УДК 519.21

В. Л. Гирко

Предельные нормированные спектральные функции пучка самосопряженных случайных матриц

Пусть $A = (\xi_{ij})$, $B = (\eta_{ij})$ — самосопряженные случайные матрицы n-го порядка. Нормированной спектральной функцией пучка случайных матриц A и B называется выражение

$$\mu_n(x) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} F(x - \lambda_k),$$

где $F(x - \lambda_k) = 1$, если $\lambda_k < x$, и $F(x - \lambda_k) = 0$, если $\lambda_k \geqslant x$, λ_k — корни характеристического уравнения $\det(zA + B) = 0$. Предельные теоремы для спектральных функций $\mu_n(x)$ от некоторых случайных матриц A и B рассматривались в работах [1 — 6].

В настоящей работе предложен новый метод доказательства предельных теорем для спектральных функций $\mu_n(x)$, основанный на использовании преобразований Стилтьеса функций $\mu_n(x)$, методов регуляризации и аналитических продолжений преобразований Стилтьеса, предельных теорем для сумм мартингал-разностей, а также функциональных нелинейных уравнений для предельных преобразований Стилтьеса. Получено утверждение, которое обобщает соответствующие результаты из работ [1—6].

Теорема 1. *Пусть элементы случайных матриц* $A=(\xi_{ij}^{(n)})$, $i=\overline{1,m_n}$, $j=\overline{1,p_n}$, $B=(\eta_{ij}^{(n)})$, $i=\overline{1,m_n}$, $j=\overline{1,q_n}$, *для каждого значения* n *независимы, заданы на одном вероятностном пространстве,* $\mathbf{M}\xi_{ij}^{(n)}=\mathbf{M}\eta_{ij}^{(n)}=0$, $\mathbf{D}\xi_{ij}^{(n)}=\mathbf{D}\eta_{ij}^{(n)}=1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{m_n}=c_1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{m_n}=c_2,\quad c_1+c_2>1, \tag{1}$$

$\mu_{m_n}(x)$ — *нормированные спектральные функции пучка случайных матриц* AA' *и* BB' *и выполняется условие Линдеберга: для любого* $\tau>0$

$$\lim_{n\to\infty} m_n^{-2}\sum_{i=1}^{m_n}\Big\{\sum_{j=1}^{p_n}\mathbf{M}\,[\xi_{ij}^{(n)}]^2\chi(|\xi_{ij}^{(n)}|\,m_n^{-1/2}>\tau)+$$

$$+\sum_{j=1}^{q_n}\mathbf{M}\,[\eta_{ij}^{(n)}]^2\chi(|\eta_{ij}^{(n)}|\,m_n^{-1/2}>\tau)\Big\}=0. \tag{2}$$

Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{mn}(x)=\mu_1(x)+\mu_2(x), \tag{3}$$

где

$$\mu_2'(x)=\begin{cases}\dfrac{[4x(c_1-1+c_2)-(x(1-c_1+c_2-1)^2]^{1/2}}{2\pi x(1+x)},\\ 0,\quad x\bar\in(\gamma_1,\gamma_2),\quad \gamma_1\leqslant x\leqslant\gamma_2\end{cases}$$

$$\gamma_{1,2}=(c_1-1)^{-2}\,[c_1c_2+c_1+c_2-1\pm\sqrt{(c_1+c_2-1)\,c_1c_2}\ \text{при}\ c_1\neq 1,$$

$$\mu_2'(x)=\begin{cases}\dfrac{[4xc_2-(c_2-1)^2]^{1/2}}{2\pi x(1+x)},\quad x>\dfrac{(c_2-1)^2}{4c_2},\\ 0,\ 0<x<\dfrac{(c_2-1)^2}{4c_2},\end{cases}$$

$$\mu_1(x)=\begin{cases}0,\quad c_2>1,\\ 0,\quad x\leqslant 0,\\ 1-c_2,\quad x>0,\quad c_2<1\end{cases}$$

при $c_1=1$,

$$\mu_2'(x)=0\ \text{при}\ c_1=0.$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование Стилтьеса

$$\int_0^\infty (t+x)^{-1}d\mu_m(x)=m_n^{-1}\,\mathrm{Sp}\,m^{-1}AA'\,[AA'm_n^{-1}t+m_n^{-1}BB']^{-1},\quad t>0. \tag{4}$$

Очевидно, что для любого $\alpha>0$

$$|m_n^{-1}\,\mathrm{Sp}\,m_n^{-1}AA'\,[m_n^{-1}AA't+m_n^{-1}BB']^{-1}-m_n^{-1}\,\mathrm{Sp}\,m_n^{-1}\times$$

$$\times AA'\,[m_n^{-1}AA't+m_n^{-1}BB'+I\alpha]^{-1}\leqslant t\alpha m_n^{-1}\,\mathrm{Sp}\times$$

$$\times(I\alpha+m_n^{-1}AA't+m_n^{-1}BB')^{-1}. \tag{5}$$

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если выполняется условие теоремы, то для любых* $\alpha > 0$, $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} m_n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,(I\alpha + m_n^{-1}AA't + m_n^{-1}BB')^{-1} = a(t,\alpha), \tag{6}$$

где $a(t,\alpha)$ *удовлетворяет уравнению*

$$a(t,\alpha) = \left[\alpha + \frac{c_1 t}{1 + t\alpha(t,\alpha)} + \frac{c_2}{1 + a(t,\alpha)}\right]^{-1}, \tag{7}$$

решение уравнения (7) *существует и единственно в классе аналитических функций по переменной* t, $t > 0$.

Доказательство. Введем обозначения

$$\nu_{ij} = \sqrt{t}\,\xi_{ij}^{(n)} m_n^{-1/2}, \quad i = \overline{1, m_n}, \quad j = \overline{1, p_n}, \quad \nu_{ij} = \eta_{ij}^{(n)} m_n^{-1/2},$$

$$j = \overline{p_n + 1,\ p_n + q_n}, \quad i = \overline{1, m_n}, \quad C = (\nu_{ij}), \quad i = \overline{1, m_n}, \quad j = \overline{1, p_n + q_n}.$$

Используя формулу

$$\det T_n = \det T_{n-1}\,(a_{11} - (T_{n-1}^{-1}a_1, b_1)), \tag{8}$$

где $T_n = (a_{ij})_{i,j=2}^{n}$ — невырожденная матрица, $a_1 = (a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $b_1 = (a_{21}, \ldots \ldots, a_{n1})$, имеем

$$m_n^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,(I\alpha + CC')^{-1} = m_n^{-1}\sum_{k=1}^{m_n}\mathbf{M}\,[\alpha + (d_k, d_k) - (C_k' R_k C_k d_k, d_k)]^{-1} =$$

$$= m_n^{-1}\sum_{k=1}^{m_n}\mathbf{M}\left[\alpha + \sum_{l=1}^{p_n+q_n}\mathbf{M}\nu_{kl}^2\Big(\sum_{i,j=1}^{m_n} r_{ij}^k \nu_{il}\nu_{jl}\Big) + \varepsilon_k^{(n)}\right]^{-1}, \tag{9}$$

где $d_k = (\nu_{k1}, \ldots, \nu_{k(p_n+p_n)})$ — k-я вектор-строка матрицы C, C_k — матрица, полученная из матрицы C вычеркиванием k-й строки,

$$R_k = (I\alpha + C_k C_k')^{-1} = (r_{ij}^k)_{i,j}^{m_n} = 1, \quad \varepsilon_k^{(n)} = \sum_{l=1}^{p_n+q_n}(\nu_{kl}^2 - \mathbf{M}\nu_{kl}^2) -$$

$$- (C_k' R_k C_k d_k, d_k) + \sum_{l=1}^{p_n+q_n}\nu_{kl}^2\Big(\sum_{i,j\neq k} r_{ij}^k \nu_{ij}\nu_{jl}\Big).$$

Далее доказательство леммы совпадает с доказательством теоремы 3.2.9 [7, с. 261] за исключением некоторых тривиальных изменений. Как и при доказательстве формулы (3.2.53) [8, с. 265], получаем

$$\mathbf{M}m_n^{-1}\,\mathrm{Sp}\,(I\alpha + CC')^{-1} = m_n^{-1}\sum_{k=1}^{m_n}\Big[\alpha + \sum_{l=1}^{p_n+q_n}\mathbf{M}\nu_{kl}^2 \times$$

$$\times\Big(1 + \sum_{i=1}^{m_n}\mathbf{M}r_{ii}\mathbf{M}\nu_{il}^2\Big)^{-1}\Big]^{-1} + O(1), \tag{10}$$

где r_{ii} — элементы матрицы $(I\alpha + CC')^{-1}$. Из формулы (10) получаем

$$a_n(t,\alpha) = m_n^{-1}\sum_{k=1}^{m_n}\Big[\alpha + \sum_{l=1}^{p_n}\frac{t}{m_n}\Big(1 + \frac{t}{m_n}\sum_{i=1}^{m_n}\mathbf{M}r_{ii}\Big)^{-1} +$$

$$+ m_n^{-1}\sum_{l=p_n+1}^{p_n+q_n}\Big(1 + m_n^{-1}\sum_{i=1}^{m_n}\mathbf{M}r_{ii}\Big)^{-1}\Big]^{-1} + O(1), \tag{11}$$

где $a_n(t,\alpha)=\mathbf{M}m_n^{-1}\operatorname{Sp}(I\alpha+CC')^{-1}$. Из (11) имеем

$$a_n(t,\alpha)=\left[\alpha+\frac{c_1t}{1+ta_n(t,\alpha)}+\frac{c_2}{1+a_n(t,\alpha)}\right]^{-1}+O(1). \tag{12}$$

Так как функция $a_n(t,\alpha)$ является единственным положительным решением алгебраического уравнения 3-й степени $x^3+ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — некоторые числа, то, используя уравнение (12), легко установить, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(t,\alpha)=a(t,\alpha)$ и функция $a(t,\alpha)$ является единственным аналитическим по t при $t>0$ решением уравнения (7).

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы с вероятностью 1 при $\alpha>0$, $t>0$*

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\alpha m_n^{-1}\operatorname{Sp}(I\alpha+CC')^{-1}=0, \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty}m_n^{-1}\operatorname{Sp}m_n^{-1}AA'(m_n^{-1}tAA'+m_n^{-1}BB'+I\alpha)^{-1}=\int\limits_{\infty}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}a(t,x)\,dx. \tag{14}$$

Доказательство. Используя доказательство теоремы 3.1.8 [7, с. 174] или теоремы 10.1.1 [8, с. 253], а также лемму 1, получаем, что с вероятностью 1 для всех $\alpha>0$, $t\geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty}m_n^{-1}\operatorname{Sp}(I\alpha+m_n^{-1}tAA'+m_n^{-1}BB')^{-1}=a(t,\alpha). \tag{15}$$

Из уравнения (7) находим, что функция $\alpha a(t,\alpha)$ является решением алгебраического уравнения 3-й степени:

$$x^3+ax^2+bx+c=0, \tag{16}$$

где $a=t^{-1}(1+t)\alpha+c_1+c_2-1$, $b=\alpha^2t^{-1}+(c_2-1)\alpha t^{-1}+c_1\alpha-\alpha$, $c=-\alpha^2t^{-1}$. Переходя в уравнении (16) к пределу при $\alpha\downarrow 0$ и используя (15), получаем, что при условии $c_1+c_2>1$, $t>0$ $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\alpha a(\alpha,t)=0$. Следовательно, справедливо (13). Очевидно, что

$$m_n^{-1}\operatorname{Sp}m_n^{-1}AA'(m_n^{-1}tAA'+m_n^{-1}BB'+I\alpha)^{-1}=\frac{\partial}{\partial t}\ln\det\left[\frac{AA't}{m_n}+\frac{BB'}{m_n}+I\alpha\right]. \tag{17}$$

Используя формулу (17) и доказательство теоремы 10.1.1 [8, с. 253] получаем, что с вероятностью 1 для всех $\alpha>0$, $t\geqslant 0$ при выполнении условий теоремы справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left\{m_n^{-1}\operatorname{Sp}\frac{AA'}{m_n}\left(\frac{AA't+BB'}{m_n}+I\alpha\right)^{-1}-\right.$$
$$\left.-m_n^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{M}\ln\det\left[\frac{AA't+BB'}{m_n}+I\alpha\right]\right\}=0. \tag{18}$$

Используя лемму 1, получаем

$$\lim_{n\to\infty}m_n^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{M}\ln\det\left[\frac{AA't+BB'}{m_n}+I\alpha\right]=\lim_{\beta\to\infty}\lim_{n\to\infty}m_n^{-1}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\beta}^{\alpha}\mathbf{M}\operatorname{Sp}\left[Ix+\frac{AA't+BB'}{m_n}\right]^{-1}dx=\lim_{\beta\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\beta}^{\alpha}a(t,x)\,dx. \tag{19}$$

Таким образом, справедливо (14). Лемма 2 доказана.

Используя лемму 2, из неравенства (5) и равенства (4) находим, что с вероятностью 1, как и при доказательстве теоремы 9.2.4 [8, с. 228], справедливо равенство

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{\beta\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sup_{t>0}\left|\int\limits_{0}^{\infty}(t+x)^{-1}d\mu_{m_n}(x)-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\beta}^{\alpha}a(t,x)\,dx\right|=0. \tag{20}$$

Лемма 3.

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\lim_{\beta\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\beta}^{\alpha}a(t,x)\,dx=-\frac{c_1a(t,0)}{1+ta(t,0)},\tag{21}$$

где $a(t,0)=2\,[t(c_1-1)+c_2-1+((t(c_1-1)+c_2-1)^2+4t(c_1+c_2-1))^{1/2}]^{-1}$.

Доказательство. В интеграле

$$f(\alpha,\beta)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\beta}^{\alpha}a(t,x)\,dx$$

сделаем замену переменных $x=y^{-1}-c_1t(1+ty)^{-1}-c_2(1+y)^{-1}$, $y>0$. Тогда

$$f(\alpha,\beta)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t,\beta)}^{a(t,\alpha)}y\,\frac{d}{dy}\,[y^{-1}-c_1t(1+ty)^{-1}-c_2(1+y)^{-1}]\,dy=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\,y\left[\frac{1}{y}-\frac{c_1t}{1+ty}-\frac{c_2}{1+y}\right]\Bigg|_{a(t,\beta)}^{a(t,\alpha)}-\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t,\beta)}^{a(t,\alpha)}\left[\frac{1}{y}-\frac{c_1t}{1+ty}-\frac{c_2}{1+y}\right]dy.\tag{22}$$

Учитывая, что $\dfrac{1}{a(t,\alpha)}-\dfrac{c_1t}{1+ta(t,\alpha)}-\dfrac{c_2}{1+a(t,\alpha)}=\alpha$, из (22) находим $f(\alpha,\beta)=c_1t^{-1}\left[\dfrac{1}{1+ta(t,\alpha)}-\dfrac{1}{1+ta(t,\beta)}\right]$. Переходя к пределу при $\alpha\to 0$, $\beta\to\infty$, получаем (21). Лемма 3 доказана.

Так как функция $a(t,0)$ аналитическая при $t>0$, а из соотношения (20) следует, что функции $\mu_{m_n}(x)$ с вероятностью 1 сходятся к предельной неслучайной функции $\mu(x)$, то для функции $\mu(x)$, аналитически продолжая функцию $-c_1a(t,0)[1+ta(t,0)]^{-1}$ на всю комплексную плоскость, имеем

$$\int_0^\infty\frac{d\mu(x)}{x-z}=-\frac{c_1a(-z,0)}{1-za(-z,0)},\quad \operatorname{Im}z\neq 0.\tag{23}$$

По формуле обращения для преобразования Стилтьеса из (23) находим

$$\mu(x_1)-\mu(x_2)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{x_2}^{x_1}\operatorname{Im}\frac{c_1a(-x-i\varepsilon,0)}{1-(x+i\varepsilon)a(-x-i\varepsilon,0)}\,dx.\tag{24}$$

Обозначим $a(-z,0)=m(z)$. Тогда

$$m(z)=\left[-\frac{c_1z}{1-zm(z)}+\frac{c_2}{1+m(z)}\right]^{-1},\quad m(z)=2\,[-z(c_1-1)+c_2-1\pm$$

$$\pm\{[-z(c_1-1)+c_2-1]^2-4z\,[c_1-1+c_2]\}^{1/2}]^{-1}.$$

В этой формуле выбираем знак «+», так как $m(z)$ — это преобразование Стилтьеса некоторой спектральной функции.

Итак,

$$\int_0^\infty(x-z)^{-1}d\mu(x)=-2c_1\,[-z(c_1+1)+c_2-1+\{[-z(c_2-1)+c_2-1]^2-$$

$$-4z\,[c_1-1+c_2]\}^{1/2}]^{-1}.$$

Используя формулу (24), получаем (3). Теорема доказана.

Используя доказательство теоремы 1, докажем утверждение, имеющее большое значение в многомерном статистическом анализе.

Пусть R_1 и R_2 — невырожденные ковариационные матрицы независимых m-мерных случайных векторов ξ_1 и ξ_2, $a_1 = M\xi_1$, $a_2 = M\xi_2$, $\mu_m(x, R_1, R_2)$ — нормированная спектральная функция пучка ковариационных матриц R_1 и R_2.

Теорема 2. *Пусть $x_1, \ldots, x_{n_1}$, $y_1, \ldots, y_{n_2}$ — независимые наблюдения соответственно над случайными векторами ξ и η,*

$$\xi_i = (\xi_{ij}, j = \overline{1, m}) = R_1^{-1/2}(x_i - a_1), \quad \eta_i = (\eta_{ij}, j = \overline{1, m}) = R_2^{-1/2}(y_i - a_2),$$

случайные величины ξ_{ij}, η_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots$, независимы,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{n_1} = c_1, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{m}{n_2} = c_2, \quad c_1, \quad c_2 < 1, \tag{25}$$

выполняется условие Линдеберга: для любого $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \Big[m^{-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_1} \mathbf{M} |\xi_{ij}(n_1 - 1)^{-1/2}|^2 \chi(|\xi_{ij}|(n_1 - 1)^{-1/2} > \tau) + $$
$$+ m^{-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_2} \mathbf{M} |\eta_{ij}(n_2 - 1)^{-1/2}|^2 \chi(|\eta_{ij}|(n_2 - 1)^{-1/2} > \tau)\Big] = 0. \tag{26}$$

Тогда

$$\operatorname*{plim}_{m\to\infty} \Big[\int_0^\infty (t + x)^{-1} d\mu_m(x, \hat{R}_1, \hat{R}_2) - a_m(t)\Big] = 0, \tag{27}$$

где

$$a_m(t) = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} b_m(t, x)\, dx, \quad t > 0,$$

функция $b_m(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$b_m(t, \alpha) = \int_0^\infty [\alpha + t(1 + tc_1 b_m(t, \alpha))^{-1} + x[1 - c_2 + \alpha c_2 b + tc_2 b_m(t, \alpha)(1 +$$
$$+ tc_1 b_m(t, \alpha))^{-1}]]^{-1} d\mu_m(x, R_1, R_2).$$

Решение этого уравнения существует и единственно в классе функций $b_m(t, \alpha)$, аналитических по t, $t > 0$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Стилтьеса

$$\int_0^\infty (t + x)^{-1} d\mu_m(x, \hat{R}_1, \hat{R}_2) = m^{-1} \operatorname{Sp} \hat{R}_1 R_1^{-1} \times$$
$$\times [R_1^{-1/2} \hat{R}_1 R_1^{-1/2} t + R_1^{-1/2} \hat{R}_2 R_1^{-1/2}]^{-1}, \quad t > 0. \tag{28}$$

Очевидно, что для любого $\alpha > 0$

$$|m^{-1} \operatorname{Sp} \hat{R}_1 [\hat{R}_1 t + \hat{R}_2]^{-1} - m^{-1} \operatorname{Sp} R_1^{-1} \hat{R}_1 [R_1^{-1/2} \hat{R}_1 R_1^{-1/2} t + R_1^{-1/2} \hat{R}_2 R_1^{-1/2} +$$
$$+ I\alpha]^{-1} \leqslant t^{-1} \alpha m^{-1} \operatorname{Sp}(I\alpha + R_1^{-1/2} \hat{R}_1 R_1^{-1/2} t + R_1^{-1/2} \hat{R}_2 R_1^{-1/2})^{-1}. \tag{29}$$

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 4. *Если выполняются условия теоремы 2, то для любого $\alpha > 0$, $t \geqslant 0$*

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} m^{-1} \Big\{\operatorname{Sp}[I\alpha + R_1^{-1/2} \hat{R}_1 R_1^{-1/2} t + R_1^{-1/2} \hat{R}_2 R_1^{-1/2}]^{-1} -$$
$$- M \operatorname{Sp}\Big[I\alpha + t \sum_{k=1}^{n_1} \xi_k \times \xi_k' (n_1 - 1)^{-1} + \sum_{k=1}^{n_2} R_3 \eta_k \eta_k' \times$$
$$\times R_3 (n_2 - 1)^{-1}\Big]^{-1}\Big\} = 0, \quad R_3 = R_1^{-1/2} R_2^{-1/2}. \tag{30}$$

Доказательство. Используя формулу $\mathrm{Sp}(tI+A+xx')^{-1}-\mathrm{Sp}(tI+A)=(d/dt)\ln[1+((It+A)^{-1}x,x)]$, где A — неотрицательно определенная матрица порядка m, x — m-мерный вектор-столбец, имеем

$$|\,\mathrm{Sp}\,(I\alpha+R_1^{-1/2}\hat{R}_1R_1^{-1/2}t+R_1^{-1/2}\hat{R}_2R_1^{-1/2})^{-1}-\mathrm{Sp}\,Q^{-1}\,|\leqslant$$

$$\leqslant Q^{-2}(\hat{x}_1-a,\ x_1-\hat{a})(n_1-1)^{-1}[1+(Q^{-1}(\hat{x}^{-1}-a),(\hat{x}_1-a))(n_1-1)^{-1}]^{-1},$$

где

$$Q=I\alpha+t\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k\xi_k'(n_1-1)^{-1}+R_1^{-1/2}\hat{R}_2R_1^{-1/2},\quad |\,\mathrm{Sp}\,Q^{-1}-\mathrm{Sp}\,U^{-1}\,|\leqslant$$

$$\leqslant(U^{-2}(\hat{x}_2-a),(\hat{x}_2-a))(n_2-1)^{-1}[1+(U^{-1}(\hat{x}_1-a),$$

$$(\hat{x}_1-a))(n_2-1)^{-1}]^{-1},\quad U=I\alpha+t\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k\xi_k'(n_1-1)^{-1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n_2}R_3\eta_k\eta_k'R_3(n_2-1)^{-1}.$$

Используя эти два неравенства, получаем (30). Лемма 4 доказана.

Обозначим $b_m(t,\alpha)=\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,U^{-1}$.

Лемма 5. *Функция* $b_m(t,\alpha)$ *удовлетворяет уравнению*

$$b_m(t,\alpha)=m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\{\alpha+t[1+tc_1b_m(t,\alpha)]^{-1}+\lambda_k[1-c_2+bc_2\times$$
$$\times(\alpha+t[1+tc_1b]^{-1})]\}^{-1}+o(1). \tag{31}$$

Доказательство. Из теории матриц следует $R_3=T\Lambda T'$, где T — ортогональная матрица собственных векторов, Λ — диагональная матрица собственных чисел матрицы R_3.

Тогда

$$b_m(t,\alpha)=m^{-1}\,\mathrm{Sp}\left(I\alpha+t\sum_{k=1}^{n_1}\xi_k\xi_k'(n_1-1)^{-1}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{n_2}\Lambda^{1/2}\eta_k\eta_k'(n_2-1)^{-1}\Lambda^{1/2}\right)^{-1}.$$

Введем обозначения

$$\nu_{ij}=t^{1/2}\xi_{ij}(n_1-1)^{-1/2},\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n_1},$$
$$\nu_{ij}=\lambda^{1/2}\eta_{ij}(n_2-1)^{-1/2},\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{n_1+1,n_1+n_2},$$
$$C=(\nu_{ij}),\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n_1+n_2}.$$

Используя формулу (8), имеем

$$m^{-1}\mathbf{M}\,\mathrm{Sp}\,(I\alpha+CC')^{-1}=m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\mathbf{M}\,[\alpha+(d_k,d_k)-(C_k'R_k'C_kd_k,d_k)]^{-1}=$$
$$=m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\mathbf{M}\left[\alpha+\sum_{l=1}^{n_1+n_2}\mathbf{M}\nu_{kl}^2-\sum_{l=1}^{n_1+n_2}\nu_{kl}^2\left(\sum_{i,j=1}^{m}r_{ij}^k\nu_{il}\nu\right)+\varepsilon_k^{(n)}\right]^{-1},$$

где $d_k=(\nu_{k1},\ldots,\nu_{k(n_1+n_2)})$ — k-я вектор-строка матрицы C, C_k — матрица, полученная из матрицы C вычеркиванием k-й строки

$$R_k=(I\alpha+C_kC_k')^{-1}=(r_{ij}^k)_{i,j=1}^m,\qquad \varepsilon_k=\sum_{l=1}^{n_1+n_2}(\nu_{kl}^2-\mathbf{M}\nu_{kk}^2)-$$
$$-(C_k'R_kC_kd_k,d_k)+\sum_{l=1}^{n_1+n_2}\nu_{kl}^2\left(\sum_{j,j\neq k}r_{i,j}^k\nu_{il}\nu_{jl}\right).$$

Далее, используя доказательство теоремы 1, имеем

$$\mathbf{M}r_{kk} = \left[\alpha + \sum_{l=1}^{n_1+n_2} \mathbf{M}\nu_{kl}^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{M}r_{ii}\mathbf{M}\nu_{il}^2\right)^{-1}\right]^{-1} + o(1), \qquad (32)$$

где r_{ij} — элементы матрицы $I\alpha + CC'$.

Из формулы (32) получаем

$$\mathbf{M}r_{kk} = \left[\alpha + \sum_{l=1}^{n_1} tn_1^{-1} \left(1 + tn_1^{-1} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{M}r_{ii}\right)^{-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=n_1+1}^{n_1+n_2} \lambda_k n_2^{-1} \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i n_2^{-1} \mathbf{M}r_{ii}\right)^{-1}\right]^{-1} + o(1) =$$

$$= \left[\alpha + t(1 + tmn_1^{-1} b_m(t, \alpha))^{-1} + \lambda_k \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i n_2^{-1} \mathbf{M}r_{ii}\right)^{-1}\right]^{-1} + o(1).$$

Обозначим

$$a = m^{-1} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mathbf{M}r_{kk} = m^{-1} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left[\alpha + t(1 + tmn_1^{-1} b_m(t, \alpha))^{-1} + \right.$$

$$\left. + \lambda_k \left[1 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i n_2^{-1} \mathbf{M}r_{ii}\right]^{-1}\right]^{-1}.$$

Для a имеем уравнение $(1 + c_2 a) = 1 - c_2 + bc_2 [\alpha + t(c_1 bt + 1)^{-1}]^{-1}$. Тогда $b = m^{-1} \sum_{k=1}^{m} [\alpha + t(1 + tc_1 b)^{-1} + \lambda_k [1 - c_2 + bc_2 (\alpha + t(1 + tc_1 b)^{-1})]]^{-1}$.

Из [8] получаем

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} [m_n^{-1} \operatorname{Sp} Q - m_n^{-1} \mathbf{M} \operatorname{Sp} Q] = 0. \qquad (33)$$

Покажем, что при $t > 0$, $c_1 \neq 1$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \lim_{n\to\infty} \alpha b_m(t, \alpha) = 0. \qquad (34)$$

Из леммы 5 следует

$$0 \leqslant b_m(t, \alpha) \leqslant [\alpha + t[1 + tc_1 b_m(t, \alpha)]^{-1}]^{-1} + O(1).$$

Решая это неравенство относительно $b_m(t, \alpha)$, получаем

$$0 \leqslant b_m(t, \alpha) \leqslant 2[((t(1 - c_1) + \alpha)^2 + 4tc_1\alpha)^{1/2} + t(1 - c_1) + \alpha]^{-1} + O(1).$$

Поэтому при $c_1 \neq 1$ $\lim_{\alpha\downarrow 0} \lim_{n\to\infty} \alpha b_m(t, \alpha) = 0$. Очевидно, что

$$m^{-1} \operatorname{Sp} R_1^{-1} \hat{R}_1 [R_1^{-1/2} \hat{R}_1 R_1^{-1/2} t + R_1^{-1/2} \hat{R}_2 R_1^{-1/2} + I\alpha]^{-1} =$$

$$= \lim_{\beta\downarrow\infty} \int_{\beta}^{\alpha} (\partial/\partial t)\, b_m(t, x)\, dx. \qquad (35)$$

Поэтому, используя это равенство, леммы 4, 5 и пределы (33)—(35), получаем утверждение теоремы 2.

1. *Grenander U., Silverstein J. W.* Spectral analysis of networks with topologies // SIAM J. Appl. Math.— 1977.— **32**.— P. 499—519.
2. *Jonsson D.* Some limit theorems for the eigenvalues of a sample covariance matrix // J. Multivar. Anal.— 1982.— **12**.— P. 1—38.
3. *Wachter K. W.* The strong limits of random spectra for sample matrices of independent elements // Ann. Probab.— 1978.— **6**, N 1.— P. 1—18.
4. *Wachter K. W.* The limiting empirical measure of multiple discriminant ratios // Ann. Statist.— 1980.— **8**.— P. 937—957.

5. *Yin Y. Q., Bai Z. D., Krishnaiah P. R.* Limiting behavior of the eigenvlaues of a multivariate F matrix // J. Multivar. Anal.— 1983.— **13**.— P. 508—516.
6. *Yin Y. Q., Krishnaiah P. R.* A limit theorem for the eigenvalues of product of two random matrices // Ibid.— P. 489—507.
7. *Гирко В. Л.* Случайные матрицы.— Киев : Вища шк., 1975.— 448 с.
8. *Гирко В. Л.* Теория случайных детерминантов.— Киев : Вища шк., 1980.— 338 с.

Киев. ун-т

Получено 28.11.85,
после доработки — 09.02.87