УДК 517.94:519.62

Я. М. Глинський

Рівномірно монотонні явні наближені методи для диференціально-операторних рівнянь першого порядку в гільбертовому просторі

Изучаются свойства контрактивности, монотонности и знакопостоянства приближенных методов решения начальной задачи для некоторых линейных и нелинейных дифференциально-операторных уравнений в комплексном гильбертовом пространстве. Приведены явные методы первого и второго порядков точности, которые при любом значении шага сетки являются монотонными и знакопостоянными на соответствующих классах задач.

Вивчаються властивості контрактивності, монотонності та знакосталості наближених методів розв'язку початкової задачі для деяких лінійних і нелінійних диференціально-операторних рівнянь у комплексному гільбертовому просторі. Наведені явні методи першого та другого порядків точності, які при будь-якому значенні кроку сітки являються монотонними та знакосталими на відповідних класах задач.

Нехай у комплексному гільбертовому просторі H задані лінійний самоспряжений від'ємно визначений оператор $A : D(A) \to H$ і нелінійний оператор $B : D(B) \to H$, властивості якого будуть уточнені. Нехай $H[0, T]$ — простір неперервно тричі диференційовних на $[0, T]$ функцій $y(t)$ із значеннями в H. Області визначення операторів A і B скрізь щільні в H.

Розглянемо на $[0, T]$ дві коректні задачі Коші:

$$\frac{dy(t)}{dt} = B(y(t)), \quad y(0) = y_0 \in D(B), \tag{1}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad y(0) = y_0 \in D(A). \tag{2}$$

Введемо на $[0, T]$ рівномірну сітку $S = \{k\tau\}_{k=0}^{n}$, де τ — крок сітки. Нехай $P_\tau : H[0, T] \to H_\tau$ — оператор звуження простору H, а оператори $A_\tau = \{A_{\tau k}\}_{k=0}^{n-1} : D(A_\tau) \to H_\tau$ і $B_\tau = \{B_{\tau k}\}_{k=0}^{n-1} : D(B_\tau) \to H_\tau$ апроксимують оператори A і B при $\tau \to 0$. Розв'язок $y(t) \in H[0, T]$ задачі (1) або (2) апроксимується елементом $y_\tau \in H_\tau$, $y_\tau = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$, де $y_K = y(k\tau)$ — елементи гільбертового простору H.

Щоб опустити індекси в компонентах елемента y_τ, позначимо наближені розв'язки у двох сусідніх вузлах t_k, $t_{k+1} \in S$, де $t_{k+1} - t_k = \tau$, через u і $\hat{u}$. Тоді явний та неявний сіткові методи Ейлера першого порядку точності по τ, а також явний метод Рунге — Кутта другого порядку точності матимуть для задачі (1) відповідно такий вигляд

$$\hat{u} = u + \tau B_{\tau k}(u), \tag{3}$$

$$\hat{u} = u + \tau B_{\tau k+1}(\hat{u}), \tag{4}$$

де

$$\hat{u} = u + 0{,}5\tau (B_{\tau k}(u) + B_{\tau k}(\bar{u})), \tag{5}$$

$$\bar{u} = u + \tau B_{\tau k}(u).$$

Позначимо через $z(t)$ точний розв'язок, а через v і $\hat{v}$ — наближені розв'язки задачі Коші в точках t_k і t_{k+1} при початковій умові $y(0) = z_0$. Через $\mathfrak{F}_B$ позначимо згідно [1] клас задач (1) з таким нелінійним оператором B, що $(\forall t \in [0, T])$

$$\operatorname{Re}(B(y(t)) - B(z(t)),\ y(t) - z(t)) \leqslant 0,\ y(t), z(t) \in H. \tag{6}$$

Через $\overline{\mathfrak{F}}_B$ позначимо клас задач (1) з таким нелінійним оператором B, що $(\forall t \in [0, T])$

$$\operatorname{Re}(B(y(t)),\ y(t)) < 0,\ y(t) \in H \setminus \{0\}. \tag{7}$$

Через $\widetilde{\mathfrak{F}}_B$ позначимо задачі з класу $\overline{\mathfrak{F}}_B$, для яких $(\forall \tau > 0)$ виконується така умова знакосталості розв'язку

$$\operatorname{Re}(y(t),\ y(t+\tau)) > 0,\ y(t) \in H \setminus \{0\}, \qquad t, t+\tau \in [0, T].$$

В [1] задачі з класів $\mathfrak{F}_B$ і $\overline{\mathfrak{F}}_B$ називаються відповідно дисипативними і монотонними. Аналогічно будемо розглядати класи задач $\mathfrak{F}_A$, $\overline{\mathfrak{F}}_A$ і $\widetilde{\mathfrak{F}}_A$.

Означення 1 [1]. *Сітковий метод називається контрактивним на класі задач $\mathfrak{F}_B$, якщо $(\exists \tau_0 > 0,\ \forall \tau \in (0, \tau_0])$ виконується нерівність*

$$\| \hat{u} - \hat{v} \|_H \leqslant \| u - v \|_H, \tag{8}$$

і називається рівномірно контрактивним (B-стійким), якщо при цьому $\tau_0 = \infty$ (B-стійкість не слід пов'язувати з назвою оператора B).

Означення 2 [1]. *Сітковий метод називається монотонним на $\overline{\mathfrak{F}}_B$, якщо $(\exists \tau_0 > 0,\ \forall \tau \in (0, \tau_0])$ виконується нерівність*

$$\| \hat{u} \|_H < \| u \|_H, \quad \hat{u}, u \in H, \tag{9}$$

і рівномірно монотонним, якщо при цьому $\tau_0 = \infty$.

Означення 3. *Сітковий метод називається знакосталим на $\widetilde{\mathfrak{F}}_B$, якщо $(\exists \tau_0 > 0)$ $(\forall \tau \in (0, \tau_0])$ виконується нерівність*

$$\operatorname{Re}(u, \hat{u}) > 0, \quad \hat{u}, u \in H, \tag{10}$$

і називається рівномірно знакосталим, якщо при цьому $\tau_0 = \infty$.

Будемо вважати, що для послідовностей операторів $\{B_{\tau k}\}$ та $\{A_{\tau k}\}$ нерівності типу (6) і (7) виконуються на відповідних класах задач. Надалі для спрощення записів опустимо всі індекси при операторах $A_{\tau k}$ і $B_{\tau k}$, пам'ятаючи, що вони діють у комплексному гільбертовому просторі H. Сіткові методи (3)—(5) є контрактивними при певних значеннях τ, але B-стійким є тільки метод (4). Явний метод Ейлера є монотонним на задачі (2) при умові $E > 0{,}5\,\tau A$ і знакосталим при більш сильній умові $E > \tau A$, де операторні нерівності слід розуміти як нерівності для скалярних добутків. Наведені умови обмежують вибір кроку сітки для забезпечення монотонності і знакосталості явного методу. Відомо [1], що чисельні методи для задач (1) и (2) в евклідовому просторі не мають відповідних обмежень на крок τ, якщо вони є неявними лінійними методами, а у випадку явних дробово-раціональних (нелінійних) методів існує проблема доведення безумовної стійкості методів. В евклідовому просторі деякі явні дробово-раціональні методи розглядалися в [2].

У даній статті будуються і досліджуються властивості явних дробово-раціональних методів у гільбертовому просторі. Нерівності (9) і (10) виконуються для них при любому кроці сітки $\tau > 0$. Такі наближені методи будуть називатися рівномірно монотонними і рівномірно знакосталими відносно τ. Ці властивості забезпечують стійкість наближеного розв'язку задач (1) і (2) на безмежному інтервалі, коли $\tau = \mathrm{const}$, $T \to \infty$, $n \to \infty$.

Нелінійність явної схеми є природною вимогою, щоб нерівності (9) і (10) виконувались для всіх $\tau > 0$. Введемо у метод (3) регуляризуючий множник-функцію $p = p(r)$, $p : R \to R_+$, таким чином:

$$\hat{u} = u + \tau p(r) f, \quad f = B(u). \tag{11}$$

Вигляд функції $p(r)$ визначимо, задовольнивши дві умови: 1) умову рівномірної монотонності (9); 2) умову рівномірної апроксимації першого порядку точності по τ:

$$1.\ \|\hat{u}\|^2 = (\hat{u}, \hat{u}) = (u, u) + 2\tau p \operatorname{Re}(u, f) + \tau^2 p^2 (f, f) =$$

$$= \left(1 + 2\tau p \frac{\operatorname{Re}(u, f)}{(u, u)} + \tau^2 p^2 \frac{(f, f)}{(u, u)}\right) \|u\|^2 < \|u\|^2,$$

$$2\operatorname{Re}(u, f) + \tau p (f, f) < 0,$$

$$0 < p(r) < \frac{2\operatorname{Re}(u, f)}{\tau (f, f)},$$

$$r \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\tau (f, f)}{\operatorname{Re}(u, f)}, \quad \operatorname{Re}(u, f) \neq 0, \tag{12}$$

$$0 < p(r) < 2/r, \tag{13}$$

$$2.\ p(r) = 1 + O(r), \quad r = r(\tau) \to 0, \ \tau \to 0. \tag{14}$$

Нерівність (13) при умові (14) виконується для функції $p(r) = \exp(-cr)$, $c \leqslant 1/4$, а також у випадку дробово-раціональних функцій, серед яких найпростішою є функція

$$p(r) = \frac{1}{1 + ar + br^2}, \tag{15}$$

де

$$a \leqslant -0{,}5, \quad b \geqslant 0. \tag{16}$$

Розглянемо схему (11), (12), (15). Назвемо її методом $\mathfrak{M}_1$. В результаті побудови доведена теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються нерівності* (16), *то метод* $\mathfrak{M}_1$ *рівномірно монотонний на класі задач* $\overline{\mathfrak{F}}_B$.

Щоб функція (15) була визначеною $\forall \tau \in R$, слід узяти $b > a^2/4$. Тоді справедлива така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються нерівності* $a \leqslant -1/2$ *і* $b > a^2/4$, *то метод* $\mathfrak{M}_1$ *рівномірно знакосталий на класі задач* $\tilde{\mathfrak{F}}_B$.

Доведення. Позначимо $d = \tau \operatorname{Re}(u, f)(u, u)^{-1}$. Нерівність (10) має вигляд

$$\operatorname{Re}(u, \hat{u}) = (u, u) + \tau p \operatorname{Re}(u, f) = (1 + pd)(u, u) > 0$$

і виконується, якщо $1 + pd > 0$. Остання нерівність у розгорнутому вигляді, враховуючи додатну визначеність знаменника при $b > a^2/4$, еквівалентна нерівності

$$g(\tau) = 1 + \tau\left[\frac{a (f, f)}{\operatorname{Re}(u, f)} + \frac{\operatorname{Re}(u, f)}{(u, u)}\right] + \tau^2 b \frac{(f, f)^2}{\operatorname{Re}^2(u, f)} > 0. \tag{17}$$

Нерівність (17) виконується ($\forall \tau > 0$), якщо дискримінант квадратного трьохчлена $g(\tau)$ від'емний, тобто коли

$$\left[\frac{a (f, f)}{\operatorname{Re}(u, f)} + \frac{\operatorname{Re}(u, f)}{(u, u)}\right]^2 - 4b \frac{(f, f)^2}{\operatorname{Re}^2(u, f)} < 0.$$

В результаті маємо

$$(a^2 - 4b) \frac{(f, f)^2}{\operatorname{Re}^2(u, f)} + \frac{2a (u, u)(f, f) + \operatorname{Re}^2(u, f)}{(u, u)^2} < 0,$$

і завдяки нерівності Коші — Буняковського

$$\operatorname{Re}^2(u, f) \leqslant |(u, f)|^2 \leqslant (u, u)(f, f).$$

Теорема доведена.

Головний доданок в асимптотичному розкладі по степенях τ похибки апроксимації методу $\mathfrak{M}$ має вигляд

$$\tau^2\left(\frac{1}{2}\,y''(t)+ay'(t)\frac{(y'(t),\,y'(t))}{\operatorname{Re}(y(t),\,y'(t))}\right),\qquad t\in S.$$

У випадку, коли $|\operatorname{Re}(y(t),\,y'(t))|<\varepsilon$, де ε — мале число, слід користуватися іншим методом з іншим виразом r. Наприклад, можна взяти

$$r=\frac{(\bar f-f,\,f)}{(f,\,f)},\quad \bar f=B(u+\tau f). \tag{18}$$

Схему (11), (18), (15) назвемо методом $\mathfrak{M}_2$.

Теорема 3. *Якщо $a\leqslant-1/2$, $b\geqslant 0$, то метод $\mathfrak{M}_2$ рівномірно монотонний на класі задач $\bar{\mathfrak{F}}_A$.*

Для доведення теореми буде потрібна така лема.

Лема. *Для лінійного самоспряженого знаковизначеного оператора $A:D(A)\to H$; $(\forall y,\,z\in H)$ і дійсних цілих чисел $k,\,i:2k\geqslant i\geqslant 0$ виконується нерівність*

$$|(A^ky,\,z)|^2\leqslant(A^iy,\,y)(A^{2k-i}z,\,z). \tag{19}$$

Доведення. Умови леми визначають скалярні добутки, які входять у нерівність (19), а також визначають при $A\geqslant 0$ наступне перетворення:

$$|(A^ky,\,z)|^2=|(A^{i/2}y,\,A^{k-i/2}z)|^2\leqslant(A^{i/2}y,\,A^{i/2}y)(A^{k-i/2}z,\,A^{k-i/2}z)=$$
$$=(A^iy,\,y)(A^{2k-i}z,\,z).$$

Нерівність (19) інваріантна відносно знаку оператора A.

Доведення теореми 3. Застосуємо метод $\mathfrak{M}_2$ до задачі (2). Тоді вирази для r і $(\hat u,\,\hat u)$ матимуть вигляд

$$r=\frac{\tau(A^3u,\,u)}{(A^2u,\,u)},\quad (\hat u,\,\hat u)=(u,\,u)+2\tau p\cdot(Au,\,u)+\tau^2p^2\cdot(Au,\,Au).$$

Нерівність (9) виконується при умові

$$2(Au,\,u)(1+br^2)+\tau(2a(Au,\,u)(A^3u,\,u)(A^2u,\,u)^{-1}+(A^2u,\,u))<0.$$

Ця умова виконується $(\forall\tau>0)$, якщо $a\leqslant-1/2$, $b\geqslant 0$ і

$$(A^2u,\,u)^2\leqslant(A^3u,\,u)(Au,\,u). \tag{20}$$

Остання нерівність випливає з леми при $k=2$, $i=1$. Теорема доведена.

Аналогічно з використанням леми доводиться така теорема.

Теорема 4. *Якщо $a\leqslant-1/2$ і $b>a^2/4$, то метод $\mathfrak{M}_2$ рівномірно знакосталий на класі задач $\tilde{\mathfrak{F}}_A$.*

Головний доданок в асимптотичному розкладі по степенях похибки апроксимації методу $\mathfrak{M}_2$ має вигляд

$$\tau^2\left(\frac{1}{2}\,y''(t)+ay'(t)\frac{(y''(t),\,y'(t))}{(y'(t),\,y'(t))}\right),\qquad t\in S.$$

Метод $\mathfrak{M}_2$ можна формально застосувати до класу задач $\mathfrak{F}_B$, однак відповідні його властивості на $\mathfrak{F}_B$ не встановлені.

В методах $\mathfrak{M}_1$ і $\mathfrak{M}_2$ покладемо $a=-1/2$, $b=1/12$. При вказаних значеннях коефіцієнтів виконуються умови теорем і, крім цього, досягається максимальний — четвертий — порядок апроксимації на розв'язку модельного скалярного диференціального рівняння $y'(t)=\lambda y(t)$, де $\lambda=$ $=\mathrm{const}$. Функцією стійкості цих методів є (2,2)-апроксимація Паде до функції $\exp(\tau\lambda)$.

Побудуємо явний дробово-раціональний метод другого порядку точності по τ, виходячи з методу (5). Вирази для r і $\hat{u}$ матимуть вигляд

$$r = \tau^2 \frac{(\bar{f} - f, \bar{f} - f)}{(u, u)}, \quad \bar{f} = B(u + \tau f), \ f = B(u), \tag{21}$$

$$\hat{u} = p(r)(u + 0{,}5\tau(f + \bar{f})), \tag{22}$$

де $p(r)$ — дробово-раціональна функція (16). Схему (21), (16), (22) назвемо методом $\mathfrak{M}_3$.

Теорема 5. *Якщо $a \geqslant 1/8$ і $b \geqslant 0$, то метод $\mathfrak{M}_3$ рівномірно монотонний і рівномірно знакосталий на задачах з класів відповідно $\bar{\mathfrak{F}}_A$ і $\tilde{\mathfrak{F}}_A$.*

Доведення. Застосуємо метод $\mathfrak{M}_3$ до задачі (2). Тоді вирази (22) і (21) матимуть вигляд

$$\hat{u} = p(r)(u + \tau A u + 0{,}5\tau^2 A^2 u), \quad r = \tau^4 \frac{(A^4 u, u)}{(u, u)}.$$

Нерівність (9) виконується ($\forall \tau > 0$), якщо $b \geqslant 0$ і якщо ($\forall \tau > 0$) виконується нерівність

$$2\tau(Au, u) + 2\tau^2(A^2 u, u) + \tau^3(A^3 u, u) + \frac{1}{4}\tau^4(A^4 u, u) \leqslant 2a\tau^4(A^4 u, u).$$

Використаємо нерівність (20) і отримаємо умови рівномірної монотонності: $b \geqslant 0$, $a \geqslant 1/8$.

Нерівність (10) для даних фун

$$(u, \hat{u}) = p(r)\left((u, u) + \tau(Au, u) + \frac{\tau^2}{2}(A^2 u, u)\right) > 0$$

виконується ($\forall \tau > 0$), якщо виконується нерівність

$$(Au, u)^2 \leqslant (A^2 u, u)(u, u),$$

яка є наслідком (19) при $k = 1$, $i = 0$. Теорема доведена.

У методі $\mathfrak{M}_3$ покладемо $a = 1/8$ і $b = 0$.

Розглянені явні дробово-раціональні методи є контрактивними в крузі одиничного радіусу [1], але не є B-стійкими. Це означає, що на класі задач (1) з властивістю

$$\operatorname{Re}(B(y) - B(z), \ y - z) \leqslant -\gamma \| B(y) - B(z) \|^2$$

методи $\mathfrak{M}_1$ і $\mathfrak{M}_2$ контрактивні за умовою

$$\tau \leqslant 2\gamma_1, \ \gamma_1 \geqslant \gamma > 0.$$

Явний метод (3) контрактивний, якщо $\tau \leqslant 2\gamma$.

Оператор $C = -A$ породжує шкалу гільбертових просторів H_α, $-\infty < \alpha < \infty$. Нерівність (19) можна розглядати як наслідок з властивостей шкали гільбертових просторів. Тому відповідні властивості наближених методів можуть бути доведені у всіх просторах H_α зі скалярним добутком

$$(y, z)_{H_\alpha} = (C^\alpha y, C^\alpha z).$$

Побудовані методи застосовані для розв'язування задач (1) і (2) з необмеженими операторами, які виникають при моделюванні процесів теплопереносу, дифузії, поширення хвиль. При переході від простору H_α до скінченновимірного евклідового простору отримаємо системи звичайних диференціальних рівнянь, які при великій розмірності простору, як правило, є жорсткими [1]. Результати експериментальної перевірки дробово-раціональних методів при розв'язуванні модельних задач наведені в [3].

Описані методи слід застосовувати в адаптивних алгоритмах на інтервалах швидкої зміни розв'язку. Відсутність B-стійкості робить їх менш ефективними порівняно з неявними методами на інтервалах квазістаціонарності розв'язку у випадку сильно жорстких систем. У випадку задач з хвилеподібною локально монотонною поведінкою розв'язку явні методи є достатньо ефективними. Ці методи придатні для розв'язування диференціально-інтегральних рівнянь з відповідними властивостями операторів A і B.

1. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге — Кутта для жестких нелинейных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1988.— 332 с.
2. *Боднарчук П. И., Глинский Я. Н.* К обоснованию некоторых нелинейных численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Минск, 1985.— 5 с.— (Деп. в ВИНИТИ, № 4155-85 Деп.).
3. *Глинский Я. Н., Панькив О. Я.* Экспериментальное исследование эффективности алгоритмов и программ решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Киев, 1988.— 32 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т кибернетики АН УССР; № 88.42).

Ін-т прикл. пробл. механіки і математики
АН УРСР, Львів

Одержано 06.03.90