УДК 517.53

В. В. Андриевский

Конструктивное описание классов гармонических функций с особенностями на квазиконформной дуге

Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — конечная жорданова дуга, $\omega(\delta)$, $\delta > 0$, — функция типа модуля непрерывности, $C_\Delta^\omega(L)$ — класс вещественнозначных, непрерывных в $\overline{\mathbb{C}}$, гармонических в $\overline{\mathbb{C}} \setminus L$ функций $u(z)$, удовлетворяющих при z и $\zeta \in \mathbb{C}$ условию

$$|u(z) - u(\zeta)| \leqslant C\omega(|z - \zeta|), \quad C = C(u) = \mathrm{const}. \tag{1}$$

Наша цель — получить конструктивную характеристику классов $C_\Delta^\omega(L)$ в случае квазиконформной дуги L [1]. Отметим, что эта задача близка, в некотором смысле, к задаче конструктивного описания классов $H^\omega(L)$ вещественнозначных функций $u(z)$, заданных и удовлетворяющих условию (1) на дуге L (достаточно полное изложение вопросов конструктивной теории функций, заданных на множествах комплексной плоскости, содержится в [2]).

В дальнейшем, если не оговорено особо, L — квазиконформная дуга; $w = \Phi(z)$ — конформное отображение $\overline{\mathbb{C}} \setminus L \to \{|w| > 1\}$ с нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, $\Psi = \Phi^{-1}$; $L_{1+1/n} = \{\zeta : |\Phi(\zeta)| = 1 + 1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$; $U(z, \delta) = \{\zeta : |\zeta - z| < \delta\}$, $z \in \mathbb{C}$, $\delta > 0$; $\rho_{1+1/n}(z) = \mathrm{dist}(z, L_{1+1/n})$; $G_n = \bigcup\limits_{\zeta \in L} U\left(\zeta, \frac{1}{2}\rho_{1+1/n}(\zeta)\right)$.

Достаточно большие неотрицательные, зависящие, возможно, только от несущественных для рассматриваемых вопросов параметров константы будем обозначать через C, C_1, ...

Пусть $B_\Delta^\omega(L)$ — класс вещественнозначных, непрерывных в $\overline{\mathbb{C}}$, гармонических в $\overline{\mathbb{C}} \setminus L$ функций $u(z)$, для каждой из которых существует последовательность таких гармонических полиномов $Q_n(z) = \mathrm{Re} \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j$, $n = 1, 2, \ldots$, что $|u(z) - Q_n(z)| \leqslant C\omega[\rho_{1+1/n}(z)]$, $z \in G_n$.

Теорема 1. $C_\Delta^\omega(L) \subset B_\Delta^\omega(L)$.

Теорема 2. $B_\Delta^\omega(L) \subset C_\Delta^\mu(L)$, *где*

$$\mu(\delta) = \delta \int\limits_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt, \quad 0 < \delta < 1/2.$$

Следствие 1. *Если* $\mu(\delta) \leqslant C\omega(\delta)$, *то* $C_\Delta^\omega(L) = B_\Delta^\omega(L)$.

Обозначим через $u_L(z)$ сужение функции $u(z)$ на L, $C_\Delta^\alpha(L)$ и $H^\alpha(L)$ — соответствующие классы $C_\Delta^\omega(L)$ и $H^\omega(L)$ при $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема 3. *Если* $u_L \in H^\alpha(L)$, $0 < \alpha < 1/2$, *то* $u \in C_\Delta^\alpha(L)$.

Следствие 2. *Если* $u_L \in H^\alpha(L)$, $0 < \alpha < 1/2$, *то* $\forall n = 1, 2, \ldots$ $\exists Q_n(z)$, $\deg Q_n \leqslant n$:

$$|u_L(z) - Q_n(z)| \leqslant C\rho_{1+1/n}^\alpha(z), \quad z \in L.$$

Отметим, что утверждение следствия 2 существенно отличается от известных результатов о приближении функций на дугах аналитическими полиномами (см., например, [3]).

Замечание. Пусть $L = [-1, 1]$. Положим $\tilde{u}(w) = \tilde{u}(\xi + i\eta) = \operatorname{Re}\{(w+1)\ln(w+1)\} = \frac{1}{2}(\xi+1)\ln[(\xi+1)^2+\eta^2] - \eta \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi+1}$, $|w| \leqslant 1$; $u(z) = \tilde{u}[\psi^{-1}(z)]$, где $\psi(w) = \frac{1}{2}(w + 1/w)$ — функция Жуковского. Нетрудно видеть, что $u_L \in H^{1/2}(L)$, однако $u \,\bar{\in}\, C_\Delta^{1/2}(L)$, что указывает на неулучшаемость (относительно α) теоремы 3.

Доказательство теоремы 1. Пусть C^∞ — класс бесконечно частно дифференцируемых в $\mathbb{C}$ функций, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа.

Лемма 1. *Пусть L — произвольная конечная жорданова дуга, $u \in C_\Delta^\omega(L)$. Тогда* $\forall n = 1, 2, \ldots \exists u_n \in C^\infty$:

$$|u(z) - u_n(z)| \leqslant C_1\omega[\rho_{1+1/n}(z)], \quad z \in G_n; \qquad u_n(z) = u(z), \qquad z \in \mathbb{C}\setminus G_n;$$

$$|\Delta u_n(z)| \leqslant C_2\omega[\rho_{1+1/n}(z)]/\rho_{1+1/n}^2(z).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное усредняющее ядро $K(z)$, т. е. $K(z) = K(|z|) \in C^\infty$; $K(z) = 0$, $|z| \geqslant 1$; $\iint\limits_{\mathbb{C}} K(z)\,d\sigma_z = 1$. Через $\delta_n(z)$, $z \in \mathbb{C}\setminus L_{1+1/n}$ обозначим регуляризированное расстояние от z до линии уровня $L_{1+1/n}$ [4, с. 203]. Зафиксируем такое достаточно малое число $\varepsilon > 0$, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon\delta_n(z) \leqslant \frac{1}{4}\rho_{1+1/n}(z)$ и, следовательно, включение $U(z, \varepsilon\delta_n(z)) \subset \mathbb{C}\setminus L$, $z \in \mathbb{C}\setminus G_n$.

Несложные выкладки (см., например, [5]) показывают, что всеми содержащимися в формулировке леммы 1 свойствами обладают функции

$$u_n(z) = (\varepsilon\delta_n(z))^{-2}\iint\limits_{\mathbb{C}} u(\zeta)\,K\left(\frac{\zeta - z}{\varepsilon\delta_n(z)}\right)d\sigma_\zeta.$$

В силу формулы Грина при $z \in G_n$ имеем

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_2}\left[u_n(\zeta)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\ln|\zeta - z| - \ln|\zeta - z|\frac{\partial u_n(\zeta)}{\partial n_\zeta}\right]|d\zeta| + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G_n}\Delta u_n(\zeta)\ln|\zeta - z|\,d\sigma_\zeta,$$

где $\partial/\partial n_\zeta$ — оператор дифференцирования по внешней нормали к кривой L_2 в точке ζ.

Зафиксируем произвольно точку $\zeta_0 \in L_2$ и рассмотрим функцию

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G_n}\Delta u_n(\zeta)\ln\left|\frac{\zeta - z}{\zeta_0 - z}\right|d\sigma_\zeta, \quad z \in G_n.$$

Для доказательства теоремы 1, очевидно, достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$|g_n(z) - T_n(z)| \leqslant C_3\omega[\rho_{1+1/n}(z)], \quad z \in G_n, \tag{2}$$

с некоторым гармоническим полиномом T_n, $\deg T_n \leqslant n$.

Построение полиномов $T_n(z)$ основывается на решении задачи приближения функции $\ln\left|\frac{\zeta - z}{\zeta_0 - z}\right|$ гармоническими многочленными ядрами вида

$$\pi_n(\zeta, z) = \operatorname{Re}\sum_{j=0}^{n} a_j(\zeta)\,z^j, \tag{3}$$

где $a_j(\zeta)$, $j = 0, \ldots, n$, — комплекснозначные суммируемые функции.

В дальнейшем систематически будут использоваться различные свойства функции Φ, доказательство которых можно найти в [3, 6, 7].

Лемма 2. *Для любого фиксированного $p > 2$ и $n = 1, 2, \ldots$ существует многочленное ядро вида* (3), *удовлетворяющее при $z, \zeta \in G_n$ неравенству*

$$\left| \ln \left| \frac{\zeta - z}{\zeta_0 - z} \right| - \pi_n(\zeta, z) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C_4 \rho^p_{1+1/n}(z)/|\zeta - z|^p, & |\zeta - z| \geqslant \rho_{1+1/n}(z); \\ C_4 \ln (2\rho_{1+1/n}(z)/|\zeta - z|), & |\zeta - z| < \rho_{1+1/n}(z). \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Построение функций $\pi_n(\zeta, z)$ базируется на решении аналогичной задачи о приближении ядра Коши $1/(\zeta - z)$ многочленными ядрами вида $K_n(\zeta, z) = \sum_{j=0}^{n} a_j(\zeta) z^j$, которые были введены и всесторонне исследованы в работах В. К. Дзядыка (см., например, [2]).

Пусть z_1 и z_2 — концы дуги L. Положим

$$\Omega^1 = \{\zeta : \zeta \in \mathbb{C} \setminus L, \arg \Phi(z_1) < \arg \Phi(\zeta) < \arg \Phi(z_2)\},$$

$$\Omega^2 = \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}^1, \quad \rho^{(j)}_{1+1/n}(z) = \operatorname{dist}(z, \Omega^j \cap L_{1+1/n}), \quad j = 1, 2.$$

Из результатов работ [3, 6] вытекают следующие оценки:

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - K_n(\zeta, z) \right| \leqslant \frac{C_5}{|\zeta - z|} \left[\frac{\rho^{(j)}_{1+1/n}(\zeta_L)}{|\zeta - z| + \rho^{(j)}_{1+1/n}(\zeta_L)} \right]^m, \tag{5}$$

$$|K_n(\zeta, z)| \leqslant C_6/(|\zeta - z| + \rho^{(j)}_{1+1/n}(\zeta_L)), \tag{6}$$

где $\zeta \in \Omega^j \cup L_2$, $j = 1, 2$, $|\Phi(\zeta)| \leqslant 2$; $\zeta_L = \Psi(\Phi(\zeta)/|\Phi(\zeta)|)$; $z \in G_n$; $m > 2$ — достаточно большое фиксированное число.

Из открытого покрытия $\bigcup_{\zeta \in L} U(\zeta, 2\rho_{1+1/n}(\zeta))$ множества $\overline{G}_n$ выделим конечное подпокрытие $\{U(\zeta_k, 2\rho_{1+1/n}(\zeta_k))\}_{k=1}^r$, $\zeta_k \in L$, $k = 1, \ldots, r$. Пусть точка ξ_k, $k = 1, \ldots, r$, выбрана так, что $|\xi_k - \zeta_k| = 2\rho_{1+1/n}(\zeta_k)$, $|\Phi(\xi_k)| \geqslant 1/n$. Зафиксируем индекс $k = 1, \ldots, r$. Соединим точки $\zeta_0 \in L_2$ и ξ_k дугой

$$l_k = \{\xi : |\Phi(\xi)| = 2, \quad \arg \Phi(\zeta_0) < \arg \Phi(\xi) < \arg \Phi(\xi_k)\} \cup$$
$$\cup \{\xi : |\Phi(\xi_k)| \leqslant |\Phi(\xi)| \leqslant 2, \quad \arg \Phi(\xi) = \arg \Phi(\xi_k)\}.$$

В силу леммы 4 работы [7] дуга l_k обладает следующими свойствами: $\operatorname{dist}(z, l_k) \asymp |z - \xi_k|$, $z \in G_n$; $\operatorname{mes}[l_k \cap U(\xi_k, \delta)] \leqslant C_7 \delta$, $\delta > 0$, где символ mes означает линейную меру Лебега.

Положим далее

$$\pi_n(\xi_k, z) = \operatorname{Re} \int_{l_k} K_n(\xi, z)\, d\zeta.$$

Учитывая соотношение (5) и тот факт, что

$$\operatorname{Re} \int_{l_k} \frac{d\xi}{\xi - z} = \ln \left| \frac{\xi_k - z}{\zeta_0 - z} \right|,$$

при $z \in G_n$ и достаточно большом $m = m(p, L)$ получаем

$$\left| \ln \left| \frac{\xi_k - z}{\zeta_0 - z} \right| - \pi_n(\xi_k, z) \right| \leqslant C_8 \int_{l_k} \frac{\rho^m_{1+1/n}(\zeta_k)}{|\xi - z|^{m+1}} |d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \frac{\rho^m_{1+1/n}(\zeta_k)}{|z - \xi_k|^m} \leqslant C_{10} \left[\frac{\rho_{1+1/n}(z)}{|z - \zeta_k| + \rho_{1+1/n}(z)} \right]^p. \tag{7}$$

Построим систему множеств $\{V_k\}_{k=1}^r$ по следующему рекуррентному правилу:

$$V_1 = U(\zeta_1, 2\rho_{1+1/n}(\zeta_1));$$

$$V_k = U(\zeta_k, 2\rho_{1+1/n}(\zeta_k)) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} V_j, \quad k = 2, \ldots, r.$$

Пусть $\zeta \in V_k$, $k = 1, \ldots, r$. При построении ядра $\pi_n(\zeta, z)$ будем исходить из тождества

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(\xi_k - \xi)^j}{(\xi_k - z)^{j+1}} \left(\frac{\xi_k - \xi}{\xi_k - z}\right)^s \frac{1}{\xi - z}.$$

Пусть далее $z \in G_n$. Искомое полиномиальное ядро зададим формулой

$$\pi_n(\zeta, z) = \pi_n(\xi_k, z) - \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{j} \operatorname{Re}\{(\xi_k - \zeta)^j K_{[n/j]}^j(\xi_k, z)\}.$$

Обозначим через $l(\zeta)$ наиболее удаленную от точки z дугу окружности $\{\xi : |2\xi - (\zeta + \xi_k)| = |\zeta - \xi_k|\}$, соединяющую точки ξ_k и ζ. Воспользовавшись теперь тождеством

$$\operatorname{Re} \int_{l(\zeta)} \frac{d\xi}{\xi - z} = \ln \left| \frac{\zeta - z}{\xi_k - z} \right| = - \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{j} \operatorname{Re} \left(\frac{\xi_k - \zeta}{\xi_k - z}\right) +$$

$$+ \operatorname{Re} \int_{l(\zeta)} \left(\frac{\xi_k - \xi}{\xi_k - z}\right)^s \frac{d\xi}{\xi - z}$$

и соотношениями (5) — (7), получим

$$\left| \ln \left| \frac{\zeta - z}{\zeta_0 - z} \right| - \pi_n(\zeta, z) \right| \leqslant C_{11} \left| \frac{\rho_{1+1/n}(z)}{z - \xi_k} \right|^p +$$

$$+ C_{12} \left| \frac{\rho_{1+1/n}(\zeta_k)}{z - \xi_k} \right|^s + C_{13} \left| \frac{\xi_k - \zeta}{\xi_k - z} \right|^s \left(1 + \left| \ln \left| \frac{\xi_k - z}{\zeta - z} \right| \right| \right),$$

откуда при достаточно большом $s = s(p, L)$ следует неравенство (4).

Искомый полином зададим формулой

$$T_n(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{G_n} \Delta u_n(\zeta) \pi_n(\zeta, z) \, d\sigma_\zeta,$$

где $\pi_n(\zeta, z)$ — многочленное гармоническое ядро из леммы 2.

Справедливость неравенства (2) несложно устанавливается по аналогии с соответствующими рассуждениями работы [3] путем применения лемм 1, 2 и имеющей место при $|\zeta - z| \geqslant \rho_{1+1/n}(z)$ оценки

$$|\Delta u_n(\zeta)| \leqslant C_{14} \omega[\rho_{1+1/n}(\zeta)]/\rho_{1+1/n}^2(\zeta) \leqslant C_{15} \frac{\omega(|\zeta - z|)}{|\zeta - z|} \frac{1}{|\zeta - z|} \times$$

$$\times \left| \frac{\zeta - z}{\rho_{1+1/n}(\zeta)} \right|^2 \leqslant C_{16} \frac{\omega[\rho_{1+1/n}(z)] \, |\zeta - z|^{C-1}}{\rho_{1+1/n}^{C+1}(z)}.$$

Доказательство теоремы 2 проводится по стандартной схеме доказательства обратных теорем (см., например, [2]), при реализации которой надо воспользоваться следующим элементарно проверяемым с помощью интеграла Пуассона фактом.

Лемма 3. *Пусть L — произвольная жорданова дуга, гармонический полином $Q_n(z)$, $\deg Q_n \leqslant n$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет неравенству*

$$|Q_n(z)| \leqslant \omega[\rho_{1+1/n}(z)], \quad z \in G_n.$$

Тогда при $z \in \bigcup\limits_{\zeta \in L} U\left(\zeta, \frac{1}{4}\rho_{1+1/n}(\zeta)\right)$ *справедлива оценка*

$$|\operatorname{grad} Q_n(z)| \leqslant C\omega[\rho_{1+1/n}(z)]/\rho_{1+1/n}(z).$$

Доказательство теоремы 3. Пусть $u_L \in H^\alpha(L)$, $0 < \alpha < 1/2$. Положим $\psi(w) = \Psi(1/w)$, $|w| \leqslant 1$, $\tilde{u} = u \circ \psi$. Пусть далее $\zeta \in \mathbb{C} \setminus L$, $|\Phi(\zeta)| \leqslant 2$, $w = \psi^{-1}(\zeta)$, $w_L = w/|w|$, $\delta = \operatorname{dist}(\zeta, L)$. Справедлива следующая оценка:

$$|\operatorname{grad} \tilde{u}(w) = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{|t|=1} \frac{\tilde{u}(t) - \tilde{u}(w_L)}{(t-w)^2}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1\delta \int\limits_{|t|=1}\left(1 + \left|\frac{\psi(t) - \psi(w_L)}{\psi(w) - \psi(w_L)}\right|^\alpha\right)\frac{|dt|}{|t-w|^2} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\delta \int\limits_{|t|=1}\left(1 + \left|\frac{t - w_L}{w - w_L}\right|^{2\alpha}\right)\frac{|dt|}{|t-w|^2} \leqslant C_3\frac{\delta^\alpha}{1-|w|}.$$

Так как $|\psi'(w)| \asymp \delta/(1-|w|)$ (см., например, [7], лемма 3), то $|\operatorname{grad} u(\zeta)| \leqslant \leqslant 2|\operatorname{grad} \tilde{u}(w)|/|\psi'(w)| \leqslant C_4\delta^{\alpha-1}$. Положим $l = \{\xi : 1 \leqslant |\Phi(\xi)| \leqslant |\Phi(\zeta)|, \arg\Phi(\xi) = \arg\Phi(\zeta)\}$.

В силу леммы 4 работы [7]

$$|u(\zeta) - u(\zeta_L)| \leqslant \int\limits_l |\operatorname{grad} u(\xi)||d\xi| \leqslant C_5|\zeta - \zeta_L|^\alpha. \tag{8}$$

Пусть теперь z и ζ — произвольные точки. По аналогии со случаем аналитических функций (см., например, [8, с. 52]) можно показать, что для доказательства теоремы 3 достаточно рассмотреть только случай $z \in L$. Согласно (8) $|u(z) - u(\zeta)| \leqslant |u(z) - u(\zeta_L)| + |u(\zeta_L) - u(\zeta)| \leqslant C_6|z-\zeta|^\alpha$. Следовательно, $u \in C^\alpha_\Delta(L)$.

1. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям.— М. : Мир, 1969.— 133 с.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.
3. *Андриевский В. В.* Прямые теоремы теории приближения на квазиконформных дугах // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1980.— **44**, № 2.— С. 243—261.
4. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М. : Мир, 1973.— 342 с.
5. *Мергелян С. Н.* Равномерные приближения функций комплексного переменного // Успехи мат. наук.— 1952.— **7**, вып. 2.— С. 31—122.
6. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей // Мат. сб.— 1977.— **102**, № 3.— С. 331—361.
7. *Андриевский В. В.* О равномерной сходимости полиномов Бибербаха в областях с кусочно-квазиконформной границей // Теория отображений и приближение функций.— Киев : Наук. думка, 1983.— С. 3—18.
8. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев : Наук. думка, 1975.— 271 с.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР,
Донецк

Получено 03.12.85