УДК 517.98.7

Ю. М. Арлинский

Позитивные пространства граничных значений и секториальные расширения неотрицательного симметрического оператора

1. Пусть A — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $\mathcal{D}(A)$, A^* — его сопряженный с областью определения $\mathcal{D}(A^*)$. Индексы дефекта оператора A предполагаются равными.

Определение [1—3]. *Тройка* $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, *где* $\mathcal{H}$ — *гильбертово пространство*, Γ_1, Γ_2 — *линейные отображения* $\mathcal{D}(A^*)$ *в* $\mathcal{H}$, *называется пространством граничных значений (п. г. з.) оператора* A, *если*

1) *для любых* $f, g \in \mathcal{D}(A^*)$

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \tag{1}$$

2) *отображение* $f \to \langle \Gamma_1 f, \Gamma_2 f \rangle$ *из* $\mathcal{D}(A^*)$ в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *сюръективно*.

С п. г. з. $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ свяжем полуторалинейную форму, определенную на $\mathcal{D}(A^*)$

$$\omega(f, g) = (A^*f, g) - (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}}, \tag{2}$$

которая в силу равенства (1) является симметрической.

Известно [2, 3], что если $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — п. г. з., то операторы Γ_1, Γ_2 непрерывно отображают на $\mathcal{H}$ гильбертово пространство $\mathcal{D}(A^*)$ со скалярным произведением $(f, g)_+ = (f, g) + (A^*f, A^*g)$. Кроме того, $\operatorname{Ker}\Gamma_1 \cap \operatorname{Ker}\Gamma_2 = \mathcal{D}(A)$. В дальнейшем примем следующие обозначения: $\operatorname{Ker}\Gamma_j = \mathcal{D}(\tilde{A}_j)$, $\tilde{A}_j = A^* \mid \mathcal{D}(\tilde{A}_j)$, $j = 1, 2$. В [4] отмечено, что $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ — самосопряженные расширения A, трансверсальные в смысле $\mathcal{D}(\tilde{A}_1) + \mathcal{D}(\tilde{A}_2) = \mathcal{D}(A^*)$.

Из (1) и (2) легко выводятся равенства

$$(\Gamma_1 f_2, \Gamma_2 f_1)_{\mathcal{H}} = (\tilde{A}_2 f_2, f_1) - (f_2, \tilde{A}_1 f_1) \quad \forall f_1 \in D(\tilde{A}_1), \quad \forall f_2 \in \mathcal{D}(\tilde{A}_2), \tag{3}$$

$$\omega(f, f) = (\tilde{A}_1 f_1, f_1) + (\tilde{A}_2 f_2, f_2) + 2\operatorname{Re}(\tilde{A}_1 f_1, f_2), \tag{4}$$

где $f \in \mathcal{D}(A^*)$, $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in \mathcal{D}(\tilde{A}_1)$, $f_2 \in \mathcal{D}(\tilde{A}_2)$.

Отметим, что правая часть в (4) зависит только от f. Назовем два п. г. з. $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ и $(\mathcal{H}', \Gamma_1', \Gamma_2')$ эквивалентными, если $\operatorname{Ker}\Gamma_j = \operatorname{Ker}\Gamma_j'$, $j = 1, 2$.

Из (3) и (4) следует, что п. г. з. эквивалентны тогда и только тогда, когда тождественно равны им соответствующие полуторалинейные формы ω и ω', или тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\Gamma_1' = X\Gamma_1$, $\Gamma_2' = X^{*-1}\Gamma_2$, где X — линейный гомеоморфизм $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}'$.

В [4] доказано, что по каждой паре взаимно трансверсальных самосопряженных расширений $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ можно построить п. г. з. $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ такое, что $\operatorname{Ker}\Gamma_j = \mathcal{D}(\tilde{A}_j)$, $j = 1, 2$.

Сформулируем утверждение, которое легко доказывается с помощью теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала.

Предложение 1. *Пусть* $\tilde{A}_1$ — *самосопряженное расширение симметрического оператора* A, Γ_1 — *линейное непрерывное отображение* $\mathcal{D}(A^*)$ *(с + нормой) на некоторое гильбертово пространство* $\mathcal{H}$ *и* $\operatorname{Ker}\Gamma_1 = \mathcal{D}(\tilde{A}_1)$. *Тогда для любого трансверсального к* $\tilde{A}_1$ *самосопряженного расширения* $\tilde{A}_2$ *существует единственный оператор* $\Gamma_2 : \mathcal{D}(A^*) \to \mathcal{H}$ *такой, что* $\operatorname{Ker}\Gamma_2 = \mathcal{D}(\tilde{A}_2)$ *и тройка* $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ *п. г. з. оператора* A.

2. Определение. *П. г. з.* $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ *называется позитивным, если соответствующая квадратичная форма* $\omega(f, f)$ *является на* $\mathcal{D}(A^*)$ *неотрицательной.*

Из (4) ясно, что если $(\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — позитивное п. г. з., то A — неотрицательный оператор, а $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ — его неотрицательные самосопряженные (ps)-расширения.

Выясним условия существования позитивных п. г. з. неотрицательного симметрического оператора.

В [5] показано, что дробно-линейное преобразование $\tilde{S} = (I - \tilde{A}) \times (I + \tilde{A})^{-1}$, $\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1}$ устанавливает биективное соответствие между множеством всех ps-расширений и множеством всех самосопряженных сжимающих (sc)-расширений эрмитова сжатия $S = (I - A) \times (I + A)^{-1}$, $\mathscr{D}(S) = (I + A)\,\mathscr{D}(A)$.

Множество всех sc-расширений описывается формулой [5]

$$\tilde{S} = S_\mu + (S_M - S_\mu)^{1/2} \tilde{X} (S_M - S_\mu)^{1/2}, \tag{5}$$

где S_μ, S_M $(S_\mu \leqslant S_M)$ — «крайние» sc-расширения, $\tilde{X}$ — произвольное неотрицательное сжатие в подпространстве $N_0 = \overline{(S_M - S_\mu) H}$, $N_0 \subseteq N \overset{\text{def}}{=} H \ominus \mathscr{D}(S)$. ps-Расширения $A_\mu = (I - S_\mu)(I + S_\mu)^{-1}$ и $A_M = (I - S_M)(I + S_M)^{-1}$ называются соответственно «жестким» и «мягким» расширениями. При этом A_μ — расширение по Фридрихсу оператора A, и если A положительно определен, то $\mathscr{D}(A_M) = \mathscr{D}(A) \dot{+} \operatorname{Ker} A^*$ [5].

П р е д л о ж е н и е 2 [6]. *Существование трансверсальной пары ps-расширений эквивалентно трансверсальности «жесткого» и «мягкого» расширений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $N = \operatorname{Ker}(A^* + I)$, то $\mathscr{D}(A^*) = \mathscr{D}(\tilde{A}) \dot{+} N$ для любого ps-расширения $\tilde{A}$. Поэтому трансверсальность ps-расширений $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ равносильна сюръективности самосопряженного оператора $L = [(\tilde{A}_1 + I)^{-1} - (\tilde{A}_2 + I)^{-1}] \mid N : N \to N$. Поскольку $\tilde{S}_j = -I + 2(\tilde{A}_j + I)^{-1}$, $j = 1, 2$, то $L = (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)/2 \mid N$. Из (5) получаем

$$(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2) N = N \Leftrightarrow \begin{cases} N_0 = N \\ (S_M - S_\mu) N = N \end{cases} \Leftrightarrow A_\mu \text{ и } A_M \text{ трансверсальны.}$$

Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ — ps-расширения неотрицательного симметрического оператора A. Для того чтобы определенный на $\mathscr{D}(\tilde{A}_1) \times \mathscr{D}(\tilde{A}_2)$ функционал $\tau(f_1, f_2) = (\tilde{A}_1 f_1, f_1) + (\tilde{A}_2 f_2, f_2) + 2\operatorname{Re}(A_1 f_1, f_2)$ был неотрицательным при любых $f_1 \in \mathscr{D}(\tilde{A}_1)$, $f_2 \in \mathscr{D}(\tilde{A}_2)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $(\tilde{A}_1 + I)^{-1} \geqslant (\tilde{A}_2 + I)^{-1}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi_j = (I + \tilde{S}_j)^{-1} f_j = (\tilde{A}_j + I) f_j/2$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\tau(f_1, f_2) = \|\varphi_1 + \varphi_2\|^2 - \|\tilde{S}_1\varphi_1 + \tilde{S}_2\varphi_2\|^2 - 2\operatorname{Re}((\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)\varphi_1, \varphi_2).$$

Обозначим $F = (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)/2$, $G = (\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2)/2$, $x = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$, $y = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$. Тогда

$$0{,}25\,\tau(f_1, f_2) = \|x\|^2 - (x, Fx) + (y, Fy) - \|Fy + Gx\|^2 \overset{\text{def}}{=} W(x, y).$$

Таким образом, неотрицательность τ на $\mathscr{D}(\tilde{A}_1) \times \mathscr{D}(\tilde{A}_2)$ равносильна неотрицательности W на $H \times H$.

Пусть $W(x, y) \geqslant 0$ $\forall x, y \in H$. Полагая $x = 0$, получаем $F \geqslant 0$. Наоборот, пусть $F \geqslant 0$. Поскольку $-I \leqslant G \pm F \leqslant I$, то $G = (I - F)^{1/2} \times M (I - F)^{1/2}$, где M — самосопряженное сжатие в подпространстве

$\overline{(I-F)^{1/2}H}$. Тогда $\forall x, y \in H$ имеем

$$\| Fy + Gx \|^2 = \| Fy \|^2 + 2\mathrm{Re}\,(Fy, (I-F)^{1/2} M (I-F)^{1/2} x) + \| (I-F)^{1/2} \times$$
$$\times M (I-F)^{1/2} x \|^2 \leqslant \| Fy \|^2 + \| F^{1/2} M (I-F)^{1/2} x \|^2 + \| F^{1/2} (I-F)^{1/2} y \|^2 +$$
$$+ \| M (I-F)^{1/2} x \|^2 - \| F^{1/2} M (I-F)^{1/2} x \|^2 \leqslant \| x \|^2 - (x, Fx) + (y, Fy).$$

Отсюда $W(x, y) \geqslant 0 \ \ \forall x, y \in H$. Так как $F = (\tilde{A}_1 + I)^{-1} - (\tilde{A}_2 + I)^{-1}$, то предложение доказано.

Теперь из (4), предложений 1 — 3 следует такая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — неотрицательный симметрический оператор.*

1. *Для того чтобы существовали позитивные п. г. з. оператора A, необходимо и достаточно, чтобы его «жесткое» и «мягкое» расширения были взаимно трансверсальны.*

2. *П. г. з. $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ позитивно тогда и только тогда, когда* $\tilde{A}_1 \geqslant 0$, $\tilde{A}_2 \geqslant 0$, $(\tilde{A}_1 + I)^{-1} \geqslant (\tilde{A}_2 + I)^{-1}$.

Замечание 1. Если $(\mathcal{H}, (\Gamma_1, \Gamma_2)$ — позитивное п. г. з., то из теоремы 1 и предложения 3 $((\tilde{A}_1 + I)^{-1} - (\tilde{A}_2 + I)^{-1}) \,|\, N$ — положительно определенный оператор в N. Поэтому из (5) следует трансверсальность $\tilde{A}_1$ и A_μ, $\tilde{A}_2$ и A_M.

Замечание 2. Если A — положительно определенный оператор, то для положительно определенного самосопряженного расширения $\tilde{A}$ имеем $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(\tilde{A}) \dotplus \mathrm{Ker}\, A^*$. Следовательно, A_μ и A_M взаимно трансверсальны. Пусть $\tilde{P}$ — проектор в $\mathcal{D}(A^*)$ на $\mathcal{D}(\tilde{A})$ параллельно $\mathrm{Ker}\, A^*$, $(\mathcal{H}, \Gamma_M, \tilde{\Gamma})$ — п. г. з. такое, что $\mathrm{Ker}\,\Gamma_M = \mathcal{D}(A_M)$, $\mathrm{Ker}\,\tilde{\Gamma} = \mathcal{D}(\tilde{A})$. Тогда из (4) $\omega(f, g) = (\tilde{A}\tilde{P}f, \tilde{P}g)$, т. е. $(\mathcal{H}, \Gamma_M, \tilde{\Gamma})$ позитивное п. г. з. и $(A^*f, g) = (\tilde{A}\tilde{P}f, \tilde{P}g) + (\Gamma_M f, \tilde{\Gamma} g)_{\mathcal{H}}$. Последнее равенство принято за определение позитивного п. г. з. в случае положительно определенного оператора A в [7].

3. Как известно, всякое подпространство $\Theta \subseteq \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, называется линейным отношением в $\mathcal{H}$. Назовем линейное отношение Θ аккретивным, если $\mathrm{Re}\,(u, v)_{\mathcal{H}} \geqslant 0 \ \forall \langle u, v \rangle \in \Theta$, и m-аккретивным, если Θ не имеет аккретивных расширений. Если для m-аккретивного отношения Θ выполняется равенство $\mathrm{Im}\,(u, v)_{\mathcal{H}} = 0 \ \forall \langle u, v \rangle \in \Theta$, то Θ назовем позитивным самосопряженным.

Пусть $\alpha \in (0, \pi/2]$. m-Аккретивное линейное отношение Θ назовем m — α-секториальным, если $\mathrm{Re}\,(u, v)_{\mathcal{H}} \geqslant \mathrm{ctg}\,\alpha \,|\, \mathrm{Im}\,(u, v)_{\mathcal{H}} \,| \ \ \forall \langle u, v \rangle \in \Theta$; m — 0-секториальное отношение естественно считать позитивным самосопряженным.

Линейный оператор G в $\mathcal{H}$ отнесем к классу $C(\alpha)$, если $\| \sin\alpha G \pm i \cos\alpha I \| \leqslant 1$, $\alpha \in (0, \ \pi/2]$, $C(0)$ — множество всех самосопряженных сжатий. Заметим, что это условие эквивалентно неравенству $\| g \|^2 - \| Gg \|^2 \geqslant \mathrm{ctg}\alpha \,|\, \mathrm{Im}\,(Gg, g) \,| \, \forall g \in \mathcal{H}$.

Для всякого m — α-секториального отношения Θ определено дробно-линейное преобразование $\langle u, v \rangle \to \langle u + v, u - v \rangle$, которое как нетрудно проверить, является графиком оператора G класса $C(\alpha)$. Верно и обратное: если $G \in C(\alpha)$, то $\Theta = \{\langle (I + G) x, (I - G) x \rangle, x \in \mathcal{H}\}$ является m — — α-секториальным линейным отношением. Отсюда следует, что сопряженное линейное отношение Θ^* является m — α-секториальным.

Пусть $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — позитивное п. г. з. оператора A, Θ — m — α-секториальное линейное отношение в $\mathcal{H}$.

Определим собственное расширение $\tilde{A}_\Theta$ [8]:

$$\mathcal{D}(\tilde{A}_\Theta) = \{ f \in \mathcal{D}(A^*) : \langle \Gamma_1 f, \Gamma_2 f \rangle \in \Theta \}, \quad \tilde{A}_\Theta = A^* \,|\, \mathcal{D}(\tilde{A}_\Theta). \tag{6}$$

Тогда $\forall f \in \mathcal{D}(\tilde{A}_\Theta)$

$$\operatorname{Re}(\tilde{A}_\Theta f, f) = \omega(f, f) + \operatorname{Re}(\Gamma_1 f, \Gamma_2 f)_{\mathcal{H}} \geqslant \operatorname{ctg}\alpha\,|\operatorname{Im}(\Gamma_1 f, \Gamma_2 f)_{\mathcal{H}}| =$$

$$= \operatorname{ctg}\alpha\,|\operatorname{Im}(\tilde{A}_\Theta f, f)|.$$

Аналогичное неравенство выполняется и для оператора $\tilde{A}_\Theta{}^* = \tilde{A}_{\Theta^*}$. Поэтому $\tilde{A}_\Theta$ — m — α-секториальное [9] собственное расширение A. Выясним, какими свойствами обладают такие расширения $\tilde{A}_\Theta$ по отношению к $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$.

Пусть M и B — ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве и $B \geqslant 0$.

Обозначим через $\Phi_\alpha(M, B)$ множество операторов вида $X = M + B^{1/2}ZB^{1/2}$, где $Z \in C(\alpha)$ в подпространстве $\overline{\mathcal{R}(B)}$.

Предположим, что $-I \leqslant M \pm B \leqslant I$. Покажем, что в этом случае $\Phi_\alpha(M, B) \subset C(\alpha)$. Действительно, из неравенств $-I \leqslant M \pm B \leqslant I$ следует $M = (I - B)^{1/2}Q(I - B)^{1/2}$, $-I \leqslant Q = Q^* \leqslant I$. Далее $\forall h$ имеем

$$\|Xh\|^2 = \|(I - B)^{1/2}Q(I - B)^{1/2}h\|^2 + 2\operatorname{Re}(B^{1/2}Q(I - B)^{1/2}h,$$

$$(I - B)^{1/2}ZB^{1/2}h) + \|B^{1/2}ZB^{1/2}h\|^2 \leqslant \|Q\,(I - B)^{1/2}h\|^2 - \|B^{1/2}Q(I - B)^{1/2}h\|^2 +$$

$$+ \|B^{1/2}Q(I - B)^{1/2}h\|^2 + \|ZB^{1/2}h\|^2 - \|B^{1/2}ZB^{1/2}h\|^2 + \|B^{1/2}ZB^{1/2}h\|^2 \leqslant \|h\|^2 -$$

$$- \|B^{1/2}h\|^2 + \|ZB^{1/2}h\|^2 \leqslant \|h\|^2 - 2\operatorname{ctg}\alpha\,|\operatorname{Im}(ZB^{1/2}h, B^{1/2}h)| =$$

$$= \|h\|^2 - 2\operatorname{ctg}\alpha\,|\operatorname{Im}(Xh, h)|.$$

Следовательно, $X \in C(\alpha)$. Отметим, что аналогичное доказательство этого факта имеется в [11].

Пусть S — эрмитово сжатие. Оператор $\tilde{S}$ будем называть qsc-расширением S, если $\tilde{S} \supset S$, $\tilde{S}^* \supset S$, $\|\tilde{S}\| \leqslant 1$. В [10] установлено, что множество qsc-расширений класса $C(\alpha)$ оператора S совпадает с $\Phi_\alpha((S_M + S_\mu)/2, (S_M - S_\mu)/2)$.

Если $\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2$ — sc-расширения S и $\tilde{S}_1 \geqslant \tilde{S}_2$, то из доказанного выше следует, что $\Phi_\alpha((\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2)/2, (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)/2) \subseteq \Phi_\alpha((S_M + S_\mu)/2, (S_M - S_\mu)/2)$.

Теорема 2. *Пусть $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — позитивное п. г. з. оператора A. Для того чтобы его собственное расширение $\tilde{A}$ порождалось по формулам* (6) *m — α-секториальным линейным отношением Θ в $\mathcal{H}$, необходимо и достаточно, чтобы его дробно-линейное преобразование $\tilde{S} = (I - \tilde{A})(I + \tilde{A})^{-1}$ принадлежало $\Phi_\alpha((\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2)/2, (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)/2)$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{S}$—qsc-расширение оператора S. Из трансверсальности $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ следует, что $\forall g \in H$ $\exists g_1, g_2 \in H$ такие, что $(I + \tilde{S})g = (I + \tilde{S}_1)g_1 + (I + \tilde{S}_2)g_2$. Отсюда получаем $P_N g_1 = (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)^{-1}(\tilde{S} - \tilde{S}_2)P_N g$, $P_N g_2 = (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)^{-1}(\tilde{S}_1 - \tilde{S})P_N g$, где P_N — ортопроектор на N, $(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)^{-1}$ — обратный оператор к $(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)/N$. Пусть $f = (I + \tilde{S})g$, $f_j = (I + \tilde{S}_j)g_j$, $j = 1, 2$. Тогда $\tilde{A}f = (I - \tilde{S})g$, $\tilde{A}_j f_j = (I - \tilde{S}_j)f_j$ и из (3)

$$(\Gamma_1 f, \Gamma_2 f)_{\mathcal{H}} = 2\,[(P_N g, (\tilde{S} - \tilde{S}_2)P_N g) - ((\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)^{-1}(\tilde{S} - \tilde{S}_2)P_N g,$$

$$(\tilde{S} - \tilde{S}_2)P_N g)]. \tag{7}$$

Если $\operatorname{Re}(\Gamma_1 f, \Gamma_2 f)_{\mathscr{H}} \geqslant \operatorname{ctg}\alpha\,|\operatorname{Im}(\Gamma_1 f, \Gamma_2 f)_{\mathscr{H}}|\ \ \forall f \in \mathscr{D}(\tilde{A})$, то из (7)

$$((\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)^{-1}(\tilde{S} - \tilde{S}_2) P_N g, (\tilde{S} - \tilde{S}_2) P_N g) \leqslant \operatorname{Re}((\tilde{S} - \tilde{S}_2) P_N g, P_N g) - \\ - \operatorname{ctg}\alpha\,|\operatorname{Im}((\tilde{S} - \tilde{S}_2) P_N g, P_N g)| \quad \forall g \in H. \tag{8}$$

Отсюда легко следует $P_N\tilde{S}\,|\,N \in \Phi_\alpha(P_N(\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2)/2\,|\,N,\ (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)/2)$. Поскольку операторы $(I - P_N)\tilde{S}$ и $P_N\tilde{S}(I - P_N)$ не зависят от выбора qsc-расширения эрмитова сжатия S, то $\tilde{S} \in \Phi_\alpha((\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2)/2,\ (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)/2)$. Наоборот, пусть $\tilde{S} \in \Phi_\alpha((\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2)/2,\ (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)/2)$. Тогда выполняется (8), а поэтому из (7) $\operatorname{Re}(\Gamma_1 f, \Gamma_2 f)_{\mathscr{H}} \geqslant \operatorname{ctg}\alpha\,|\operatorname{Im}(\Gamma_1 f, \Gamma_2 f)_{\mathscr{H}}|\ \ \forall f \in \mathscr{D}(\tilde{A})$. Так как $\tilde{S}^* \in \Phi_\alpha((\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2)/2,\ (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)/2)$, то $\Theta = \{\langle \Gamma_1 f, \Gamma_2 f\rangle,\ f \in \mathscr{D}(\tilde{A})\}$ — m — α-секториальное линейное отношение в $\mathscr{H}$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $(\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — позитивное п. г. з. Для того чтобы* ps-*расширение $\tilde{A}$ порождалось по формулам* (6) *позитивным самосопряженным линейным отношением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $(\tilde{A}_1 + I)^{-1} \geqslant (\tilde{A} + I)^{-1} \geqslant (\tilde{A}_2 + I)^{-1}$.*

4. Будем называть п. г. з. $(\mathscr{H}, \Gamma_M, \Gamma_\mu)$ основным, если $\operatorname{Ker}\Gamma_M = \mathscr{D}(A_M)$, $\operatorname{Ker}\Gamma_\mu = \mathscr{D}(A_\mu)$ (предполагается трансверсальность A_M и A_μ).

Пусть $\omega_0(f, f)$ — квадратичная форма, соответствующая основному п. г. з. Любое основное п. г. з. (все они эквивалентны в смысле п. 1) является позитивным. Согласно теореме 2 всякое m — α-секториальное собственное расширение $\tilde{A}$ определяется m — α-секториальным линейным отношением в $\mathscr{H}$ или граничными условиями

$$\mathscr{D}(\tilde{A}) = \{f \in \mathscr{D}(A^*) : (I - G)\Gamma_M f = (I + G)\Gamma_\mu f\}, \tag{9}$$

где $G \in C(\alpha)$ в $\mathscr{H}$.

Теорема 3. *Пусть $(\mathscr{H}, \Gamma_M, \Gamma_\mu)$ — основное п.г.з. Для того чтобы п.г.з. $(\mathscr{H}', \Gamma_1', \Gamma_2')$ было позитивным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\Gamma_1' = X(\Gamma_M - B_1\Gamma_\mu),\ \Gamma_2' = X^{*-1}[(I + B_2B_1)\Gamma_\mu - B_2\Gamma_M], \tag{10}$$

где B_1, B_2 — неотрицательные самосопряженные операторы в $\mathscr{H}$, X — линейный гомеоморфизм $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}'$.

Доказательство. Пусть Γ_j' задаются равенствами (10), $j = 1, 2$; сюръективность отображения $f \to \langle \Gamma_1' f, \Gamma_2' f\rangle$ очевидна.

Для любого $f \in \mathscr{D}(A^*)$ имеем

$$(A^* f, f) - (\Gamma_1' f, \Gamma_2' f)_{\mathscr{H}} = \omega_0(f, f) + (B_1\Gamma_\mu f, \Gamma_\mu f)_{\mathscr{H}} + (B_2\Gamma_M f, \Gamma_M f)_{\mathscr{H}} + \\ + (B_1\Gamma_\mu f, B_2B_1\Gamma_\mu f)_{\mathscr{H}} - 2\operatorname{Re}(B_1\Gamma_\mu f, B_2\Gamma_M f)_{\mathscr{H}} \geqslant \omega_0(f, f) \geqslant 0.$$

Следовательно, $(\mathscr{H}', \Gamma_1', \Gamma_2')$ — позитивное п.г.з.

Наоборот, пусть $(\mathscr{H}', \Gamma_1', \Gamma_2')$ — позитивное п.г.з. Тогда, как уже отмечалось, операторы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$, $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_\mu$ взаимно трансверсальны. Пусть $\Theta_1 = \{\langle \Gamma_M f, \Gamma_\mu f\rangle,\ f \in \mathscr{D}(\tilde{A}_1)\}$ — неотрицательное самосопряженное отношение в $\mathscr{H}$. Поскольку $\Theta_\mu = \mathscr{H} \oplus \{0\}$ и $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_\mu$ трансверсальны, то $\Theta_1 \dotplus \Theta_\mu = \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Отсюда следует, что $\Theta_1 = \{\langle B_1 v, v\rangle,\ v \in \mathscr{H}\}$, где $B_1 \geqslant 0$ и $(\mathscr{H}, \Gamma_M - B_1\Gamma_\mu, \Gamma_\mu)$ — позитивное п.г.з.

Так как $(A_\mu + I)^{-1} \leqslant (\tilde{A}_2 + I)^{-1} \leqslant (\tilde{A}_1 + I)^{-1}$, то согласно следствию из теоремы 2 $\Theta_2 = \{\langle (\Gamma_M - B_1\Gamma_\mu) f, \Gamma_\mu f\rangle,\ f \in \mathscr{D}(\tilde{A}_2)\}$ — неотрицательное самосопряженное отношение в $\mathscr{H}$. Имеем $\Theta_2 \dotplus (\{0\} \oplus \mathscr{H}) = \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$, откуда $\Theta_2 = \{\langle u, B_2 u\rangle,\ u \in \mathscr{H}\}$, где $B_2 \geqslant 0$. Таким образом, $\mathscr{D}(\tilde{A}_2) = \operatorname{Ker}(\Gamma_\mu - B_2\ \times$

$\times(\Gamma_M - B_1\Gamma_\mu))$. Следовательно, справедливы (10) с некоторым оператором X. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\omega(f, f)$ — квадратичная форма, соответствующая позитивному п.г.з. Тогда* $\forall f \in \mathcal{D}(A^*)$

$$\omega(f, f) \geqslant \omega_0(f, f).$$

Теорема 4. *П.г.з. $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является основным тогда и только тогда, когда для соответствующей квадратичной формы ω выполняется условие*

$$\inf_{f_A \in \mathcal{D}(A)} \omega(f - f_A, f - f_A) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(A^*). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $(\mathcal{H}, \Gamma_M, \Gamma_\mu)$ — основное п.г.з., $\omega_0(f, f)$ — квадратичная форма (2). Как и при доказательстве предложения 3 получим $0{,}25 \cdot \omega_0(f, f) = \|x\|^2 + (y, Cy) - (x, Cx) - \|Cy + S_0 x\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} W_0(x, y)$, где $C = (S_M - S_\mu)/2$, $S_0 = (S_M + S_\mu)/2$, $x = ((I + S_M)^{-1} f_M + (I + S_\mu)^{-1} f_\mu)/2$, $y = ((I + S_M)^{-1} f_M - (I + S_\mu)^{-1} f_\mu)/2$, $f = f_M + f_\mu$, $f_M \in \mathcal{D}(A_M)$, $f_\mu \in \mathcal{D}(A_\mu)$. Отсюда $\omega_0(f - f_A, f - f_A) = 4W_0(x - h_S, y)$, где $f_A \in \mathcal{D}(A)$, $h_S = (I + S)^{-1} f_A/2$, $h_S \in \mathcal{D}(S)$.

Воспользуемся следующими равенствами, доказательство которых будет дано в другом месте: $(I - S_0^2)^{1/2} = C$, $P_0 S_0 P_0 (I - S_0^2)^{1/2} = 0$, где P_0 — ортопроектор в H на подпространство $H \ominus (I - S_0^2)^{1/2} \mathcal{D}(S)$. Отсюда имеем

$$W_0(x - h_S, y) = \|(I - S_0^2)^{1/2}(x - h_S)\|^2 - 2\operatorname{Re}(S_0(x - h_S), (I - S_0^2)^{1/2} P_0 \times$$
$$\times (I - S_0^2)^{1/2} y) + \|P_0 (I - S_0^2)^{1/2} y\|^2 - \|P_0 (I - S_0^2)^{1/2} x\|^2 - \|(I - S_0^2)^{1/2} P_0 \times$$
$$\times (I - S_0^2)^{1/2} y\|^2 = \|(I - S_0^2)^{1/2}(x - h_S) - S_0 P_0 (I - S_0^2)^{1/2} y\|^2 - \|P_0 (I - S_0^2)^{1/2} x\|^2,$$
$$\inf_{h_S \in \mathcal{D}(S)} \|(I - S_0^2)^{1/2}(x - h_S) - S_0 P_0 (I - S_0^2)^{1/2} y\|^2 = \|P_0 (I - S_0^2)^{1/2} x\|^2.$$

Поэтому $\inf\limits_{h_S \in \mathcal{D}(S)} W_0(x - h_S, y) = 0$ $\forall x, y \in H$. Следовательно, $\inf\limits_{f_A \in \mathcal{D}(A)} \omega_0(f - f_A, f - f_A) = 0$ $\forall f \in \mathcal{D}(A^*)$.

Пусть (11) выполнено, тогда $\omega(f, f) \geqslant 0$ $\forall f \in \mathcal{D}(A^*)$ и $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — позитивное п.г.з. По теореме 3 выполнены равенства (10), где $(\mathcal{H}, \Gamma_M, \Gamma_\mu)$ — некоторое основное п.г.з.

Как следует из доказательства теоремы 3, $\omega(f, f) \geqslant (B_1 \Gamma_\mu f, \Gamma_\mu f)_{\mathcal{H}}$ $\forall f \in \mathcal{D}(A^*)$. Следовательно, из (11) имеем $B_1 \equiv 0$. Тогда $\omega(f, f) \geqslant (B_2 \Gamma_M f, \Gamma_M f)_{\mathcal{H}}$ $\forall f \in \mathcal{D}(A^*)$, и снова $B_2 \equiv 0$. Поэтому $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — основное п.г.з. Теорема доказана.

В [4] для п.г.з. $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ определена функция Вейля $M(z)\Gamma_2 f_z = \Gamma_1 f_z$, где $f_z \in N_z = \operatorname{Ker}(A^* - zI)$.

Рассмотрим функцию Вейля $M_0(z)$, связанную с основным п.г.з. $(\mathcal{H}, \Gamma_M, \Gamma_\mu)$ неотрицательного A.

Предложение 4. *Для любого $a > 0$ и при любом $f \in \mathcal{D}(A^*)$ справедливо равенство*

$$\inf_{f_A \in \mathcal{D}(A)} [\omega_0(f - f_A, f - f_A) + a\|f - f_A\|^2 = -(M_0(-a)\Gamma_\mu f, \Gamma_\mu f)_{\mathcal{H}}. \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим неотрицательный оператор $A^{(a)} = A + aI \Rightarrow \mathcal{D}(A_\mu^{(a)}) = \mathcal{D}(A_\mu)$, $\mathcal{D}(A_M^{(a)}) = \mathcal{D}(A) \dotplus N_{-a}$. Пусть $(\mathcal{H}, \Gamma_M^{(a)}, \Gamma_\mu)$ — основное п.г.з. оператора $A^{(a)}$, которое также п.г.з. оператора A. Согласно [4], $\Gamma_M^{(a)} = \Gamma_M + K_a \Gamma_\mu$, где $K_a = K_a^*$. Отсюда и из определения функции Вейля получаем $K_a = -M_0(-a)$.

Для квадратичной формы $\omega_0^{(a)}$, соответствующей п.г.з. $(\mathcal{H}, \Gamma_M^{(a)}, \Gamma_\mu)$, имеем $\omega_0^{(a)}(f, f) = \omega_0(f, f) + a\|f\|^2 + (M_0(-a)\Gamma_\mu f, \Gamma_\mu f)_{\mathcal{H}}$. По теореме 4 $\inf\limits_{f_A \in \mathcal{D}(A)} \omega_0^{(a)}(f - f_A, f - f_A) = 0$. Отсюда следует (12).

Замечание 3. Из теоремы 4 и предложения 4 следует, что $-M_0(-a)$ — неубывающая оператор-функция на $(0, \infty)$ и $\lim\limits_{a \downarrow 0} (M_0(-a)v, v) = 0$ $\forall v \in \mathcal{H}$ [4].

5. С помощью предложения 4 теперь можно описать собственные максимальные секториальные расширения с вершиной в точке $-a$ и полууглом α [9], где $a > 0$, $\alpha \in [0, \pi/2]$, которые в несколько ином виде описаны в [11, 12].

Пусть $(\mathcal{H}, \Gamma_M, \Gamma_\mu)$ — основное п. г. з., $M_0(z)$ — функция Вейля. Будем говорить, что линейное отношение Θ в $\mathcal{H}$ удовлетворяет условию $(a - \alpha)$, если $\mathrm{Re}(u - M_0(-a)v, v)_{\mathcal{H}} \geqslant \mathrm{ctg}\,\alpha \,|\, \mathrm{Im}(u, v)_{\mathcal{H}} |$ $\forall \langle u, v\rangle \in \Theta$ и не допускает расширений с этим свойством.

Предложение 5. *Для того чтобы линейное отношение Θ порождало по формулам (6) m-секториальное собственное расширение с вершиной в $-a$ и полууглом α, необходимо и достаточно, чтобы Θ удовлетворяло условию $(a - \alpha)$.*

Доказательство. Если $\mathrm{Re}(\tilde{A}f, f) + a\|f\|^2 \geqslant \mathrm{ctg}\,\alpha\,|\,\mathrm{Im}(\tilde{A}f, f)|$ $\forall f \in \mathcal{D}(\tilde{A})$, то $\forall f_A \in \mathcal{D}(A)$ $\omega_0(f - f_A, f - f_A) + a\|f - f_A\|^2 + \mathrm{Re}(\Gamma_M f, \Gamma_\mu f)_{\mathcal{H}} \geqslant \mathrm{ctg}\,\alpha\,|\,\mathrm{Im}(\Gamma_M f, \Gamma_\mu f)_{\mathcal{H}}|$. Из предложения 4 получим, что $\Theta = \{\langle\Gamma_M f, \Gamma_\mu f\rangle, f \in \mathcal{D}(\tilde{A})\}$ удовлетворяет условию $(a - \alpha)$. Достаточность очевидна. Назовем собственное m-аккретивное расширение $\tilde{A}$ экстремальным, если

$$\inf_{f_A \in \mathcal{D}(A)} \mathrm{Re}(\tilde{A}(f - f_A), f - f_A) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(\tilde{A}).$$

На основании теоремы 4 нетрудно увидеть, что граничные условия (9) задают экстремальное расширение тогда и только тогда, когда G — изометрия. В частности, экстремальное ps-расширение задается условиями $P\Gamma_M f = 0$, $(I - P)\Gamma_\mu f = 0$, где P — ортопроектор в $\mathcal{H}$.

1. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки.— 1975.— **17**, № 1.— С. 41—48.
2. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб.— 1976.— **100**, № 2.— С. 210—216.
3. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 283 с.
4. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией.— Донецк, 1985.— 50 с.— (Препринт/АН УССР. ДонФТИ-85-9 (104)).
5. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения. I, II // Мат. сб.— 1947.— **20**, № 3.— С. 431—495; **21**, № 3.— С. 365—404.
6. *Арлинский Ю. М.* Об аккретивных (*)-расширениях положительного симметрического оператора // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1980.— № 11.— С. 3—5.
7. *Кочубей А. Н.* О расширениях положительного определенного симметрического оператора // Там же.— 1979.— № 3.— С. 168—171.
8. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи // Спектральный анализ дифференц. операторов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 106—131.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
10. *Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р.* О секториальных расширениях положительных эрмитовых операторов и их резольвентах // Докл. АН АрмССР.— 1984.— **79**, № 5.— С. 199—202.
11. *Колманович В. Ю., Маламуд М. М.* Расширения секториальных операторов и дуальных пар сжатий.— Донецк, 1985.— 57 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 4428-85 Деп.
12. *Деркач В. А., Маламуд М. М., Цекановский Э. Р.* Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция.— Донецк, 1986.— 16 с.— Деп в УкрНИИНТИ. № 214-УК87.

Ворошиловгр. машиностроит. ин-т

Получено 26.12.85