \|^2_{Y \to X} \sum_{i=0}^{l} \mu_i, \tag{15}$$

$$\| (I - H^*_N)^{-1} \|_{X \to X} \leqslant \frac{\beta}{1 - \nu}, \quad N \geqslant 2L(n_0), \tag{16}$$

где оператор H^*_N определен соотношением (4).

Доказательство леммы. Как и в лемме 1, введем для произвольного элемента $z \in X$ вспомогательную функцию $\varphi = H(z - P_n z) \in Y$, после чего получим (8). Для нахождения оценки $\| \varphi \|_Y$ нам понадобятся предварительные выкладки. А именно, в случае $z \in Y$, $g \in X$

$$| (A_i H (z - P_n z), g) | = | ((A_i H - A_i H P_n)(z - P_n z), g) | = | (z - P_n z, (A_i H)^* g - $$
$$- P_n (A_i H)^* g) | \leqslant \| z - P_n z \|_X \, \| (A_i H)^* g - P_n (A_i H)^* g \|_X \leqslant$$
$$\leqslant \| I - P_n \|^2_{Y \to X} \| z \|_Y \, \| (A_i H)^* g \|_Y \leqslant \| I - P_n \|^2_{Y \to X} \| (A_i H)^* \|_{X \to Y} \| z \|_Y \| g \|_X.$$

В случае $z \in X$ аналогично получаем

$$| (A_i H (z - P_n z), g) | \leqslant \| I - P_n \|_{Y \to X} \, \| (A_i H)^* \|_{X \to Y} \| z \|_X \, \| g \|_X.$$

По определению нормы в Y для $z \in Y$ имеем

$$\| \varphi \|_Y = \sum_{i=0}^{l} \| A_i H (z - P_n z) \|_X = \sum_{i=0}^{l} \sup_{\|g\|_X \leqslant 1} | (A_i H (z - P_n z), g) | \leqslant$$
$$\leqslant \| I - P_n \|^2_{Y \to X} \, \| z \|_Y \sum_{i=0}^{l} \mu_i.$$

Подставляя найденную оценку в (8), получаем (14). Соотношение (15) устанавливается аналогично.

Неравенство (16) непосредственно вытекает из теоремы о разрешимости приближенного уравнения [6, с. 517] и оценки (15). Лемма доказана.

Вернемся к нахождению оценки сверху. Аналогично теореме 1 получаем (9) и (10). Теперь, подставляя (10), (14) и (16) в (9), имеем

$$\| z - w(A^*) \|_X \leqslant \frac{\beta\gamma(\alpha\beta + 1)}{1 - \nu} \| I - P_n \|^3_{Y \to X} \sum_{i=0}^{l} \mu_i \ll \| I - P_n \|^3_{Y \to X}.$$

В силу произвольности $H \in \mathcal{H}$ и $f \in Y_\gamma$ отсюда сразу же следует правая часть соотношения (13).

Для получения оценки снизу зафиксируем n (следовательно, и N), а затем подберем натуральное число k так, чтобы выполнялось требование $\dim F_{n+k} > N$.

Теперь рассмотрим оператор $H_0 = \delta \|P_{n+k}\|^{-2}_{X\to Y} P_{n+k}$, где $\delta > 0$ — произвольное число, а $P_{n+k} : X \to F_{n+k}$, $\dim F_{n+k} = L(n+k)$.

Коэффициент δ можно выбрать так, чтобы $H_0 \in \mathcal{H}$. Аналогично теореме 1 получаем оценки $\delta \leqslant \alpha$ и $\delta \leqslant \frac{\beta-1}{\beta}$. Кроме того, необходимо обеспечить выполнение условия 2, налагаемого на класс $\mathcal{H}$. Для сокращения объема выкладок введем обозначение $\varkappa = \delta \| P_{n+k} \|^{-2}_{X\to Y}$. Итак, в силу свойств ортопроектора

$$(A_i H_0)^* = (A_i \varkappa P_{n+k})^* = \varkappa (A_i P^2_{n+k})^* = \varkappa P_{n+k} (A_i P_{n+k})^*.$$

Но тогда по определению нормы элемента в Y имеем

$$\| (A_i H_0)^* \|_{X\to Y} = \sup_{\|\varphi\|_X \leqslant 1} \| (A_i H_0)^* \varphi \|_Y = \sup_{\|\varphi\|_X \leqslant 1} \sum_{j=0}^{l} \| A_j (A_i H_0)^* \varphi \|_X =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_X \leqslant 1} \sum_{j=0}^{l} \varkappa \| A_j P_{n+k} (A_i P_{n+k})^* \varphi \|_X = \varkappa \sup_{\|\varphi\|_X \leqslant 1} \| P_{n+k} (A_i P_{n+k})^* \varphi \|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa \| P_{n+k} \|_{X\to Y} \sup_{\|\varphi\|_X \leqslant 1} \| (A_i P_{n+k})^* \varphi \|_X. \tag{17}$$

В свою очередь, оценим

$$\| (A_i P_{n+k})^* \varphi \|_X = \sup_{\|g\|_X \leqslant 1} | ((A_i P_{n+k})^* \varphi, g) | = \sup_{\|g\|_X \leqslant 1} | (\varphi, A_i P_{n+k} g) | \leqslant$$

$$\leqslant \| \varphi \|_X \sup_{\|g\|_X \leqslant 1} \| A_i P_{n+k} g \|_X \leqslant \| \varphi \|_X \sup_{\|g\|_X \leqslant 1} \| P_{n+k} g \|_Y \leqslant \| \varphi \|_X \| P_{n+k} \|_{X\to Y}. \tag{18}$$

Таким образом, из (17), (18) находим $\| A_i H_0)^* \|_{X\to Y} \leqslant \varkappa \| P_{n+k} \|^2_{X\to Y} = \delta$. Следовательно, для включения $H_0 \in \mathcal{H}$ достаточно положить $\delta = \min \left\{ \alpha, \frac{\beta-1}{\beta}, \{\mu_i\}_{i=0}^{l} \right\}$.

Покажем теперь, что на H_0 достигается оценка снизу. Пусть $S_{\gamma_0} = S_{L(n+k),\gamma_0}$ — шар радиуса γ_0 в F_{n+k} с нормой пространства X. Как и в теореме 1, легко показать, что при $\gamma_0 \asymp \| P_{n+k} \|^{-1}_{X\to Y}$ элементы $f = z - H_0 z$ заполняют шар Y_γ, когда $z \in S_{\gamma_0}$. Обозначим $\Phi_{\gamma_0} = \{ f : f = z - H_0 z,\ z \in S_{\gamma_0} \}$. Очевидно, что множество решений уравнений $z = H_0 z + f$, $f \in \Phi_{\gamma_0}$ совпадает с S_{γ_0}, а элементы $H_0 z = \delta \| P_{n+k} \|^{-2}_{X\to Y} z$ заполняют шар $S_{\gamma_1} = S_{L(n+k),\gamma_1}$ радиуса $\gamma_1 \asymp \|P_{n+k}\|^{-3}_{X\to Y}$ в F_{n+k} с нормой пространства X, когда $z \in S_{\gamma_0}$.

Искомая оценка снизу для $\Theta_N(\Psi, X)$, как и в теореме 1, устанавливается при помощи теоремы о поперечнике шара [8, с. 255]. Таким образом, теорема 3 полностью доказана.

1. *Бахвалов Н. С.* Численные методы.— М. : Наука, 1973.— 632 с.
2. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики.— М. : Гостехиздат, 1960.— 424 с.
3. *Переверзев С. В.* Об оптимальных способах задания информации при решении интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 1.— С. 55—63.
4. *Переверзев С. В.* Об оптимизации методов приближенного решения интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами // Сиб. мат. журн.— 1987.— 28, № 3.— С. 173—183.
5. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1968.— 242 с.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М. : Наука, 1977.—744 с.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1981.— 544 с.

8. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.—М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 304 с.
9. *Гребенников А. И.* Сплайн-аппроксимационный метод и его приложения: Автореф. ... ... д-ра физ.-мат. наук.— Новосибирск, 1989.— 25 с.
10. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. : Наука, 1971.— 1108 с.
12. *Вайникко Г., Педас А., Уба П.* Методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений.— Тарту: Тартус. ун-т, 1984.— 94 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 07.08.89