УДК 517.5

В. П. Моторный

Исследования днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул

Приводится обзор результатов по экстремальным задачам теории квадратур, полученных математиками, научная деятельность которых связана с Днепропетровским университетом и, в частности, с работой научного семинара, которым на протяжении многих лет руководил Н. П. Корнейчук.

Приводиться огляд результатів з екстремальних задач теорії квадратур, одержаних математиками, наукова діяльність яких пов'язана з Дніпропетровським університетом і, зокрема, з роботою наукового семінару, яким на протязі багатьох років керував М. П. Корнійчук.

1. Введение. Развитие методов численного анализа привело к следующей экстремальной задачи теории квадратур. В пространстве C^{r-1} $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций задан некоторый класс H. Определенный интеграл от функции $f \in H$ вычисляется при помощи квадратурной суммы

$$L(f; X, P) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k), \tag{1}$$

где $0 \leqslant \rho \leqslant r-1$, $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqslant 1$, p_{kl} произвольны. Погрешность $R(f; X, P)$ вычисления интеграла определяется по квадратурной формуле

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f; X, P), \tag{2}$$

где $X = \{x_k\}$ — вектор узлов, $P = \{p_{kl}\}$ — вектор коэффициентов, $f^{(0)}x = f(x)$. Через A обозначим множество пар векторов (X, P), которое может быть любым или удовлетворять некоторым условиям, определяющим свойства квадратурной формулы (2). Величина

$$R(H, X, P) = \sup_{f \in H} |R(f; X, P)|$$

определяет наибольшую погрешность квадратурной формулы (2) на функциях класса H. Требуется найти величину

$$\mathscr{E}_m^{\rho}(H) = \inf_{(X, P) \in A} R(H; X, P),$$

а также указать (если они существуют) векторы узлов $X^* = \{x_k^*\}$ и коэффициентов $P^* = \{p_{kl}^*\}$, для которых точная нижняя грань достигается. Квадратурная формула (2) с узлами x_k^* и коэффициентами p_{kl}^* называется оптимальной или наилучшей среди всех таких квадратурных формул на классе H.

Постановка этой задачи и первые основополагающие результаты принадлежат С. М. Никольскому [1—3], монография которого «Квадратурные формулы» несомненно повысила интерес к экстремальным задачам теории квадратур. С. М. Никольский [1] предложил метод, сводящий решение экстремальной задачи теории квадратур к минимизации нормы, определяющейся выбором класса H, некоторой кусочно-полиномиальной функции — как теперь называют моносплайна степени r и дефекта $\rho + 2$. Для малых r и $\rho = 0$ этот метод, наверное, специалистам по вычислительной математике был известен (см., например, [4]).

Актуальность, сложность, связь экстремальных задач теории квадратур с константными задачами теории приближений, проявляющаяся в характере методов исследования, с теорией сплайн-функций привлекли внимание Н. П. Корнейчука, который, начиная с 60-х годов, стимулировал развитие этого направления в Днепропетровской школе теории приближения. Отметим, что основателем этой школы является С. М. Никольский.

Н. П. Корнейчуку, его ученикам и коллегам — сотрудникам Днепропетровского университета — принадлежит ряд существенных результатов по теории оптимизации квадратурных формул. Цель настоящей статьи — дать обзор этих исследований. Приведем некоторые основные результаты, полученные участниками научного семинара кафедры теории функций Днепропетровского университета. Н. П. Корнейчук с 1963 по 1974 г. руководил этим семинаром и до настоящего времени не теряет тесной связи с кафедрой теории функций Днепропетровского университета, продолжая оказывать влияние на тематику и результативность работы семинара.

2. Начало исследований. Введем некоторые определения. Через W^rL_p обозначим класс функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную $r-1$ порядка, r-я производная которых удовлетворяет условию $\int\limits_0^1 |f^{(r)}(x)|^p dx \leqslant 1$ при $1 \leqslant p < \infty$, а при $p = \infty$ почти всюду $|f^{(r)}(x)| \leqslant 1$. Соответствующие классы периодических функций обозначим символом $\widetilde{W}^rL_p$. При этом будем рассматривать случаи, когда период равен 1 или 2π, оговаривая это в каждом конкретном случае.

Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 \ldots < x_m \leqslant 1$. Моносплайном степени r, дефекта $\rho + 2$, порядка m назовем функцию $G_r(t)$, заданную на всей оси, имеющую непрерывную производную порядка $r - \rho - 2$, если $\rho < r - 2$, непрерывную, если $\rho = r - 2$, и совпадающую на интервалах $(-\infty, x_1)$, (x_k, x_{k+1}), $k = 1, 2, \ldots, m-1$, (x_m, ∞) с многочленами степени r, у которых коэффициент при t^r равен 1. Точки x_k называются узлами моносплайна. Через $\mathcal{A}_{mr}^{\rho}$ обозначим множество моносплайнов, которые на интервалах $(-\infty, x_1)$, (x_m, ∞) соответственно равны t^r и $(t-1)^r$. Любой моносплайн $G_r \in \mathcal{A}_{mr}^{\rho}$ можно представить в виде

$$G_r(t) = (t-1)^r - (-1)^r \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} \frac{r!}{(r-l-1)!} p_{kl} K_{r-l}(x_k - t). \qquad (3)$$

где $K_\nu(t) = t^{\nu-1}$, если $t \geqslant 0$, и $K_\nu(t) = 0$, если $t \leqslant 0$, а коэффициенты p_{kl} моносплайна такие, что $G_r(t) = t^r$ для $t < x_1$.

Через $\widetilde{\mathcal{A}}_{mr}^{\rho}$ обозначим множество 1-периодических моносплайнов с узлами в точках $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 1$, которые принадлежат классу $C^{r-\rho-2}$, если $\rho \leqslant r-2$, и на интервалах (x_k, x_{k+1}) совпадают с алгебраическими многочленами степени r, у которых коэффициент при t^r равен 1. Любой моносплайн $G_r \in \widetilde{\mathcal{A}}_{mr}^{\rho}$ можно представить в виде

$$G_r(t) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} \frac{(-1)^l r!}{(r-l)!} p_{kl} B_{r-l}^{*}(t - x_k), \qquad (4)$$

где $B_\nu^{*}(t)$ — многочлены Бернулли (см., например, [4]), а $\sum\limits_{k=1}^{m} p_{k0} = 1$.

Не случайно узлы и коэффициенты квадратурной суммы (1) и узлы и коэффициенты моносплайнов в представлениях (3) и (4) обозначены одними и теми символами. С. М. Никольский установил, что погрешность квадратурной формулы (2), точной на многочленах степени $r-1$ (соответственно точной на константах), на функциях класса W^rL_p (соответственно класса $\widetilde{W}^rL_p$), выражается через $G_r \in \mathcal{A}_{mr}^{\rho}$ (соответственно через $G_r \in \widetilde{\mathcal{A}}_{mr}^{\rho}$)

по формуле

$$R(f;\, X, P) = \frac{(-1)^r}{r} \int\limits_0^1 G_r(t)\, f^{(r)}(t)\, dt, \tag{5}$$

причем узлы и коэффициенты моносплайнов G_r совпадают с узлами и коэффициентами квадратурной суммы (1) и

$$R(W^r L_p;\, X, P) = \frac{1}{r!} \| G_r \|_{L_q}, \quad G_r \in \mathcal{A}^{\rho}_{mr}, \tag{6}$$

где p и q взаимно сопряжены. В периодическом случае

$$R(\tilde{W}^r L_p;\, X, P) = \frac{1}{r!} \| G_r \|_{L_q}, \quad G_r \in \tilde{\mathcal{A}}^{\rho}_{mr}. \tag{7}$$

С другой стороны, взяв любой моносплайн G_r из $\mathcal{A}^{\rho}_{mr}$ с узлами x_k и коэффициентами p_{kl} и построив квадратурную формулу (2) с вектором узлов $X = \{x_k\}$ и вектором коэффициентов $P = \{p_{kl}\}$, получим [3] квадратурную формулу, точную для многочленов степени $r-1$, погрешность которой для любой функции $f \in W^r L_p$ выражается формулой (5), а погрешность на классе $W^r L_p$ — формулой (6). Аналогично, взяв любой моносплайн $G_r \in \tilde{\mathcal{A}}^{\rho}_{mr}$ с узлами x_k и коэффициентами p_{kl} и построив квадратурную формулу (2) с вектором узлов $X = \{x_k\}$ и вектором коэффициентов $P = \{p_{kl}\}$, получим квадратурную формулу, точную на константах, погрешность которой для любой функции $f \in \tilde{W}^r L_p$ выражается формулой (5), а погрешность на классе $\tilde{W}^r L_p$ — формулой (7).

Из равенства (6) и взаимно-однозначного соответствия между множеством квадратурных формул вида (2), точных на многочленах степени $r-1$, и множеством моносплайнов $\mathcal{A}^{\rho}_{mr}$ следует равенство

$$\mathcal{E}^{\rho}_m (W^r L_p) = \inf_{G_r \in \mathcal{A}^{\rho}_{mr}} \frac{1}{r!} \| G_r \|_{L_q}. \tag{8}$$

Соответственно в периодическом случае получаем равенство

$$\mathcal{E}^{\rho}_m (\tilde{W}^r L_p) = \inf_{G_r \in \tilde{\mathcal{A}}^{\rho}_{mr}} \frac{1}{r!} \| G_r \|_{L_q}. \tag{9}$$

Редукция задачи об отыскании наилучшей квадратурной формулы, выраженная соотношениями (8), (9) в равной степени содействовала как изучению сплайн-функций, так и решению экстремальных задач теории квадратур.

Первые результаты по оптимизации квадратурных формул в Днепропетровском университете были получены учеником Н. П. Корнейчука Н. Е. Лушпаем [5]. Им была найдена наилучшая квадратурная формула вида (2) для $\rho = r-1$, $r = 1, 2, \ldots$, на классах $W^r L_p$ и $W^r_0 L_p = \{f \in W^r L_p,\ f^k(0) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, r-1\}$ и для $\rho = r-2$, $r = 2, 4, \ldots$, на классах $W^r_0 L_p$.

Задача о наилучшей квадратурной формуле вида (2) для классов $W^r_0 L_p$ при $\rho = 0$ и $r = 1, 2$, а также при $\rho = r-2$, r — четное, $p = \infty$, решена С. М. Никольским [1], а для $p = 1$ — А. И. Киселевым (см. [3], § 14). Одновременно с Н. Е. Лушпаем и независимо общий случай этой задачи $1 \leqslant p < \infty$ при $\rho = r-1$, $r = 1, 2, \ldots$, и $\rho = r-2$, $r = 2, 4, \ldots$, рассмотрен в работах [6, 7]. В периодическом случае Н. Е. Лушпай получил следующий результат.

Теорема 1 [18]. *Среди всех квадратурных формул* (2) *при* $\rho = r-1$, $r = 1, 2, \ldots$, *и* $\rho = r-2$, $r = 2, 4, \ldots$, *наилучшей для класса* $\tilde{W}^r L_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *является формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{\left[\frac{\rho}{2}\right]} \frac{R_{rq}^{(r-2l-1)}(1)}{(2m)^{2l+1}} f^{(2l)}\left(\frac{k-1}{m}\right) + R(f),$$

где $R_{rq}(t)$ — алгебраический многочлен степени r, с коэффициентом при степени t^r равным 1, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве L_q. При этом

$$\mathcal{E}_m^{\rho}(\tilde{W}^r\mathcal{L}_p) = R_{rq}(1)/r!\,\sqrt[q]{rq+1}\,(2m)^r.$$

Однако первым существенным успехом можно считать результаты, полученные Н. П. Корнейчуком и Н. Е. Лушпаем [9]. В этой работе решена задача о наилучшей квадратурной формуле вида (2) при $\rho = r-2$ и $\rho = r-3$ для классов W^rL_1, $W_0^rL_1$ и $\tilde{W}^rL_1$ при $r = 3, 5, \ldots$, доказана единственность оптимальной квадратурной формулы (в периодическом случае единственность с точностью до сдвига всех узлов на одну и ту же величину), получена характеристика моносплайнов из множеств $\mathcal{A}_{mr}^{r-2}$ и $\tilde{\mathcal{A}}_{mr}^{r-2}$, наименее уклоняющихся от нуля в пространстве C (см. также [3], теоремы Д. 2, Д. 3, Д. 6, Д. 7), акцентрировано внимание на вопросе существования оптимальной квадратурной формулы. Исследования потребовали принципиально новых методов нахождения моносплайнов, наименее уклоняющихся от нуля в пространстве C, так как в рассматриваемых случаях (в отличие от указанных выше) моносплайны непрерывны или непрерывно дифференцируемы. Эти методы удалось применить [10, 11] и для класса $\tilde{W}^rL_2$.

Теорема 2. *Наилучшая на классе $\tilde{W}^rL_2$ квадратурная формула вида* (2) *при $\rho = r-2$ и $\rho = r-3$, $r = 3, 5, \ldots$, имеет вид*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{(r-3)/2} \frac{1}{(2m)^{2l+1}}\Bigg[l_r^{(r-2l-1)}(1) - \frac{2}{(2r-1)(r-1)}\,l_{r-1}^{(r-2l-1)}(1)\Bigg] f^{(2l)}\left(\frac{k-1}{m}\right) + R(f),$$

где $l_r(t)$ — многочлен Лежандра степени r. При этом

$$\mathcal{E}_m^{\rho}(\tilde{W}^rL_2) = \frac{r!}{(2r)!}\sqrt{\frac{(r+1)(r+2)}{r(r-1)(2r+1)}}\,\frac{1}{m^r}.$$

Следует отметить также результаты В. М. Алхимовой, которая рассматривала для классов $\tilde{W}^rL_p$ квадратурные формулы типа Маркова

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{l=0}^{r-1}\left(p_{0l}f^{(l)}(0) + p_{ml}f^{(l)}(1)\right) + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}f^{(l)}(x_k) + R(f), \qquad (10)$$

где $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < 1$.

Используя схему рассуждений С. М. Никольского, В. М. Алхимова получила следующий результат [12], независимо полученный также в работе [13].

Теорема 3. *Среди всех квадратурных формул вида* (10) *при $\rho = r-1$, $r = 1, 2, \ldots$, и $\rho = r-2$, r — четное, наилучшей на классе W^rL_p при всех p является единственная формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{r!}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{R_{rq}^{(r-l-1)}(1)}{(2m)^{l+1}}\left[f^{(l)}(0) + f^{(l)}(1)\right] + \frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=0}^{[\rho/2]}\frac{R_{rq}^{(r-2l-1)}(1)}{(2m)^{2l+1}} f^{(2l)}\left(\frac{k}{m}\right) + R(f).$$

При этом

$$\sup_{f\in W^rL_p} R(f) = \frac{R_{rq}(1)}{2^r r!\sqrt[q]{rq+1}\,m^r}.$$

В работе В. М. Алхимовой рассматривались и другие квадратурные формулы с фиксированными узлами на концах промежутка для классов W^rL_1 и W^rL_2. Квадратурные формулы типа Маркова изучались также в работах [14, 15].

3. Оптимизация квадратурных формул путем оценки остатка на функциях, обращающих квадратурную сумму в нуль. Пусть $X = \{x_k\}$ — некоторый вектор узлов. Обозначим через H_X подмножество функций из H таких, что $f^{(l)}(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, l = 0, 1, \ldots, \rho$. Если H можно представить в виде $H = \{f + c \mid f \in H_0,\ c \in R^1\}$, где H_0 — выпуклое, центрально-симметричное, компактное множество из линейного пространства $\mathcal{L}$, то для любого вектора коэффициентов

$$R(H; X, P) = R(H_X;\ X,\ P) = \sup_{f\in H_X}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_m^{\rho}(H) = \inf_X \sup_{f\in H_X}\int_0^1 f(x)\,dx. \tag{11}$$

Многие классы, рассматриваемые в теории квадратур, удовлетворяют указанным выше условиям, в частности им удовлетворяют классы $\tilde{W}^rL_p$, W^1L_p и H^{ω}, $\tilde{W}^rH^{\omega}$, которые мы определим ниже. Вычислить величину, стоящую справа в равенстве (11), в общем случае, наверное, не проще, чем вычислить правые части соотношений (8), (9). Однако в случаях, когда есть веские соображения, позволяющие предположить, что именно квадратурная сумма $L(f;\ X_0,\ P_0)$ оптимально восстанавливает интеграл на классе H, можно попытаться доказать, что для любого вектора узлов X существует функция $f_X \in H_X$ такая, что

$$\int_0^1 f_X(t)\,dt > R(H,\ X_0,\ P_0), \tag{12}$$

конечно, при условии, что и правую часть (12) можно найти.

Заметим также, что редукция экстремальной задачи теории квадратур, предложенная С. М. Никольским, не всегда применима, например, для классов $\tilde{W}^rH^{\omega}$. В этом случае, естественно, необходимо попытаться реализовать приведенную выше схему рассуждений. Такой подход неоднократно использовался при получении порядковых оценок. На перспективность использовать его при получении точных результатов обратил внимание Н. П. Корнейчук в работе [16], в которой получены оптимальные кубатурные (в частности, квадратурные) формулы на классах функций нескольких переменных с заданной мажорантой модуля непрерывности. Сразу же на эту работу отреагировал участник семинара, руководимого Н. П. Корнейчуком, Г. К. Лебедь. Он рассмотрел задачу о наилучшей квадратурной формуле вида

$$\int_{-1}^{1} q(x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k) + R_q(f;\ X,\ P) \tag{13}$$

на классе H^{ω}, где $q(x)$ — неотрицательная, интегрируемая функция, $H^{\omega} = \{f : |f(t_1) - f(t_2)| \leqslant \omega(|t_1 - t_2|),$ где $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности. Г. К. Лебедь [17] показал, что при фиксированном векторе узлов X оптимальной по коэффициентам на классе H^{ω} будет квадратурная формула (13), коэффициенты которой вычисляются по формулам

$$p_k = \int_{\Delta_k} q(x)\,dx, \tag{14}$$

где A_k — множество точек отрезка $[-1, 1]$, лежащих к точке x_k ближе, чем к остальным узлам. При этом

$$R_{qm}(H^{\omega}; X) = \inf_{P} \sup_{f\in H^{\omega}} R_q(f; X, P) = \sum_{k=1}^{m} \int_{A_k} q(x)\,\omega(|x - x_k|)\,dx. \qquad (15)$$

Следовательно, определение оптимальной квадратурной формулы вида (13) сводится к минимизации правой части соотношения (15) по узлам. В работах [17, 18] Г. К. Лебедь рассмотрел некоторые простые случаи минимизации правой части равенства (15).

Множества $A_k = (\tau_k, \tau_{k+1})$, где $\tau_1 = -1$, $\tau_{m+1} = 1$, $\tau = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$, $k = 2, 3, \ldots, m$, и в работе [17] они так и определяются. Введенное выше определение допускает обобщение на случай кубатурных формул. Такое обобщение было получено: В. Ф. Бабенко [19, 20] установил аналог соотношений (14), (15) и кроме того построил асимптотически оптимальные кубатурные формулы для классов функций двух переменных с заданной мажорантой модулей непрерывности. Для класса H^{α} ($H^{\alpha} = H^{\omega}$, если $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$) В. Ф. Бабенко [20] нашел асимптотику погрешности последовательности оптимальных кубатурных формул при условии, что $q(x)$ — неотрицательная, ограниченная, измеримая по Жордану функция. В случае функций одной переменной эта асимптотика имеет вид

$$\mathcal{E}_{qm}(H^{\alpha}) = \inf_{X,P} \sup_{f\in H^{\alpha}} R_q(f; X, P) = \frac{(2m)^{-\alpha}}{\alpha+1}\left(\int_{-1}^{1} q^{\frac{1}{\alpha+1}}(x)\,dx\right)^{\alpha+1} + o\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right). \qquad (16)$$

4. Оптимальные квадратурные формулы для классов периодических функций. Среди всех квадратурных формул вида (2) наибольший интерес представляют квадратурные формулы при $\rho = 0$:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k) + R(f). \qquad (17)$$

Это можно объяснить и их простотой и тем, что не всегда мы имеем информацию о производных функции f. Кроме того, оказывается (см. п. 5), что восстановление (приближенное вычисление) интеграла по информации, определяемой значениями функции, является оптимальным для некоторых классов функций по сравнению с методами, использующими также и информацию о производных при одном и том же числе единиц информации.

Сначала рассмотрим оптимизацию квадратурных формул вида (17) для классов периодических функций, пользуясь общими соображениями п. 3. При этом нам удобно будет рассматривать функции периода 2π и формула (17) примет вид

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k) + R(f). \qquad (18)$$

Возвращаясь к неравенству (12), заметим, что величины $R(H; X_0, P_0)$ легко вычисляются для классов 2π-периодических функций, если вектор узлов X_0 определяется точками $x_k = 2k\pi/m$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, а вектор коэффициентов — числами $p_k = 2\pi/m$ и H — выпуклое, центрально-симметричное множество, содержащее с каждой функцией $f(x)$ функции $f(x) + c$ и $f(x + a)$, где c и a — любые константы. Квадратурная формула, соответствующая указанным векторам X_0 и P_0, имеет вид

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{2\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + R(f) \qquad (19)$$

и называется формулой прямоугольников.

В этом случае [21]

$$R(H; X_0, P_0) = 2\pi\mu_m(H),$$

где $\mu_m(H) = \sup\limits_{f \in H_m} \max\limits_x |f(x)|$, а H_m, $m = 1, 2, \ldots$, — множество функций из H периода $2\pi/m$ со средним значением на периоде равным нулю.

Величины $\mu_m(H)$ и функции, реализующие эту верхнюю грань, для различных классов H вычислены в работах по теории функций, например в работе С. Н. Бернштейна [22], в дополнении С. Б. Стечкина к монографии [23], в работе Н. П. Корнейчука [24]. Так [22],

$$\mu_m(\tilde{W}^r) = \frac{K_r}{m^r}, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

где $\tilde{W}^r = \tilde{W}^r L_\infty$, K_r — константы Фавара.

Пусть $\tilde{W}^r H^\omega$ — класс 2π-периодических функций, у которых $|f^{(r)}(t_1) - f^{(r)}(t_2)| \leqslant \omega(|t_1 - t_2|)$, где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности.

Для класса $\tilde{W}^r H^\omega$ имеет место равенство [24]

$$\mu_m(\tilde{W}^r H^\omega) = \max_t |f_{mr}(t)|, \tag{21}$$

где $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, а $f_{mr}(t)$ — функция из класса $\tilde{W}^r H^\omega$ с периодом $2\pi/m$ и средним значением на периоде равным нулю, у которой r-я производная нечетная и определяется равенствами

$$f_{mr}^{(r)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\omega(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2m}; \\ \dfrac{1}{2}\omega(2\pi/m - 2t), & \dfrac{\pi}{2m} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{m}. \end{cases}$$

Из неравенства С. Б. Стечкина [23, с. 385] следует равенство

$$\mu_m(\tilde{W}^r L) = K_{r-1}/(4m^r), \tag{22}$$

где $\tilde{W}^r L = \tilde{W}^r L_1$, $r = 2, 4, \ldots$.

Из соотношений (19) — (22) получим равенства

$$R(\tilde{W}^r; X_0, P_0) = 2\pi K_r/m^r, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

$$R(\tilde{W}^r H^\omega; X_0, P_0) = 2\pi \max_t |f_{mr}(t)|, \quad r = 1, 3, \ldots, \tag{24}$$

$$R(\tilde{W}^r L; X_0, P_0) = \pi K_{r-1}/(2m^r), \quad r = 2, 4, \ldots. \tag{25}$$

Отметим, что равенства (23), (24) непосредственными вычислениями получены В. Н. Малоземовым [25, 26].

Оптимальность формулы прямоугольников среди всех формул вида (18) на классах $\tilde{W}^r$ при $r = 1, 2$ следует из теоремы 1. Впрочем этот случай прост и мог быть известным ранее. Чтобы установить аналогичный факт для $r = 3$, Бусаровой Т. Н. [27] пришлось преодолеть значительные трудности и провести довольно сложные построения. В общем случае оптимальность формулы прямоугольников среди всех квадратурных формул (18) следует из неравенства (12), равенства (23) и следующей теоремы [21, 28].

Теорема 4. *Пусть при $r = 1, 2, \ldots$ $\mathcal{M}_m^r$ есть множество функций $f \in \tilde{W}^r$, производная которых $f_{(x)}^{(r)}$ на периоде меняет знак $2m$ раз, принимая попеременно значение 1 или -1.*

Тогда для любой системы точек $X = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots x_{m-1} < 2\pi\}$ существует функция $f_X \in \mathcal{M}_m^r$ такая, что $\min f_X(t) = f_X(x_k) = 0$, $k =$

$= 0, 1, \ldots, m-1$, и

$$\int_0^{2\pi} f_X(t)\,dt \geqslant \frac{2\pi K_r}{m^r}. \qquad (26)$$

Метод доказательства существования функции $f_X(t)$ позволяет устанавливать существование моносплайнов и совершенных сплайнов, обращающихся в нуль в заданной системе точек. При этом он работает и тогда, когда метод доказательства, основанный на применении теоремы Борсука, неприменим. Доказательство неравенства (26) проведены с привлечением аппарата Σ-перестановок, разработанного Н. П. Корнейчуком. Попутно были получены оценки норм совершенных сплайнов, которые нашли применение при нахождении поперечников и в вопросах оптимального восстановления функций и функционалов.

Для класса $\tilde{W}^r H^\omega$ оптимальность формулы прямоугольников среди всех квадратурных формул вида (18) получена для $r = 1, 3, \ldots$ в работах [21, 28] и для $r = 2$ в работе [29]. Доказательство основано на использовании равенства (23) и утверждения, аналогичного теоремы 4. В работах [21, 28] найдена наилучшая квадратурная формула вида (18) для класса $\tilde{W}^r L$ (r — четное), а также установлено, что для классов $\tilde{W}^r$, $r > 1$, $\tilde{W}^r H^\omega$, $r = 1, 3, \ldots$, $\tilde{W}^r L$ (r — четное) среди всех квадратурных формул вида

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} p_k f(x_k) + \sum_{k=1}^{m} p_k' f'(x_k) + R(f) \qquad (27)$$

оптимальной является формула прямоугольников.

Как следствие приведенных результатов получаем решение задачи о моносплайнах из множеств $\tilde{\mathcal{A}}_{mr}^0$ и $\tilde{\mathcal{A}}_{mr}^1$, наименее уклоняющихся от нуля в L_1 при всех r и в C при всех четных r'.

Непосредственно решая задачу о минимизации соответствующих норм моносплайнов из множества $\tilde{\mathcal{A}}_{mr}^0$, оптимальность формулы прямоугольников среди всех квадратурных формул вида (18) и (27) для класса $\tilde{W}^r L$ (r — нечетное) доказал А. А. Лигун [30], а для класса $\tilde{W}^r L_p$, $1 < p < \infty$,— ученик Н. П. Корнейчука А. А. Женсыкбаев [31—34].

В работах [31, 32] А. А. Женсыкбаев получил характеристические свойства моносплайнов из $\tilde{\mathcal{A}}_{mr}^0$, наименее уклоняющихся от нуля в L_q (p и q сопряжены) и доказал его единственность при условии его существования (т. е. при условии, что наилучшая квадратурная формула вида (18) для класса $\tilde{W}^r L_p$, $1 < p < \infty$, существует). Существование моносплайна из $\tilde{\mathcal{A}}_{mr}^0$, наименее уклоняющегося от нуля в L_q, доказана в работах [33, 34].

В 1981 г. задача о наилучшей квадратурной формуле вида (2) в общем виде для классов $\tilde{W}^r L_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, была решена болгарским математиком Б. Д. Бояновым [35]. Следует также отметить, что в более ранних работах Н. Е. Лушпая [36, 37] и А. А. Женсыкбаева [38] при решении этой задачи был получен ряд интересных результатов.

5. Оптимизация квадратурных формул для классов $W^r L_p$. Об оптимальных методах восстановления интеграла. В непериодическом случае существование оптимальных квадратурных формул вида (17) для классов $W^r L_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, установлено Б. Д. Бояновым [39, 40], а единственность при $1 < p \leqslant \infty$ — А. А. Женсыкбаевым [41, 42]. В работах А. А. Женсыкбаева [41, 42] получены характеристические свойства вектора узлов $\bar{X} = \{\bar{x}_k\}$ и вектора коэффициентов $\bar{P} = \{p_k\}$ оптимальной квадратурной формулы вида (17), состоящие в следующем.

Рассмотрим систему уравнений

$$\int_0^1 |G_r(t)|^{q-1} K_r(x_k - t) \operatorname{sgn} G_r(t)\, dt + \sum_{n=0}^{r-1} \lambda_n x_k^n = 0, \quad k = 1, \dots m,$$

$$p_k \int_0^1 |G_r(t)|^{q-1} K_{r-1}(x_k - t) \operatorname{sgn} G_r(t)\, dt + \sum_{n=0}^{r-1} \frac{n}{r-1} \lambda_n x_k^{n-1} = 0, \quad k = 1, \dots m, \tag{28}$$

где $G_r(t)$ — моносплайн из множества $\mathcal{A}_{mr}^0$, определяемый по формуле (3) узлами x_k и коэффициентами p_k.

Теорема 5. *Векторы $\overline{X} = \{x_k\}$ и $\overline{P} = \{\overline{p}_k\}$ определяют наилучшую для класса $W^r L_p$, r — любое, $1 < p \leqslant \infty$, квадратурную формулу вида* (17) *тогда и только тогда, когда векторы $\overline{X}$ и $\overline{P}$ определяют моносплайн $G_r \in \mathcal{A}_{mr}^0$ и числа $\overline{x}_k$, $\overline{p}_k$ являются решениями системы уравнений* (28) *такие, что $\overline{x}_1$ (или $\overline{p}_1$) является наименьшим среди первых координат всех решений. При этом*

$$\mathcal{E}_m^0(W^r L_p) = \frac{1}{r!} \left(\frac{rq\overline{\lambda}_0}{1 + rq} \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{29}$$

где $\overline{\lambda}_0$ — решение системы (28), *соответствующее выбранному решению $\{\overline{x}_k\}$, $\{\overline{p}_k\}$. Величина* (29) *имеет порядок $O(m^{-r})$.*

Теорема 6. *Узлы $\overline{x}_k$ и коэффициенты $\overline{p}_k$ наилучшей для класса $W^r L_p$, $r = 1, 2, \dots, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, квадратурной формулы вида* (17) *удовлетворяют соотношениям*

$$\overline{x}_k = 1 - \overline{x}_{m-k+1}, \quad \overline{p}_k = \overline{p}_{m-k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$0 \leqslant 2\overline{x}_1 \leqslant \overline{p}_1 \leqslant \overline{x}_2, \quad 0 \leqslant \overline{p}_k \leqslant \overline{x}_{k+1} - \overline{x}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, m;$$

$$\sum_{k=1}^{[m/2]} \overline{p}_k (1 - 2\overline{x}_k)^{2\nu} = \frac{1}{2\nu + 2}, \quad \nu = 1, 2, \dots, [(r-1)/2];$$

$$(-1)^{\nu+r+m} \left[\frac{1}{4\nu} - \sum_{k=1}^{[m/2]} \overline{p}_k (1 - 2\overline{x}_k)^{2\nu-1} \right] \geqslant 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, [r/2].$$

При $p > 1$ неравенства везде строгие.

Уже из этих теорем следует, что при $r > 3$ узлы и коэффициенты оптимальной квадратурной формулы вида (17) для классов $W^r L_p$ выразить эффективно трудно. Поэтому в непериодическом случае проблема оптимизации квадратурных формул теряет актуальность, если смотреть на эту проблему с точки зрения вычислительной практики, и на первый план выходят интересные задачи теории сплайн-функций. В связи с этим в непериодическом случае представляют интерес квадратурные формулы, на узлы или коэффициенты которых налагаются некоторые условия (или просто фиксируются), облегчающие изучение и их использование. Примером таких квадратурных формул являются квадратурные формулы Маркова, о которых шла речь в п. 2, квадратурные формулы Сарда (см. [3], § 11). К ним можно отнести квадратурные формулы, рассмотренные в работе [43] В. Л. Великиным:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{\rho} \overline{p}_{kl} f^{(l)}(x_k) + \overline{R}(f; X), \tag{30}$$

где вектор узлов $X = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1\}$, а коэффициенты $\overline{p}_{kl} = \overline{p}_{kl}(X)$ задаются равенствами

$$\overline{p}_{0l} = b_l h_1^{l+1}, \quad \overline{p}_{ml} = (-1)^l b_l h_m^{l+1}, \quad l = 0, 1, \dots, \rho,$$

$$\bar{p}_{kl} = b_l\,[h_{k+1}^{l+1} - (-1)^l h_k^{l+1}], \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad l = 0, 1, \ldots, \rho,$$

$$\text{где } h_k = x_k - x_{k-1} \text{ и } b_l = \frac{\rho+1}{l!} \sum_{s=0}^{\rho-1} \frac{(\rho+s)!\,(l+s)!}{s!\,(\rho+l+s+2)!}.$$

Доказана следующая теорема [43].

Теорема 7. *Среди квадратурных формул вида* (30), *где* $\rho = [(r-1)/2], [(r-1)/2]+1, \ldots, r-1$, *оптимальной по узлам на классах* $W^r L_p$, $r = 1, 2, \ldots$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *является формула с равноотстоящими узлами* $x_k = k/m$. *При этом погрешность оптимальной формулы определяется равенством*

$$\inf_X \sup_f \bar{R}(f; X) = \frac{1}{m^r} \frac{1}{(2\rho+2)!} \left\| \frac{d^{2\rho+2-r}}{dt^{2\rho+2-r}} (t(1-t))^{\rho+1} \right\|_{L_q},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

В работе [43] получен ряд других результатов по оценке и оптимизации остатка $\bar{R}(f; x)$ квадратурной формулы (30) на классах 1-периодических функций $\tilde{W}^{2r-1}$ и $\tilde{W}^{2r} L$.

В заключение этого пункта рассмотрим задачу об оптимальном методе восстановления интеграла.

Пусть $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_m \leqslant 1$ — произвольные точки отрезка $[0, 1]$, которые, как следует из неравенств, могут и совпадать. Предположим, что информация о функции $f \in C^{r-1}$ задается в виде $f^{(\nu_i)}_{(x_i)}$, где $0 \leqslant \nu_i \leqslant r-1$. Необходимо среди всех квадратурных формул вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^m p_k f^{(\nu_k)}(x_k) + R(f) \tag{31}$$

найти наилучшую для некоторого класса H, содержащегося в C^{r-1}. Постановка этой задачи принадлежит А. Н. Колмогорову, а формулу (31) называют квадратурной формулой Колмогорова.

Таким образом, фиксируется только число m единиц информации, а всем остальным (входящим в квадратурную сумму) можно свободно распоряжаться. А. А. Лигун [44] доказал следующую теорему.

Теорема 8. *Среди всех квадратурных формул вида* (21) *при фиксированном* m *наилучшей для класса* $\tilde{W}^r L$, $r = 1, 2, \ldots$, *является формула прямоугольников* (*с точностью до жесткого сдвига узлов*).

А. А. Женсыкбаев [45] обобщил теорему А. А. Лигуна на классы $\tilde{W}^r L_p$, $1 < p \leqslant \infty$, и решил в достаточно общем виде задачу об оптимальном выборе информации для восстановления интеграла $\int_0^1 \omega(t) f(t)\,dt$ для классов $\tilde{W}^r L_p$ и $W^r L_p$, где функция $\omega(t)$ почти всюду положительна и интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

6. Наилучшие квадратурные формулы для классов функций, определяемых перестановочно инвариантными множествами. В периодическом случае глубокие и наиболее общие результаты по оптимизации квадратурных формул получены В. Ф. Бабенко. Большой интерес представляют и методы исследований, которые он разработал и использовал.

Пусть $\tilde{L}_p$ — пространство 2π-периодических функций с обычной нормой, числа α, β положительны. Для любой $f \in \tilde{L}_p$ положим

$$\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_{\tilde{L}_p},$$

где $f_\pm(t) = \max\{\pm f(t), 0\}$.

Через $\tilde{W}^r_{p;\alpha,\beta}$ обозначим класс функций, $(r-1)$-я производная которых абсолютно непрерывна, а $\|f^{(r)}\|_{p;\alpha,\beta} \leqslant 1$, через $\varphi_{m,r}(\alpha, \beta; t)$, $m = 1,2,\ldots$ .., $r = 0,1,\ldots$,— $2\pi/m$-периодическую функцию из класа $\tilde{W}^r_{p,1/\alpha,1/\beta}$ со средним значением на периоде, равным нулю, у которой

$$\varphi^{(r)}_{m,r}(\alpha, \beta; t) = \varphi_{m,0}(\alpha, \beta; t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leqslant t \leqslant \mu; \\ -\beta, & \mu < t < 2\pi/m, \end{cases}$$

где $\alpha\mu = \beta(2\pi/n - \mu)$.

Рассматривая квадратурную формулу

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{\rho} p_{kl} f^{(l)}(x_k) + R(f;\ X, P) \tag{32}$$

на несимметричном классе функций $H \subset C^{r-1}$ (например, при $\alpha \neq \beta$ класс $\tilde{W}^r_{p;\alpha,\beta}$ не является центрально симметричным), целесообразно ввести следующие характеристики квадратурных формул:

$$R^+(H;\ X, P) = \sup_{f\in H} R(f;\ X, P),$$

$$R^-(H;\ X, P) = \inf_{f\in H} R(f;\ X, P).$$

Задача о наилучшей квадратурной формуле вида (32) для несимметричного класса H состоит в определении величин

$$\mathcal{E}^+_{m,\rho}(H) = \inf_{X,P} R^+(H;\ X, P),$$

$$\mathcal{E}^-_{m,\rho}(H) = \sup_{X,P} R^-(H;\ X, P).$$

и векторов (X^+, P^+), (X^-, P^-), реализующих соответствующие точные нижнюю и верхнюю грани.

В. Ф. Бабенко [46, 47] доказал следующее утверждение.

Теорема 9. *Среди всех квадратурных формул* (32) *при* $\rho = 0, 1$ *наилучшей для классов* $\tilde{W}^r_{\infty;\alpha,\beta}$ *при всех* $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ *и* $r = 1, 2, \ldots$ *является формула прямоугольников. При этом*

$$|\mathcal{E}^\pm_{m,0}(\tilde{W}^r_{\infty;\alpha,\beta})| = |\mathcal{E}^\pm_{m,1}(\tilde{W}^r_{\infty;\alpha,\beta})| = E^\pm\left(\varphi_{n,r}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}; \cdot\right)\right)_1,$$

где $E^\pm(f)_1$ *—наилучшее приближение константой в* $\tilde{L}_1$ *функции* $f(t)$ *снизу* (E^+) *и сверху* (E^-).

Расширяя множество классов дифференцируемых функций, В. Ф. Бабенко ввел классы дифференцируемых функций, определяемых П-инвариантными множествами, и рассмотрел для этих классов задачу об оптимизации квадратурных формул.

Пусть $r(f;\ t)$ $(f \in \tilde{L}_1,\ f(t) \geqslant 0)$ — убывающая перестановка функции $f(t)$ на период. Для любой функции $f \in \tilde{L}_1$ положим

$$\Pi(f;\ t) = r(f_+;\ t) - r(f_-;\ 2\pi - t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Множество $F \subset \tilde{L}_1$ называется перестановочно инвариантным (П-инвариантным), если из того, что $f \in F$ и $\Pi(g;\ t) = \Pi(f;\ t)$, следует $g \in F$.

Перестановочно инвариантен единичный шар в любом вложенном в $\tilde{L}_1$ симметричном пространстве 2π-периодических функций, в частности в пространствах $\tilde{L}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, Орлича, Лоренца, Марцинкевича. П-инвариантны множества

$$F_{p;\alpha,\beta} = \{f \in \tilde{L}_p : \|f\|_{p;\alpha,\beta} \leqslant 1\}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

$$F(\varphi) = \{f \in \tilde{L}_1 : \int_0^{2\pi} \varphi(|f(t)|)\, dt \leqslant 1\},$$

где $\varphi(t)$ — произвольная неотрицательная, неубывающая функция, определенная на $[0, \infty)$, и др.

Через $\tilde{W}^r F$ обозначим множество функций, $(r-1)$-я производная которых абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in F$.

Приведем два результата из работ В. Ф. Бабенко, относящихся к оптимизации квадратурных формул на классах $W^r F$.

Теорема 10 [47]. *Пусть F — произвольное Π-инвариантное множество. Среди квадратурных формул* (32) *при* $\rho = 0, 1$ *наилучшей для класса* $\tilde{W}^r F$, $r = 1, 2, \ldots$, *является формула прямоугольников.*

Теорема 11 [48]. *Пусть F — произвольное Π-инвариантное множество. Среди всевозможных квадратурных формул вида* (31) *при фиксированном m наилучшей для класса* $\tilde{W}^r F$, $r = 1, 2, \ldots$, *является формула прямоугольников.*

В работах [46—48] получена погрешность формул прямоугольников на классах $\tilde{W}^r F$.

Результаты работ по оптимизации квадратурных формул для периодических классов функций создали впечатление, что формула прямоугольников будет оптимальной для любых классов периодических функций. Однако К. И. Осколков [49] показал, что это не так. Поэтому работы В. Ф. Бабенко ценны и тем, что в них расширены границы классов функций, для которых квадратурные формулы с равными весами и равноотстоящими узлами являются оптимальными. Приведем еще один класс функций, для которого это будет иметь место.

Обозначим через $K * F$ класс функций $f(t)$, представимых в виде

$$f(t) = a\mu + (K*\varphi)(t), \tag{33}$$

где $(K*\varphi)(t)$ — свертка ядра $K \in \tilde{L}_1$ и функции $\varphi \in F \subset \tilde{L}_1$, ортогональной μ, где $\mu = 1$, если $K(t)$ ортогонально константе, и $\mu = 0$ — в противном случае, a — любая константа.

Непрерывное ядро $K(t)$ называют CVD-ядром и пишут $K \in CVD$, если любая функция вида (33), где φ — непрерывна, имеет не больше перемен знака, чем $\varphi(t)$.

Через $\mathcal{A}_m^\sigma$ обозначим множество пар векторов (X, P), определяющих квадратурную формулу (18), таких, что $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 2\pi\sigma$.

Теорема 12 [50]. *Пусть ядро $K \in CVD$, а F — Π-инвариантное множество. Если $K(t)$ ортогонально* 1, *то среди квадратурных формул вида* (18) *наилучшей для класса $K*F$ является формула прямоугольников. Если* $\int_0^{2\pi} K(t)\, dt \neq 0$, *то при любом σ среди формул* (18), *у которых* $(X, P) \in \mathcal{A}_m^\sigma$, *наилучшей будет*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \frac{2\pi\sigma}{m} \sum_{k=1}^{m} f\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + R_\sigma(f).$$

В работе [50] вычислена погрешность оптимальной квадратурной формулы на классе $K*F$. Теорема 12 существенно обобщает результаты работ Т. А. Гранкиной [51], М. А. Чахкиева [52], Нгуен Тхи Тхьеу Хоа [53]. При доказательстве теорем 10—12 разработаны новые методы, с помощью которых установлены экстремальные свойства моносплайнов, более глубокие по сравнению с полученными в работах А. А. Лигуна и А. А. Женсыкбаева. В работе В. Ф. Бабенко и Т. А. Гранкиной [54] получены оптимальные квадратурные формулы для классов $K*F$, где F — единичный шар в L_1, а на ядро K налагаются более слабые, чем в теореме 12, условия.

7. Квадратурные формулы для функций, интегрируемых с весом. В работах [55—57] рассматривались квадратурные формулы вида (13) для веса $q(x) = (1 - x^2)^\beta$, $\beta > -1$, вектор узлов которых совпадает с множеством нулей Γ_m^β многочленов Якоби степени m, соответствующих этому весу. Для $\beta \in [-1/2, 1/2]$ получены асимптотически оптимальные по коэффициентам при фиксированных векторах узлов $X^m = \Gamma_m^\beta$ квадратурные формулы вида (13) и установлена асимптотика погрешности этих формул на классе H^m. В частности, доказано, что квадратурные формулы Гаусса, соответствующие весам $(1- x^2)^{-1/2}$ и $(1 - x^2)^{1/2}$, являются асимптотически оптимальными по коэффициентам для классов H^α.

Напомним, что последовательность квадратурных формул с векторами узлов X^m и векторами коэффициентов P^m называется асимптотически оптимальной по коэффициентам при фиксированных векторах узлов для класса H, если

$$R_{q,m}(H; X^m, P^m) = R_{q,m}(H; X^m) + o(R_{q,m}(H; X^m)),$$

где

$$R_{q,m}(H; X^m, P^m) = \sup_{f \in H} R_q(f; X^m, P^m),$$

$$R_{q,m}(H; X^m) = \inf_{P^m} R_{q,m}(H; X^m, P^m).$$

Соответственно последовательность квадратурных формул (13), определяемых векторами узлов X^m и векторами коэффициентов P^m, называется асимптотически оптимальной, если

$$R_{q,m}(H; X^m, P^m) = \mathscr{E}_{q,m}(H) + o(\mathscr{E}_{q,m}(H)),$$

$$\text{где } \mathscr{E}_{q,m}(H) = \inf_{P^m, X^m} R_{q,m}(H, X^m, P^m).$$

В дальнейшем будем предполагать, что 1) $q(x) > 0$ почти всюду: 2) $q(x)$ непрерывна на интервале $(-1, 1)$; 3) $q(x)$ монотонна в некоторых окрестностях точек -1 и 1, если там $q(x)$ неограничена.

Заметим также, что $q(x)$ всегда предполагается интегрируемой. Примером весовой функции, удовлетворяющей этим условиям, является классический вес $q(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, α, $\beta > -1$. Покажем, что для неограниченных весовых функций, удовлетворяющих условиям 1—3, имеет место равенство (16).

Пусть X^m — последовательность векторов, определяющих последовательность асимптотически оптимальных или оптимальных квадратурных формул вида (13) для класса H^α. Из условия 1 для узлов x_k^m следует предельное соотношение

$$\max_{1 \le k \le m} \Delta x_k^m \to 0, \tag{34}$$

где $\Delta x_k^m = x_{k+1}^m - x_k^m$, $x_0^m = -1$, $x_{m+1}^m = 1$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Это утверждение и его доказательство аналогично теореме В. А. Стеклова [58, с. 627].

Погрешность оптимальной по коэффициентам квадратурной формулы (13), соответствующей вектору X^m на классе H^α, использовав (15) и опустив верхний индекс в x_k^m, представим в виде

$$R_{q,m}(H^\alpha, X^m) = \sum_{k=1}^{m} \int_{A_k} q(x) \, | x - x_k |^\alpha \, dx = \int_{-1}^{x_1} (x_1 - x)^\alpha q(x) \, dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} q(x)\,\varphi_k(x)\,dx+\int_{x_m}^{1}(x-x_m)^{\alpha} q(x)\,dx,$$

где $\varphi_k(x)=\min\{x-x_k)^{\alpha},\ (x_{k+1}-x)^{\alpha},\ x\in(x_k,\ x_{k+1})$.

Первое и последнее слагаемые имеют порядок $o\,(1/m^{\alpha})$, а сумму остальных, используя непрерывность весовой функции, с помощью теоремы о среднем преобразуем так:

$$\sum_{k=1}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi_k(x)\,q(x)\,dx=\frac{1}{2^{\alpha}(\alpha+1)}\sum_{k=1}^{m-1} q(\xi_k)\,\Delta x_k^{\alpha+1},\quad \xi_k\in(x_k,x_{k+1}).$$

Таким образом, пришли к известной задаче [59] о минимизации по x_k суммы

$$\sum_{k=1}^{m-1} q(\xi_k)\,(x_{k+1}-x_k)^{\alpha+1}. \tag{35}$$

Выпуклость вверх функции $t^{\frac{1}{\alpha+1}}$ при $\alpha>0$ позволяет оценить сумму (35) снизу

$$\sum_{k=1}^{m-1} q(\xi_k)\,\Delta x_k^{\alpha+1}=(m-1)\left(\sqrt[\alpha+1]{\frac{\sum\limits_{k=1}^{m-1} q(\xi_k)\,\Delta x_k^{\alpha+1}}{m-1}}\right)^{\alpha+1}\geqslant$$

$$\geqslant(m-1)\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{m-1} q^{\frac{1}{\alpha+1}}(\xi_k)\,\Delta x_k}{m-1}\right)^{\alpha+1}=\frac{1}{(m-1)^{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{m-1} q^{\frac{1}{\alpha+1}}(\xi_k)\,(x_{k+1}-x_k)\right)^{\alpha+1}.$$

В скобках стоит сумма Римана для функции $q^{\frac{1}{\alpha+1}}(t)$, которая при $m\to\infty$ стремится к интегралу от этой функции, благодаря условиям, наложенным на $q(t)$, и предельному соотношению (34). Итак,

$$R_{q,m}(H^{\alpha};X^m)\geqslant\frac{1}{(\alpha+1)(2m)^{\alpha}}\left(\int_{-1}^{1} q^{\frac{1}{\alpha+1}}(t)\,dt\right)^{\alpha+1}+\frac{\varepsilon_m}{m^{\alpha}}, \tag{36}$$

где $\varepsilon_m=o(1)$. Чтобы получить оценку сверху для $\mathscr{E}_{q,m}(H^{\alpha})$, следует рассмотреть последовательность векторов узлов $X^m=\{x_k^m\}$ таких, что

$$\int_{-1}^{x_1} q(x)(x_1-x)^{\alpha}dx=\int_{x_k}^{x_{k+1}} q(x)\,\varphi_k(x)\,dx=\int_{x_m}^{1} q(x)(x-x_m)^{\alpha}\,dx=C_m,$$

$$k=1,2,\ldots,m-1.$$

Сумма (35) в этом случае равна

$$\frac{1}{(m-1)^{\alpha}}\left(\sum_{k=1}^{m-1} q^{\frac{1}{\alpha+1}}(\xi_k)\,\Delta x_k\right)^{\alpha+1}.$$

Нетрудно показать, что $C_m=o\left(\frac{1}{m^{\alpha}}\right)$ и для x_k^m выполняется (34). Следовательно,

$$\mathscr{E}_{q,m}(H^{\alpha})\leqslant\frac{1}{(\alpha+1)(2m)^{\alpha}}\left(\int_{-1}^{1} q^{\frac{1}{\alpha+1}}(t)\,dt\right)^{\alpha+1}+\frac{\delta_m}{m^{\alpha}}, \tag{37}$$

где $\delta_m = o(1)$. Из неравенств (36), (37) следует

$$\mathcal{E}_{q,m}(H^\alpha) = \frac{1}{(\alpha+1)(2m)^\alpha}\left(\int_{-1}^{1} q^{\frac{1}{\alpha+1}}(t)\,dt\right)^{\alpha+1} + o\left(\frac{1}{m^\alpha}\right),$$

где порядок второго слагаемого определяется функцией $q(t)$ и числом α.

1. *Никольский С. М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи мат. наук.— 1950.— Вып. 2 (36).— С. 165—177.
2. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы // Изв. АН СССР Сер. мат.— 1952.— **16**.— С. 181—196.
3. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.— М. : Наука, 1988.— 255 с.
4. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.— М.: Наука, 1967.— 327 с.
5. *Лушпай Н. Е.* Наилучшие квадратурные формулы на некоторых классах функций // Материалы межвуз. конф. мол. ученых-математиков.— Харьков, 1966.— С. 58—62.
6. *Аксень М. Б., Турецкий А. Х.* О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов функций // Докл. АН СССР.— 1966.— **166**, № 5.— С. 1019—1021.
7. *Косюк С. Д., Гнуен Суан Гнуст.* К вопросу о наилучших квадратурных формулах для некоторых классов функций // Науч. тр. Ташкент. ун-та.— 1968.— Вып. 320.— С. 58—72.
8. *Лушпай Н. Е.* Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки.— 1969.— **6**, № 4.— С. 475—480.
9. *Корнейчук Н. П., Лушпай Н. Е.* Наилучшие квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций и кусочно-полиномиальное приближение // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1969.— **33**, № 6.— С. 1416—1437.
10. *Лушпай Н. Е.* О точной оценке погрешности квадратурной формулы С. М. Никольского для дифференцируемых периодических функций // Науч. зап.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1970.— С. 138—144.
11. *Лушпай Н. Е.* Оптимальные квадратурные формулы для дифференцируемых периодических функций // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1972.— С. 53—55.
12. *Алхимова В. М.* Наилучшие квадратурные формулы с равноотстоящими узлами //Докл. АН СССР.— 1972.— **202**, № 2.— С. 263—266.
13. *Coman Ch.* Monosplines and optimal quadrature formulae // Rend. mat.— 1972. — **5**, N 3. — P. 567—577.
14. *Левин М. И.* Одна экстремальная задача для квадратурной формулы Маркова // Изв. АН ЭССР. Сер. техн. и физ.-мат.— 1969.— **18**, № 2.— С. 249—252.
15. *Лушпай Н. Е.* Квадратурные формулы типа формулы Маркова с наименьшей оценкой остатка // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1973.— С. 70—75.
16. *Корнейчук Н. П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Мат. заметки.— 1968.— **3**, № 5.— С. 565—576.
17. *Лебедь Г. К.* О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций // Там же.— С. 577—586.
18. *Лебедь Г. К.* О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций. II // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— **34**, № 3.— С. 639—661.
19. *Бабенко В. Ф.* Об асимптотически наилучшей квадратурной формуле для одного класса функций двух переменных // Исслед. по сов. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1974.— С. 3—5.
20. *Бабенко В. Ф.* Асимптотически точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул // Мат. заметки.— 1976.— **19**, № 3.— С. 313—322.
21. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1974.— **38**, № 3.— С. 583—614.
22. *Бернштейн С. Н.* О некоторых экстремальных свойствах последовательных интегралов.— Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 11.—М.: Изд-во АН СССР, 1954.— С. 170—172.
23. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства.— М. : Изд-во иностр. лит.— 1948.— 456 с.
24. *Корнейчук Н. П.* Об экстремальных свойствах периодических функций // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1962.— № 8.— С. 993—998.
25. *Малоземов В. И.* Оценка точности одной квадратурной формулы для периодических функций // Вестн. Ленингр. ун-та. Математика, механика, астрономия.— 1967.— № 1, вып. 1.— С. 52—59.
26. *Малоземов В. И.* О точности квадратурной формулы прямоугольников // Мат. заметки.— 1967.— **2**, № 4.— С. 357—360.
27. *Бусарова Т. Н.* Наилучшие квадратурные формулы для одного класса дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн.— 1973.— **25**, № 3.— С. 291—301.
28. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Докл. АН СССР.— 1973.— **211**, № 5.— С. 1060—1062.

29. *Моторный В. П., Кущ А. О.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ на классе W^2H^ω // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск : Днепропетр. ун-т, 1987.— С. 60—65.
30. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки.— 1976.— **19**, № 6.— С. 913.
31. *Женсыкбаев А. А.* О наилучшей квадратурной формуле на классе W^rL_p // Докл. АН СССР.— 1976.— **227**, № 2.— С. 277—279.
32. *Женсыкбаев А. А.* Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1977.— **41**, № 5.— С. 1110—1124.
33. *Женсыкбаев А. А.* Экстремальные свойства моносплайнов и наилучшие квадратурные формулы: дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— М., 1980.— 174 с.
34. *Женсыкбаев А. А.* Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук.— 1981.— **36**, № 4.— С. 107—159.
35. *Bojanov B. D.* Uniqueness of the Optimal Notes of Quadrature Formulae // Math. Comp.— 1981.— **36**, N 154.— P. 525—546.
36. *Лушпай Н. Е.* Наилучшая квадратурная формула на классе периодических функций // Мат. заметки.— 1974.— **16**, № 2.— С. 193—204.
37. *Лушпай Н. Е.* Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций с интегрируемой r-й производной // Изв. вузов. Математика.— 1975.— № 3. — С. 59.
38. *Женсыкбаев А. А.* Об одном свойстве наилучших квадратурных формул // Мат. заметки.— 1978.— **23**, № 4.— С. 551—562.
39. *Боянов Б. Д.* Характеристика и существование оптимальных квадратурных формул для одного класса дифференцируемых функций // Докл. АН СССР.— 1977.— **232**, № 6.— С. 1233—1236.
40. *Боянов Б. Д.* Существование оптимальных квадратурных формул с заданными кратностями узлов // Мат. сб.— 1978.— **105**, № 3.— С. 342—370.
41. *Женсыкбаев А. А.* О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов непериодических функций // Докл. АН СССР.— 1977.— **236**, № 3.— С. 531—534.
42. *Женсыкбаев А. А.* Характеристические свойства наилучших квадратурных формул / Сиб. мат. журн.— 1979.— **20**, № 1.— С. 49—68.
43. *Великин В. Л.* Эрмитовы сплайны и связанные с ними квадратурные формулы для некоторых классов дифференцируемых функций // Изв. вузов. Математика.— 1976.— № 5.— С. 15—28.
44. *Лигун А. А.* О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов периодических функций // Мат. заметки.— 1978.— **24**, № 5.— С. 661—669.
45. *Женсыкбаев А. А.* Об экстремальности моносплайнов минимального дефекта // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1982.— **46**, № 6.— С. 1175—1198.
46. *Бабенко В. Ф.* Неравенства для перестановок дифференцируемых периодических функций, задачи приближения и приближенного интегрирования // Докл. АН СССР.— 1983.— **272**, № 5.— С. 1038—1041.
47. *Бабенко В. Ф.* Приближения, поперечники и наилучшие квадратурные формулы для классов периодических функций с перестановочно инвариантными множествами производных // Anal. math.— 1987.— **13**, № 4.— С. 15—28.
48. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства для перестановок периодических моносплайнов и наилучшие квадратурные формулы // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск : Днепропетр. ун-т, 1986.— С. 4—16.
49. *Осколков К. И.* Об оптимальности квадратурной формулы с равноотстоящими узлами на классах периодических функций // Докл. АН СССР.— 1979.— **249**, № 1.— С. 49—52.
50. *Бабенко В. Ф.* Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов сверток // Исслед. по теорет. и прикл. вопросам математики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 7—10.
51. *Гранкина Т. А.* О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов функций, представимых в виде сверток.— М., 1981.— Деп. в ВИНИТИ, № 5782-81.
52. *Чахкиев М. А.* Об оптимальности равноотстоящих узлов // Докл. АН СССР.— 1982.— **264**, № 4.— С. 836—839.
53. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* О наилучших методах интегрирования и восстановления функций на классах, задаваемых свертками, не увеличивающими осцилляцию // Успехи мат. наук.— 1984.— **39**, № 2.— С. 177—178.
54. *Бабенко В. Ф., Гранкина Т. А.* О наилучших квадратурных формулах на классах сверток с $O(M, \Delta)$-ядрами // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск : Днепропетр. ун-т, 1982.— С. 6—13.
55. *Дунайчук Е. Е.* Оценка сверху погрешностей квадратурных формул типа Гаусса, соответствующих некоторым весовым функциям, на классах H^ω // Там же.— 1986.— С. 25.
56. *Моторный В. П., Дунайчук Е. Е.* О приближенном вычислении интегралов от непериодических функций // Там же.— С. 40—50.
57. *Моторный В. П., Дунайчук Е. Е.* О формулах приближенного вычисления интегралов // Тр. Мат. ин-та АН УССР.— 1987.— **180**.— С. 161—163..
58. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций.— М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.— 688 с.
59. *Стечкин С. Б.* Одна оптимизационная задача // Numerishe Methoden der Approximationstheorie.— Basel; Stuttgart : Birkhaüser, 1972.— S. 205—208.

Днепропетр. ун-т

Получено 22.08.89