УДК 517.5

Н. В. Зорий

Модули семейств поверхностей и гриновы емкости конденсаторов

Изучены соотношения между гриновой емкостью конденсатора и 2-модулем семейства замкнутых гиперповерхностей, разделяющих его пластины.

Вивчені співвідношення між гріновою ємністю конденсатора і 2-модулем сім'ї замкнених гіперповерхонь, які розділяють його пластини.

Пусть $\mathbb{R}^p$ — евклидово пространство размерности $p \geqslant 3$; $D \subset \mathbb{R}^p$ — фиксированная область, которая, в частности, может совпасть со всем $\mathbb{R}^p$; E^+, $E^- \subset D$ — непустые, непересекающиеся и замкнутые в D множества, причем E^+ — компакт. Тройку $E = (E^+, E^-; D)$ назовем конденсатором в D.

Обобщенную функцию Грина открытого множества $G \subset \mathbb{R}^p$ [1, 2] обозначим $g_G(x, y)$, а потенциал и энергию борелевского заряда ν в G относительно ядра $g_G(x, y)$ — соответственно $\mathcal{U}^{\nu}_{g_G}(x)$ и $\mathcal{I}_{g_G}(\nu)$. Пусть, далее, $C_{g_G}(Q)$ — гринова емкость борелевского множества $Q \subset G$, а $W_{g_G}(Q) := 1/C_{g_G}(Q)$. Если $G = \mathbb{R}^p$, то $g_G(x, y) \equiv |x - y|^{2-p}$ и упомянутые гриновы характеристики зарядов и множеств совпадают с соответствующими ньютоновыми характеристиками. Для множества G, равного D, индекс G в принятых обозначениях будем опускать.

Пусть $\mathfrak{N}^1(E)$ — класс всех борелевских зарядов ν в D с жордановым разложением $\nu = \nu^+ - \nu^-$, в которых ν^+ и ν^- — единичные меры, сосредоточенные соответственно на E^+ и E^-. Положим $V_g(E) := \inf\limits_{\nu \in \mathfrak{N}^1(E)} \mathcal{J}_g(\nu)$. Величину $1/V_g(E)$ назовем гриновой емкостью конденсатора E (ср. с [3]).

В настоящей работе изучены соотношения между гриновой емкостью конденсатора E и 2-модулем семейства замкнутых гиперповерхностей, разделяющих E^+ и E^- в D. Подобные вопросы исследовались, например, в [4—6]. Приведем необходимые определения.

Пусть H — некоторое множество k-мерных липшицевых поверхностей h в $\mathbb{R}^p$. Говорят, что f — допустимая для H метрика, если $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ — неотрицательная борелевская функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_h f d\sigma_h \geqslant 1$ $\forall h \in H$ ($d\sigma_h$ — элемент поверхностной меры на h). Пусть $J(H)$ — совокупность всех допустимых для H метрик. Величину

$$M_2(H) := \inf_{f \in J(H)} \int\limits_{\mathbb{R}^p} f(x)^2 \, dx$$

называют 2-модулем семейства H.

Пусть $\overline{\mathbb{R}^p}$ — одноточечная компактификация пространства $\mathbb{R}^p$, а $A, B \subset \overline{\mathbb{R}^p}$ — непустые множества, причем B содержит в себе бесконечно удаленную точку (может быть, в качестве изолированной). Пусть, далее, $h \subset \mathbb{R}^p$ — замкнутая гиперповерхность, т. е. [4] компактная $(p-1)$-мерная липшицева поверхность, не обязательно связная. Будем говорить, что h отделяет A от B, если множество $\overline{\mathbb{R}^p} \setminus h$ представимо в виде объединения двух непересекающихся открытых (в $\overline{\mathbb{R}^p}$) множеств Θ_A и Θ_B, где $\Theta_A \supset A$, $\Theta_B \supset B$, причем все компоненты связности (ограниченного) множества Θ_A отделимы. Совокупность (может быть, пустую) всех замкнутых гиперповерхностей $h \subset \mathbb{R}^p$, отделяющих A от B, обозначим $H(A, B)$.

Пусть $E = (E^+, E^-; D)$ — конденсатор в D, $\Omega := \overline{\mathbb{R}^p} \setminus D$. Скажем, что h разделяет E^+ и E^- в D, если $h \subset D$ и $h \in H(E^+, E^- \cup \Omega) \cup H(E^-, E^+ \cup \Omega)$. Совокупность всех замкнутых гиперповерхностей, разделяющих E^+ и E^- в D, обозначим H_E.

Для множества $Q \subset D$ обозначим через $\check{Q}$ его приведенное ядро [1], т. е. множество всех тех $x \in Q$, для каждой из которых всякая ее окрестность в D пересекается с Q по множеству ненулевой гриновой (или, что то же самое, ненулевой ньютоновой) емкости. Если $C_g(Q) = 0$, то $\check{Q} = \varnothing$, и наоборот. Приведенное ядро замкнутого множества замкнуто.

Пусть Z_+ — объединение всех тех компонент связности множества $D \setminus \check{E}^-$, которые имеют непустое пересечение с $\check{E}^+$.

Теорема. *Справедливо неравенство*

$$V_g(E) \geqslant a_p M_2(H_E), \tag{1}$$

где a_p — умноженная на $p-2$ площадь единичной гиперсферы в $\mathbb{R}^p$. Знак $>$ в соотношении (1) *верен в том и только в том случае, когда выполнена совокупность условий:*

а) $C_g(E^+) > 0$;

б) *множество E^- некомпактно в D*;

в) $C_g(E^-) < \infty$, $C_g(Z_+) = \infty$.

Доказательство. Приведем вначале необходимые для доказательства результаты из [7].

Пусть $V_g(E) < \infty$ (или, что равносильно, $C_g(E^+) C_g(E^-) > 0$). Тогда существует (единственный) заряд $\lambda \equiv \lambda_E$, являющийся сильным пределом всякой последовательности $\{\nu_k\} \subset \mathfrak{N}^1(E)$ с $\lim_{k\to\infty} \mathcal{I}_g(\nu_k) = V_g(E)$. Заряд $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ назовем экстремальным. Меры λ^+ и λ^- имеют конечные гриновы энергии и сосредоточены соответственно на E^+ и E^-, причем

$$\lambda^+(D) = 1, \ \lambda^-(D) \leqslant 1. \tag{2}$$

Пусть $(\nu_1, \nu_2) \equiv (\nu_1, \nu_2)_g$ — взаимная гринова энергия зарядов ν_1 и ν_2, определенных на борелевских множествах из D, а $\gamma_Q \equiv \gamma_Q^g$ — гринова равновесная мера множества $Q \subset D$ [1, 2]. Справедливы соотношения [7]

$$(\lambda^-, \lambda) \leqslant \mathcal{U}_g^\lambda(x) \leqslant (\lambda^+, \lambda) \qquad \forall x \in D, \tag{3}$$

$$\mathcal{U}_g^\lambda(x) = \begin{cases} (\lambda^+, \lambda) \text{ квазивсюду на } E^+; \\ (\lambda^-, \lambda) \text{ квазивсюду на } E^-, \end{cases} \tag{4}$$

$$-\infty < (\lambda^-, \lambda) \leqslant 0 \leqslant (\lambda^+, \lambda) < \infty, \tag{5}$$

$$(\lambda^+, \lambda) = [1 - (\lambda^-, \gamma_{E^+})]/C_g(E^+),$$

$$(\lambda^-, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } C_g(E^-) = \infty, \\ -[1 - (\lambda^+, \gamma_{E^-})]/C_g(E^-), & \text{если } C_g(E^-) < \infty. \end{cases} \tag{6}$$

Кроме приведенных утверждений, в работе [7] получены также необходимые и достаточные условия на геометрию E, при которых величина $V_g(E)$ достигается в классе $\mathfrak{N}^1(E)$ (т. е. $\lambda \in \mathfrak{N}^1(E)$; ср. с (2)). Здесь мы только заметим, что равенство $\lambda^-(D) = 1$, очевидно, имеет место в случае компактности E^-.

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Неравенство $(\lambda^-, \lambda) < 0$ верно в том и только в том случае, когда выполняются условия $C_g(E^-) < \infty$ и $C_g(Z_+) = \infty$.*

Доказательство. Верны соотношения $\lambda^+(Z_+) = 1$, $\lambda^+(R) > 0$, где R — произвольная компонента связности Z_+. Первое соотношение следует из свойства C-абсолютной непрерывности меры λ^+. Докажем второе утверждение. Пусть, от противного, верно $\lambda^+(R) = 0$. Тогда потенциал $\mathcal{U}_g^\lambda(x)$ гармоничен в R. Но $C_g(R \cap E^+) > 0$, поэтому в силу (4) существует точка $x_0 \in R$ такая, что $\mathcal{U}_g^\lambda(x_0) = (\lambda^+, \lambda)$. Отсюда и из (3) тогда имеем $\mathcal{U}_g^\lambda(x) \equiv (\lambda^+, \lambda)$ в R, что (ввиду неравенства $(\lambda^+, \lambda) > (\lambda^-, \lambda)$ и известных свойств непрерывности потенциалов) невозможно.

Пусть $C_g(E^-) \in (0, \infty)$, S — компонента связности $D \setminus \check{E}^-$. Тогда $\mathcal{U}_g^{\gamma_{E^-}}(x) \leqslant 1$ $\forall x \in D$; $\mathcal{U}_g^{\gamma_{E^-}}(x) < 1$ $\forall x \in S$, если $C_g(S) = \infty$ и $\mathcal{U}_g^{\gamma_{E^-}}(x) = 1$ $\forall x \in S$, если $C_g(S) < \infty$. Отсюда и из предыдущего получаем $(\lambda^+, \gamma_{E^-}) = \lambda^+(D) = 1$, если $C_g(Z_+) < \infty$, и $(\lambda^+, \gamma_{E^-}) < 1$, если $C_g(Z_+) = \infty$. Учитывая равенства (6), убеждаемся в справедливости леммы 1.

Докажем неравенство (1). Можно предположить, что $V_g(E) < \infty$. Покажем, что

$$\int_h \rho d\sigma_h \geqslant 1 \quad \forall h \in H_E, \tag{7}$$

где $\rho(x) := |\operatorname{grad} \mathcal{U}_g^\lambda(x)|/a_p$. Метрика ρ определена всюду в $D \setminus (E^+ \cup E^-)$ и почти всюду в D [1].

Пусть $h \in H(E^+, E^- \cup \Omega)$, Θ_i, $i \in I \subset \mathbb{N}$, — все компоненты связности (ограниченного) множества Θ_{E^+}, h_i — граница Θ_i, $\partial/\partial n$ — производная по направлению внутренней к Θ_{E^+} нормали. Пользуясь отделимостью Θ_i, запишем цепочку соотношений

$$\int_h \rho d\sigma_h = \sum_{i\in I}\int_{h_i}\rho d\sigma_h \geqslant \frac{1}{a_p}\sum_{i\in I}\int_{h_i}\frac{\partial \mathcal{U}_g^\lambda}{\partial n}d\sigma_h = \sum_{i\in I}\lambda^+(\Theta_i) = \lambda^+(D),$$

откуда в силу (2) получаем (7). Пусть теперь $h\in H(E^-, E^+\cup\Omega)$. Тогда E^- — компакт, иначе не существовало бы открытого множества, содержащего внутри себя Ω и не имеющего общих точек с E^-. Далее рассуждения аналогичны.

Следовательно, $\rho\in J(H_E)$. Пользуясь известным представлением интеграла энергии $\mathcal{I}_g(\lambda)$ через интеграл Дирихле [1, 2] и равенством $\mathcal{I}_g(\lambda) = V_g(E)$, отсюда находим

$$M_2(H_E)\leqslant\int_D \rho(x)^2\,dx = \frac{1}{a_p}\mathcal{I}_g(\lambda) = \frac{1}{a_p}V_g(E).$$

Прежде чем переходить к непосредственному доказательству остальных утверждений теоремы, сделаем следующие замечания.

Пусть $G\subset D$ — открытое множество, μ — конечная финитная в G мера. Через $\mu'\equiv\beta^g_{D\setminus G}\mu$ обозначим решение гриновой задачи выметания меры μ на замкнутое в D множество $D\setminus G$ в классе C-абсолютно непрерывных мер [2, 8]. Тогда верны соотношения

$$g_G(x,y) = g(x,y) - \mathcal{U}_g^{\varepsilon'_y}(x),\quad x\in\mathbb{R}^p,\ y\in G,$$

$$\mathcal{U}^\mu_{g_G}(x) = \mathcal{U}^\mu_g(x) - \mathcal{U}^{\mu'}_g(x),\quad x\in\mathbb{R}^p, \tag{8}$$

$$\mathcal{I}_{g_G}(\mu) = \mathcal{I}_g(\mu) - \mathcal{I}_g(\mu') = \mathcal{I}_g(\mu-\mu') < \mathcal{I}_g(\mu-\omega), \tag{9}$$

где ε_y — мера Дирака в точке y, ω — произвольная сосредоточенная на $D\setminus G$ мера, отличная от μ'.

Пусть, далее, $K\subset G$ — компакт, $H(K, \overline{\mathbb{R}^p}\setminus G)$ — совокупность замкнутых гиперповерхностей, отделяющих K от $\overline{\mathbb{R}^p}\setminus G$. Тогда

$$a_p M_2(H(K,\overline{\mathbb{R}^p}\setminus G)) = W_{g_G}(K). \tag{10}$$

В случае, когда G — ограниченная односвязная область, равенство (10) приведено в [4]. Как показывает анализ рассуждений в [4], при определении отделяющих гиперповерхностей, принятом в настоящей работе, эти ограничения на открытое множество G несущественны.

Пусть $V_g(E)=\infty$. Тогда справедливо одно из двух: либо 1) $C_g(E^+)=0$, либо 2) $C_g(E^+)>0$, $C_g(E^-)=0$. Пусть верно первое. Тогда $M_2(H_E)\geqslant M_2(H(E^+, E^-\cup\Omega))=\infty$ и в соотношении (1) имеет место знак равенства. Пусть верно второе. Тогда справедливы соотношения $M_2(H_E)\geqslant M_2(H(E^-, E^+\cup\Omega))=\infty$ в случае компактности E^- и соотношения $M_2(H_E) = M_2(H(E^+, E^-\cup\Omega))<\infty$ — в противном случае. Таким образом, при условии $V_g(E)=\infty$ знак $>$ в (1) имеет место тогда и только тогда, когда E^- некомпактно в D и верно 2). Это доказывает теорему в случае $V_g(E)=\infty$.

Всюду далее будем предполагать, что $V_g(E)<\infty$.

Лемма 2. *Следующие утверждения равносильны:*

$$V_g(E) = W_{g_{D\setminus E^-}}(E^+), \tag{11}$$

$$(\lambda^-,\lambda) = 0. \tag{12}$$

Доказательство. В силу (9) верна цепочка соотношений

$$V_g(E) = \mathcal{I}_g(\lambda^+-\lambda^-)\geqslant\mathcal{I}_g(\lambda^+-\beta^g_{E^-}\lambda^+) = \mathcal{I}_{g_{D\setminus E^-}}(\lambda^+)\geqslant W_{g_{D\setminus E^-}}(E^+).$$

Из нее видим, что равенство (11) верно тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\lambda^- = \beta^g_{E^-}\lambda^+, \tag{13}$$

$$\mathcal{I}_{g_{D\setminus E^-}}(\lambda^+) = W_{g_{D\setminus E^-}}(E^+). \tag{14}$$

Но утверждения (12) и (13) равносильны, что следует из (4). Покажем, что равенство (14) необходимо для выполнения (13). Учитывая (4) и (8), из равенства (13) находим

$$\mathcal{U}^{\lambda^+}_{g_{D\setminus E^-}}(x) = \mathcal{U}^{\lambda^+}_g(x) - \mathcal{U}^{\beta^g_{E^-}\lambda^+}_g(x) = \mathcal{U}^{\lambda}_g(x) = (\lambda^+, \lambda)$$

квазивсюду на E^+. Отсюда в силу известного свойства гриновых равновесных мер [2] получаем (14). Лемма 2 доказана.

В силу равенства $E^- \cup \Omega = \overline{\mathbb{R}^p} \setminus (D \setminus E^-)$ из (10) находим

$$a_p M_2(H_E) \geqslant a_p M_2(H(E^+, E^- \cup \Omega)) = W_{g_{D\setminus E^-}}(E^+). \tag{15}$$

Пусть верно (12). Из соотношений (11) и (15) получаем

$$a_p M_2(H_E) \geqslant V_g(E). \tag{16}$$

Аналогичным образом убеждаемся в справедливости (16) в случае, когда E^- компактно и $(\lambda^+, \lambda) = 0$.

Пусть выполнены условия б) и в) теоремы. Из условия б) находим $H_E = H(E^+, E^- \cup \Omega)$, а из в) — неравенство $(\lambda^-, \lambda) < 0$ (см. лемму 1). Отсюда в силу леммы 2 и соотношений (15) получаем $a_p M_2(H_E) < V_g(E)$, что и требовалось.

Для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости (16) в случае, когда E^- компактно и $(\lambda^+, \lambda)(\lambda^-, \lambda) \neq 0$. Тогда $(\lambda^+, \lambda) > 0$, $(\lambda^-, \lambda) < 0$.

Не ограничивая общности доказательства, будем считать множества иррегулярных точек «пластин» E^+ и E^- пустыми (такой конденсатор E назовем регулярным). Если E — не регулярный конденсатор, рассмотрим последовательность $\{E_k = (E_k^+, E_k^-; D)\}$ регулярных конденсаторов с компактными пластинами, удовлетворяющих условиям $E_1^+ \supset E_2^+ \supset \ldots, \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k^+ = E^+$, $E_1^- \supset E_2^- \supset \ldots, \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k^- = E^-$, и воспользуемся равенствами

$$V_g(E) = \lim_{k\to\infty} V_g(E_k), \quad M_2(H_E) = \lim_{k\to\infty} M_2(H_{E_k}).$$

(Первое равенство получается известными методами (см., например, [9]), а второе непосредственно следует из теоремы 2.5.1 работы [6].)

Тогда равенства (4) верны соответственно для всех $x \in E^+$ и для всех $x \in E^-$, а потенциал $\mathcal{U}^\lambda_g(x)$ непрерывен в D. Следовательно, множество $U_0 := \{x \in D : \mathcal{U}^\lambda_g(x) = 0\}$ замкнуто в D и лежит в $D \setminus (E^+ \cup E^-)$, а каждая компонента связности S_i открытого множества $D \setminus U_0$ имеет непустое пересечение либо только с E^+, либо только с E^-. Пусть U_+ (аналогично U_-) — объединение всех тех S_i, которые имеют непустое пересечение с E^+ (соответственно с E^-). Тогда $U_0 \cup U_+ \cup U_- = D$, $U_+ \cap U_- = \varnothing$, $E^+ \subset U_+$, $E^- \subset U_-$.

Лемма 3. $(\lambda^+, \lambda) = W_{g_{U_+}}(E^+)$.

Доказательство. Положим $\mu := \beta^g_{U_0}\lambda^+$. Мера μ имеет конечную гринову энергию, а ее гринов потенциал $\mathcal{U}^\mu_g(x)$ μ-почти всюду равен

$\mathcal{U}_g^{\lambda^-}(x)$ (ведь на U_0 верно $\mathcal{U}_g^{\lambda^+}(x) = \mathcal{U}_g^{\lambda^-}(x)$). Применяя к мере μ и неотрицательной супергармонической функции $\mathcal{U}_g^{\lambda^-}(x)$ принцип мажорирования для мер с конечной гриновой энергией, получаем

$$\mathcal{U}_g^{\mu}(x) \leqslant \mathcal{U}_g^{\lambda^-}(x) \qquad \forall x \in D. \tag{17}$$

С другой стороны, функция $f(x) := \mathcal{U}_g^{\mu}(x) - \mathcal{U}_g^{\lambda^-}(x)$ гармонична в U_+ и, как легко видеть, удовлетворяет там условиям обобщенного принципа минимума с минорантой $h(x) \equiv 0$. Следовательно, $f(x) \geqslant 0 \ \forall x \in U_+$. Соединяя полученное неравенство с (17), имеем $\mathcal{U}_g^{\mu}(x) = \mathcal{U}_g^{\lambda^-}(x) \ \forall x \in U_+$. Учитывая соотношения (4) и (8), отсюда находим

$$\mathcal{U}_{g_{U_+}}^{\lambda^+}(x) = \mathcal{U}_g^{\lambda^+}(x) - \mathcal{U}_g^{\mu}(x) = \mathcal{U}_g^{\lambda}(x) = (\lambda^+, \lambda) \qquad \forall x \in E^+.$$

Следовательно, искомое утверждение справедливо.

Аналогичное к лемме 3 утверждение для E^- имеет вид $|(\lambda^-, \lambda)| = W_{g_{U_-}}(E^-)$. Соединяя эти равенства, получаем

$$V_g(E) = W_{g_{U_+}}(E^+) + W_{g_{U_-}}(E^-). \tag{18}$$

Заметим, что $H(E^+, \overline{\mathbb{R}^p} \setminus U_+) \cup H(E^-, \overline{\mathbb{R}^p} \setminus U_-) \subset H_E$, так как

$$\overline{\mathbb{R}^p} \setminus U_+ \supset E^- \cup \Omega, \quad \overline{\mathbb{R}^p} \setminus U_- \supset E^+ \cup \Omega.$$

Поскольку U_+ и U_- — непересекающиеся множества, в силу известных свойств модулей находим

$$M_2(H_E) \geqslant M_2(H(E^+, \overline{\mathbb{R}^p} \setminus U_+)) + M_2(H(E^-, \overline{\mathbb{R}^p} \setminus U_-)). \tag{19}$$

Из соотношений (19), (10) и (18) имеем (16). ▪

Теорема доказана. Из ее доказательства и замечания в [4] видно, что утверждение теоремы не изменится, если в определении H_E условие липшицевости поверхности h заменить условием аналитичности. Заметим также, что если гринова емкость конденсатора E строго положительна и хотя бы одно из условий б) или в) не выполнено, то метрика $|\operatorname{grad} U_g^{\lambda}(x)|/a_p$ экстремальна в проблеме модуля для H_E.

Из теоремы и [9] (теорема 3) получаем такое следствие.

Следствие. *Пусть* $D = \mathbb{R}^p$, $E = (E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$ — *конденсатор с компактными в* $\mathbb{R}^p$ *пластинами* E^+ *и* E^-, $\Gamma_2(E)$ — *его 2-емкость* [5]. *Тогда*

$$\Gamma_2(E) = 1/M_2(H_E). \tag{20}$$

Заметим, что равенство (20) хорошо известно для E с неограниченным E^- [4, 5].

1. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука, 1966.— 515 с.
2. *Брело М.* Основы классической теории потенциала.— М. : Мир, 1964.— 212 с.
3. *Anderson G. D., Vamanamurthy M. K.* The newtonian capacity of a space condenser // Indiana Univ. Math. J.— 1985.— 34, N 4.— P. 753—776.
4. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta math.— 1957— 98, N 3-4.— P. 171—219.
5. *Ziemer W. P.*, Extremal length and p-capacity // Mich. Math. J. — 1969. — 16, N 1.— P. 43—51.
6. *Ziemer W. P.* Extremal length and conformal capacity // Trans. Amer. Math. Soc.— 1967.— 126, N 3.— P. 460—473.
7. *Зорий Н. В.* О существовании зарядов с минимальной гриновой энергией для пространственных конденсаторов.— Киев, 1987.— 23 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87. 52).
8. *Frostman O.* Sur les fonctions surharmoniques d'ordre fractionnaire // Ark. mat., astron., fys.— 1939.— 26A, N 16.
9. *Зорий Н. В.* Функциональные характеристики пространственных конденсаторов: их свойства, соотношения между ними // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 5.— С. 565—573.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 01.04.88