УДК 510.6, 681.3.06

ЛОГІКИ, ОРІЄНТОВАНІ НА СПЕЦИФІКАЦІЇ ПРОГРАМ

М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк, Л.Л. Омельчук

Кафедра теорії та технології програмування Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
м. Київ, тел. (044) 259 0519

e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua, sssh@unicyb.kiev.ua, ttp@unicyb.kiev.ua.

Розглянуті композиційно-номінативні логіки, орієнтовані на специфікації програм. Такі логіки будуються в семантико-синтаксичному стилі на основі композиційно-номінативного підходу. Пропонується спектр композиційно-номінативних логік різних рівнів абстрактності та загальності. Для логік еквітонних квазіарних предикатів на основі секвенційних числень доведені теореми про визначність. На базі аксіоматичної системи специфікацій програм над метаномінативними даними побудовано прототип системи автоматизації доведення теорем теорії МНД.

Composition nominative logics oriented on program specification are considered. Such logics based on composition nominative approach are constructed in a semantic-syntactic style. The spectrum of logics of various abstraction and generality levels is developed. The definability theorems are proved based on the sequent calculi for logics of equitone quasiare predicates. The prototype of automatic theorem prover is constructed for the axiomatic system of program specification over metanominative data.

Вступ

Розвиток інформаційних технологій та програмування веде до розширення сфери застосування математичної логіки. Стосовно загальносвітоглядного аспекту поняття і методів математичної логіки дають обґрунтування правильності тих чи інших способів отримання істинного знання. До прагматичного аспекту апарат математичної логіки належить до основних засобів моделювання різноманітних предметних областей, він є основою, ядром сучасних інформаційних та програмних систем, потужним засобом специфікацій програм. Проблема побудови адекватних логічних формалізмів специфікацій програм в наш час набуває особливої актуальності. Для вирішення такої проблеми дуже плідним нам видається композиційно-номінативний підхід [1]. Основна мета підходу полягає в побудові формальних моделей програм на різних рівнях абстрактності та загальності. Він дає змогу побудувати широкий спектр логічних формалізмів на єдиній з програмуванням концептуальній основі.

Згідно композиційно-номінативного підходу логіки будуємо в семантико-синтаксичному стилі. Це означає, що спочатку фіксуємо рівень абстракції розгляду предметних областей. Такі рівні відрізняються трактуванням рівня абстракції множини даних. Потім будуємо відповідні розглянутому рівню абстракції математичні моделі предметних областей, які задають семантичні аспекти логік. Семантичними моделями композиційно-номінативних логік є предикатні композиційно-номінативні системи (ПКНС) [2]. Основою ПКНС є композиційні алгебри предикатів. Нарешті, будуємо формально-аксіоматичні логічні числення, що задають синтаксичні аспекти логік. Відомі дві основні різновидності таких систем – Гільбертівські (формальні системи) та Генценівські (секвенційні системи).

1. Спектр композиційно-номінативних логік

Побудову композиційно-номінативних логік починаємо з гранично абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи.

На ***пропозиційному*** рівні дані трактуються гранично абстрактно, як "чорні" скриньки. На цьому рівні предикати мають вигляд $A \to \{T, F\}$, де A – множина абстрактних даних.

Базовими композиціями фінітарних пропозиційних логік є Клінієві композиції диз'юнкції $\vee$ та заперечення $\neg$.

Базовими композиціями інфінітарних пропозиційних логік [3] є інфінітарні множинні диз'юнкція $\vee_K$, кон'юнкція $\&_K$ та композиція заперечення $\neg_K$.

Сингулярний рівень може трактуватися як гранична конкретизація пропозиційного. У цьому випадку дані трактуються гранично конкретно, як "білі" скриньки. На сингулярному рівні фіксується єдиний клас даних, що пояснює його назву.

Композиціями сингулярного рівня є максимально конкретні аплікативні композиції. Практично кожний логічний засіб може трактуватися як аплікативна композиція. Для дослідження сингулярних логік збудована [3] спеціальна інфінітарна алгебра сингулярних композицій Кліні.

Подальший розвиток приводить до класів логік, для яких рівень розгляду даних є синтезом двох перших рівнів. На цьому рівні дані розглядаються як "сірі" скриньки, побудовані з "білих" і "чорних". Такі дані називаються номінативними. Вони будуються індуктивно із множини предметних імен та множини предметних значень. Відповідні логіки будемо відносити до ***номінативного*** рівня, який дуже багатий і розпадається на низку підрівнів.

На рівні ***іменних множин*** дані – це однозначні відображення типу $V\to A$ із множини предметних імен V у множину предметних значень A. Такі 1-рівневі однозначні номінативні дані називають іменними множинами (ІМ). Множину всіх V-ІМ над A позначаємо ${}^{V}\!A$.

Функції, задані на іменних множинах, називають *квазіарними*.

Для логіки природно розглядати квазіарні функції двох типів.

Відображення вигляду ${}^{V}\!A\to\{T, F\}$ назвемо V-квазіарними предикатами на A.

Відображення вигляду ${}^{V}\!A\to A$ назвемо V-квазіарними функціями на A.

Множини V-квазіарних предикатів та функцій на A позначаємо відповідно Pr^{A} та Fn^{A}.

V-квазіарний предикат P (частково) істинний, якщо для довільних $d\in {}^{V}\!A$ із умови $P(d)\downarrow$ випливає $P(d)=T$.

Найабстрактнішими серед логік номінативного рівня є **реномінативні** логіки. Починаючи з реномінативного рівня можна перейменовувати компоненти даних. Це дає змогу ввести композицію реномінації (перейменування).

Фінітарна реномінативна логіка запропонована в [4]. Базовими композиціями фінітарних реномінативних логік є $\vee, \neg$ та реномінація $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$. Для таких логік побудовані числення Гільбертівського типу та Генценівського типу, доведені коректність і повнота таких числень.

Інфінітарна реномінативна логіка екваційного типу запропонована в [5]. Базовими композиціями інфінітарних реномінативних логік є $\vee_K$, $\&_K$, $\neg_K$ та інфінітарна реномінація $\boldsymbol{R}^{\rho}$. Побудоване екваційне числення інфінітарної реномінативної логіки, доведені його коректність і повнота.

На **кванторному** рівні можна застосовувати квазіарні предикати до всіх предметних значень. Це дозволяє ввести композиції квантифікації $\exists\boldsymbol{x}$ та $\forall\boldsymbol{x}$.

Фінітарні логіки кванторного рівня досліджувались, зокрема, в [6–8]. Базовими композиціями таких логік є $\vee, \neg, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists\boldsymbol{x}$.

Інфінітарна логіка кванторного рівня запропонована в [9]. Базовими композиціями інфінітарних кванторних логік є $\vee_K$, $\&_K$, $\neg_K$, $\boldsymbol{R}^{\rho}$, $\exists\boldsymbol{x}$.

На **кванторно-екваційному** рівні з’являються можливості ототожнення і розрізнення значень за допомогою спеціальних предикатів рівності $=_{xy}$.

Фінітарні логіки кванторно-екваційного рівня досліджені в [10]. Базовими композиціями таких логік є $\vee$, $\neg, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists\boldsymbol{x}$.

На **функціональному** рівні маємо розширені можливості формування нових аргументів для функцій та предикатів. Це дає змогу ввести композицію суперпозиції $\boldsymbol{S}^{\bar{x}}$. Базовими композиціями функціонального рівня є $\vee, \neg, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}^{\bar{x}}$.

Для роботи з окремими компонентами даних в множині Fn^{A} природно виділити множину спеціальних функцій деномінації (розіменування) $Nf^{A}=\{'\boldsymbol{v}\mid v\in V\}$. При введенні функцій розіменування $'\boldsymbol{x}$ композиції реномінації можна промоделювати за допомогою суперпозиції, тому базовими композиціями функціонального рівня вважаємо $\vee, \neg, \exists\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}^{\bar{x}}$.

На **функціонально-екваційному** рівні можна ототожнювати і розрізняти предметні значення. Це дає змогу додатково ввести спеціальну композицію рівності **=**. Базовими композиціями функціонально-екваційного рівня є $\vee, \neg, \exists\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}^{\bar{x}}$, **=**.

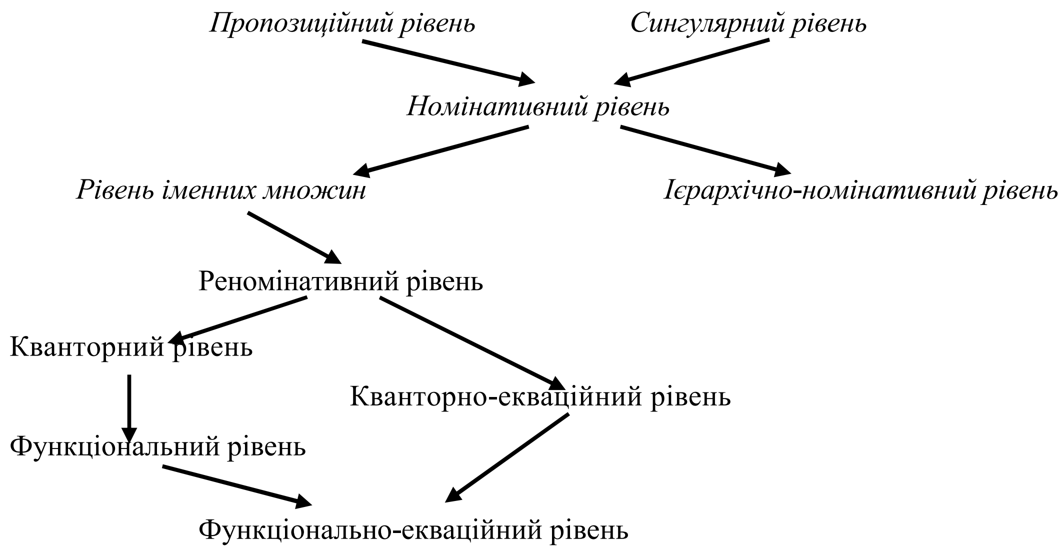
Логіки функціонального та функціонально-екваційного рівня досліджувались, зокрема, в [11–13].

На наступному рівні абстракції елементи множини A можна розглядати як ***ієрархічні номінативні*** дані. Відповідні логіки названі логіками номінативних даних (ЛНД). Такі логіки досліджені в [14].

ЛНД будуються у стилі теорії допустимих множин на основі властивостей відношення номінативної належності. Доведена коректність (несуперечливість) аксіоматичної теорії номінативних даних.

На основі ЛНД визначається клас багатозначних натурально (абстрактно) обчислюваних функцій над номінативними даними. Такий клас можна подати [14] за допомогою **Σ**-предикатів ЛНД.

Наведемо ієрархію композиційно-номінативних логік часткових предикатів за рівнем абстракції розгляду.



2. Логіки квазіарних предикатів

Семантичною основою логік квазіарних предикатів є композиційні алгебри квазіарних предикатів (Pr^A, C). Для логік функціонального та функціонально-еквабційного рівнів такою основою є композиційні алгебри квазіарних функцій і предикатів ($Pr^A \cup Fn^A$, C). При фіксуванні множини базових композицій композиційна алгебра визначається алгебраїчною системою (АС) $\mathcal{A} = (A, Pr^A)$. Для функціонального та функціонально-еквабційного рівнів така АС набуває вигляду $\mathcal{A} = (A, Pr^A \cup Fn^A)$.

Побудова композиційної алгебри дає змогу задати [13] мову логіки відповідного рівня. Формули мови логіки є термами такої предикатної алгебри.

Для формул мови логіки природним чином вводимо [13, 15] поняття:

– істинності формули Φ на моделі (АС) $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models \Phi$;

– всюди істинності формули Φ: $\models \Phi$;

– логічного наслідку $\models$, слабкого логічного наслідку $\Vert\!\models$;

– логічної еквівалентності $\sim$;

– логічного наслідку для множин формул $\models$.

Клас квазіарних предикатів дуже потужний, для логік квазіарних предикатів не діють деякі важливі закони класичної логіки. Наприклад, в загальному випадку квазіарних предикатів маємо $\models \Phi \Rightarrow \models \forall x \Phi$, але не завжди $\models \forall x \Phi$. Таким чином, для збереження основних властивостей класичної логіки клас квазіарних предикатів варто обмежити.

Природне обмеження задається властивістю еквітонності, яка означає, що значення відображення не змінюється при розширенні, поповненні даних.

Предикат *P еквітонний* (ЕП), якщо для довільних $d, d' \in {}^V\!A$ із $d' \supseteq d$ та $P(d)\downarrow$ випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Найближчими до класичної логіки є логіки повнототальних еквітонних предикатів (ПЕП). Повнототальність означає визначеність предикату на максимальних даних – V-повних ІМ.

V-повна ІМ – це тотальна однозначна функція із V в A.

Множину всіх V-повних ІМ над A позначимо A^V.

Предикат P *повнототальний*, якщо $P(d)\downarrow$ для всіх $d \in A^V$.

Логіки повнототальних еквітонних предикатів названі [8] неокласичними (НКЛ), оскільки вони зберігають основні закони та правила виведення класичної логіки при істотному розширенні класу моделей.

Логіки еквітонних предикатів зберігають основні закони класичної логіки, але для них вже не діють деякі правила виведення (modus ponens), порушуються деякі властивості класичної логіки.

Наприклад, для конкретних семантичних моделей можливо $\mathcal{A} \models$P, $\mathcal{A} \models$P→Q, але $\mathcal{A} \not\models$Q.

Можливо також $\mathcal{A} \models$P↔Q, $\mathcal{A} \models$Q↔S, але $\mathcal{A} \not\models$P↔S.

Крім того, для логіки ЕП не завжди із $\Phi \models \Psi$ випливає $\Phi \Vert\!\models \Psi$.

Клас моделей логіки ЕП істотно ширший за клас моделей логіки ПЕП.

Семантичні властивості логіки ЕП фактично відтворюють [13] властивості композицій. Зокрема, властивості, які не використовують реномінації та суперпозиції, цілком аналогічні відповідним властивостям класичної логіки предикатів.

Для логіки ЕП справджуються [13] теореми семантичної еквівалентості та рівності, а стосовно відношення логічного наслідку для множин формул – теорема про заміну еквівалентних [15].

Для формул класичної логіки істотними є тільки їх *вільні* предметні імена, від яких *може залежати* значення відповідних предикатів. Для логік ЕП важлива *неістотність* предметних імен. Тому для базових предикатів логіки ЕП будемо вказувати множину *неістотних* імен, від яких *не залежить* значення таких предикатів. Можливість виконання еквівалентних перетворень довільних формул вимагає наявності нескінченної множини тотально неістотних імен, тобто імен, неістотних для кожного $p \in Ps$. Таким чином, семантичною основою логіки ЕП є композиційні алгебри еквітонних квазіарних предикатів з додатковою вимогою наявності нескінченної множини тотально неістотних предметних імен.

Для формул логіки ЕП визначаються субнормальні (різнокванторні), нормальні, квазізамкнені формули. Доводиться [13, 15], що для кожної формули можна збудувати еквівалентні їй різнокванторну та нормальну формули.

Квазізамкнені формули є синтаксичними аналогами замкнених формул класичної логіки, але семантичними аналогами їх вважати не можна. Квазізамкнені формули необов'язково інтерпретуються як константні предикати, хоча для класичної логіки кожна замкнена формула на кожній АС завжди інтерпретується як тотожна істина або тотожна фальш. Справа в тому, що до складу формули логіки квазіарних предикатів можуть входити предикатні символи, для яких множини істотних імен нескінченні.

Специфічну властивість квазізамкнених формул логіки ЕП описує наступна

Теорема 1. Нехай формула Φ квазізамкнена, її пропозиційна схема (пропозиційна формула, отримана із Φ опусканням усіх символів, окрім предикатних символів та символів пропозиційних зв'язок) не тавтологія і не суперечність, причому □ не містить спеціальних предикатних символів із явно виділеними істотними іменами (наприклад, $=_{xy}$). Тоді існують АС $\mathsf{A} = (A, I)$ та $d_1, d_1 \in {}^{V}A$ такі, що $\Phi_{\mathsf{A}}(d_1) = T$ та $\Phi_{\mathsf{A}}(d_2) = F$.

Можливість для формули бути залежною від нескінченної множини предметних імен є визначальною властивістю логіки квазіарних предикатів, зокрема логіки ЕП, що істотно відрізняє її від класичної логіки.

Для логік повнототальних ЕП (неокласичних логік) будуються аксіоматичні системи Гільбертівського типу, на їх основі доводяться [7, 12] теореми коректності (несуперечливості) та повноти. Більше того, можна говорити [8] про ізоморфне вкладення класичної логіки в неокласичну. Це випливає з того, що всі аксіоми класичної логіки виводяться в неокласичній логіці, правила виведення класичної логіки моделюються в неокласичній логіці. Звідси отримуємо моделювання виведень формул класичної логіки в неокласичній.

Проте універсального моделювання класу формул неокласичної логіки в класі формул класичної логіки не існує. Причина полягає в тому, що кількість істотних змінних для формул неокласичної логіки може бути нескінченною. Але ми можемо зробити обмежене моделювання, тому що, як зазначено вище, кожну формулу неокласичної логіки можна звести до еквівалентної їй псевдокласичної нормальної форми, використовуючи додаткові тотально неістотні предметні імена.

Відмова від modus ponens для загального випадку логік ЕП веде до необхідності проводити дослідження синтаксичних властивостей таких логік на базі не Гільбертівських, а Генценівських систем – секвенційних числень. Семантичною основою побудови таких числень є властивості відношення логічного наслідку для множин формул. Такі числення збудовані [15–18] для логік ЕП відповідного рівня.

Для секвенційних числень доведені теореми коректності та повноти.

Теорема 2 (теорема коректності). Нехай секвенція $\vdash \mathbf{\Gamma} \dashv \mathbf{\Delta}$ вивідна. Тоді $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

Теорема 3 (теорема повноти). Нехай $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$. Тоді секвенція $\vdash \mathbf{\Gamma} \dashv \mathbf{\Delta}$ вивідна.

Природним узагальненням еквітонних предикатів є [19] **локально-еквітонні предикати** (ЛЕП). Для локально-еквітонних предикатів вимагається збереження значення при розширенні даних лише на скінченну кількість іменованих компонент.

Предикат P локально-еквітонний, якщо для довільних $d, d' \in {}^{V}A$ із того, що $P(d)\downarrow$, $d' \supset d$ та $d' \setminus d$ скінченна, випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Клас ЛЕП є розширенням класу ЕП. Справді, предикат, істинний на всіх скінченних ІМ та хибний на всіх нескінченних ІМ, є нееквітонним ЛЕП.

Семантичні властивості ЛЕП аналогічні властивостям ЕП. Клас моделей логіки ЛЕП є розширенням класу моделей логіки еквітонних предикатів.

Логіки, орієнтовані на такі особливості предметних областей, як невизначеність, неповнота наявної інформації, базуються на класах предикатів, визначених на даних з неповною інформацією. Такими є [20] **еквісумісні предикати** (ЕСП) та **локально-еквісумісні предикати** (ЛЕСП).

Еквісумісність предиката P означає, що при можливості розширення різних даних (сумісність даних) до одного більшого даного, значення P на таких даних повинні співпадати. При локально-еквісумісності вимагаємо збереження значень лише для розширень скінченною інформацією.

Еквісумісні та локально-еквісумісні предикати є узагальненнями еквітонних та локально-еквітонних предикатів. Відомі [20, 21] приклади нееквітонних, але еквісумісних предикатів та приклади локально-еквісумісних предикатів, які не є локально-еквітонними та не є еквісумісними.

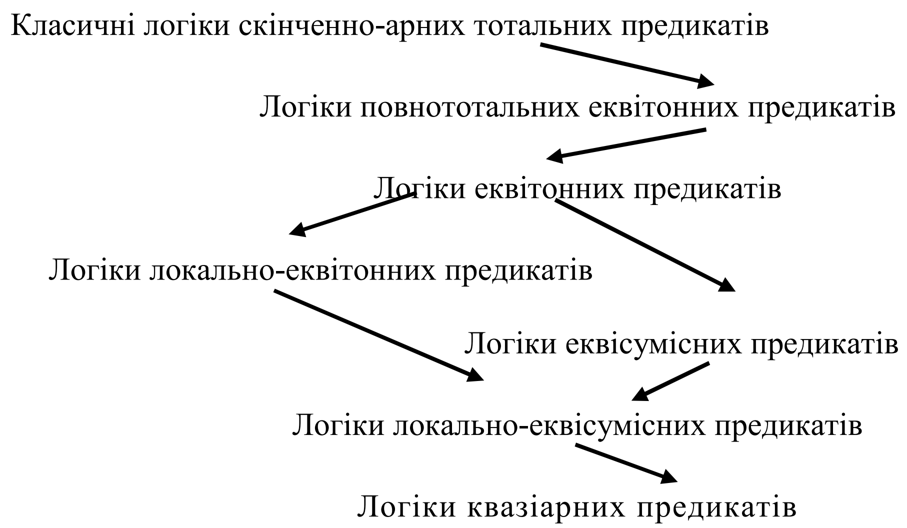
Семантичні властивості логік ЕСП та ЛЕСП аналогічні відповідним властивостям логік ЕП та ЛЕП. Класи семантичних моделей логік еквісумісних та локально-еквісумісних предикатів ще ширші, хоча ці логіки зберігають основні закони класичної логіки.

Для логік ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП збудовані [19, 20] числення секвенційного типу, для таких числень доведені теореми коректності та повноти.

Із теореми повноти випливає [15] низка важливих властивостей логік ЕП, ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП, зокрема принцип компактності, теорема про існування моделі. На цій основі розглядаються питання семантичної та синтаксичної несуперечливості, взаємної суперечливості та взаємної несуперечливості множин формул.

Зауважимо, що секвенційні числення логік ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП ідентичні секвенційним численням логік ЕП. Це засвідчує той факт, що синтаксичні властивості логік ЛЕП, ЕСП та ЛЕСП аналогічні синтасичним властивостям логік ЕП. У той же час при переході від логік ЕП до логік ЛЕП та логік ЕСП, від логік ЛЕП та логік ЕСП до логік ЛЕСП ми отримуємо все ширші класи семантичних моделей.

Наведемо тепер ієрархію логік квазіарних предикатів за обмеженнями на клас предикатів.



3. Інтерполяційна теорема. Теореми про визначність

Одним з найважливіших результатів математичної логіки є інтерполяційна теорема [22, 23]). Вона справджується також [24] для логіки ЕП.

Теорема 4 (інтерполяційна теорема). Нехай секвенція $\dashv\Psi\to\Xi$ має виведення. Тоді існує формула Φ сигнатури $\sigma(\Phi)\subseteq\sigma(\Psi)\cap\sigma(\Xi)$ така, що секвенції $\dashv\Psi\to\Phi$ та $\dashv\Phi\to\Xi$ мають виведення.

Таку Φ називають інтерполяційною формулою або інтерполянтом.

При $\sigma(\Psi)\cap\sigma(\Xi)=\varnothing$ твердження теореми може бути невірним (це відзначено, зокрема, в [22]). Наприклад, нехай Ψ та Ξ – це формули $\neg p\vee p$ та $\neg q\vee q$, де $p, q\in Ps$. Тоді інтерполянтом Φ буде всюди істинна формула, але при умові $\sigma(\Phi)\subseteq\sigma(\Psi)\cap\sigma(\Xi)=\varnothing$ такої формули Φ не існує, оскільки її просто немає з чого будувати.

Як і у випадку класичної логіки [23], для логіки ЕП доводиться загальніша

Теорема 5. Нехай секвенція $\mathbf{\Sigma}=\mathbf{\Sigma_1}, \mathbf{\Sigma_2}$ має виведення $\boldsymbol{\delta}$. Тоді існує формула Φ сигнатури $\sigma(\Phi)\subseteq\sigma(\mathbf{\Sigma_1})\cap\sigma(\mathbf{\Sigma_2})$ така, що за $\boldsymbol{\delta}$ можна збудувати виведення $\boldsymbol{\delta_1}$ для секвенції $\dashv\Phi, \mathbf{\Sigma_1}$ та виведення $\boldsymbol{\delta_2}$ для секвенції $\vdash\Phi, \mathbf{\Sigma_2}$.

Теорема доводиться індукцією за довжиною виведення.

Розглянемо співвідношення між двома різними уточненнями визначення одного поняття в термінах інших понять.

Одне уточнення – семантичне, або неявне. Його суть: поняття (предикатний символ) q *неявно* визначається через поняття $p_1,\ldots,p_n$ в теорії (множині формул) $\mathbf{\Gamma}$, якщо для кожних моделей істинності $\mathbf{\Gamma}$, узгоджених у тому розумінні, що в них $p_1,\ldots,p_n$ інтерпретуються однаково, маємо однакові інтерпретації для q.

Друге уточнення – синтаксичне, або явне. Його суть: поняття q *явно* визначається в $\mathbf{\Gamma}$ через поняття $p_1,\ldots,p_n$, якщо таке визначення є логічним наслідком $\mathbf{\Gamma}$.

Для класичної логіки еквівалентність явного та неявного визначень одного поняття в термінах інших понять – це теорема Бета про визначність. Аналогічний результат справджується і для логіки квазіарних еквітонних предикатів.

Розглядаємо мову певної сигнатури, множини формул мови, семантичні моделі мови – неокласичні АС відповідної сигнатури.

Будемо дотримуватись позначень роботи [15].

Нехай $\overline{p}\subseteq Ps$ – деяка множина предикатних символів мови.

Моделлю істинності множини формул $\mathbf{\Gamma}$ назвемо довільну АС $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I})$ таку, що для кожних $d\in {}^{V}\!A$ та $\Phi\in\mathbf{\Gamma}$ маємо $\Phi_A(d)\cong T$.

Модель $\boldsymbol{A}$ *еквітонна* (*локально-еквітонна*) якщо для кожного $p\in Ps$ предикат p_A еквітонний (локально-еквітонний).

Моделі істинності $\boldsymbol{A}=(M, \boldsymbol{I_A})$ та $\boldsymbol{B}=(M, \boldsymbol{I_B})$ множини формул $\mathbf{\Gamma}$ $\overline{p}$ *-тотожні*, якщо для кожного $p\in\overline{p}$ маємо $p_{\boldsymbol{A}}\cong p_{\boldsymbol{B}}$.

Предикатний символ q *семантично визначний через предикатні символи* $\{p_1,\ldots,p_n\}$, де $q\notin\{p_1,\ldots,p_n\}$, якщо для кожних $\{p_1,\ldots,p_n\}$-тотожних еквітонних моделей істинності $\boldsymbol{A}=(M,\boldsymbol{I_A})$ та $\boldsymbol{B}=(M,\boldsymbol{I_B})$ множини формул $\boldsymbol{\Gamma}$ маємо $q_{\boldsymbol{A}}\cong q_{\boldsymbol{B}}$.

Предикатний символ q *синтаксично визначний через предикатні символи* $\{p_1,\ldots,p_n\}$ *в множині формул* $\boldsymbol{\Gamma}$, якщо існує формула Φ із $\sigma(\Phi)=\{p_1,\ldots,p_n\}$ така, що $\boldsymbol{\Gamma}\models q\leftrightarrow\Phi$.

Теорема 6. Нехай ПС q синтаксично визначний через $\{p_1,\ldots,p_n\}$ в множині формул $\boldsymbol{\Gamma}$. Тоді q семантично визначний через $\{p_1,\ldots,p_n\}$.

Нехай формула Φ із $\sigma(\Phi)=\{p_1,\ldots,p_n\}$ така, що $\boldsymbol{\Gamma}\models q\leftrightarrow\Phi$. Припустимо супротивне: q не є семантично визначним через $\{p_1,\ldots,p_n\}$. Тоді існують $\{p_1,\ldots,p_n\}$-тотожні еквітонні моделі істинності $\boldsymbol{A}=(M,\boldsymbol{I_A})$ та $\boldsymbol{B}=(M,\boldsymbol{I_B})$ для $\boldsymbol{\Gamma}$ та $d\in{}^V M$ такі, що $q_{\boldsymbol{A}}(d)\neq q_{\boldsymbol{B}}(d)$.

Візьмемо для $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ АС повнототальних розширень $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$ відповідно, візьмемо $\delta\in M^V$ таке, що $\delta\supseteq d$. За еквітонністю тоді $q_{\boldsymbol{A'}}(\delta)=q_{\boldsymbol{A}}(d)$, $q_{\boldsymbol{B'}}(\delta)=q_{\boldsymbol{B}}(d)$, тому $q_{\boldsymbol{A'}}(\delta)\neq q_{\boldsymbol{B'}}(\delta)$. Але $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$ – моделі істинності для $\boldsymbol{\Gamma}$, тому для всіх $\Psi\in\boldsymbol{\Gamma}$ маємо $\Psi_{\boldsymbol{A'}}(\delta)=T$, $\Psi_{\boldsymbol{B'}}(\delta)=T$. Враховуючи $\boldsymbol{\Gamma}\models q\leftrightarrow\Phi$, тоді $(q\leftrightarrow\Phi)_{\boldsymbol{A'}}(\delta)=T$ та $(q\leftrightarrow\Phi)_{\boldsymbol{B'}}(\delta)=T$, але згідно $q_{\boldsymbol{A'}}(\delta)\neq q_{\boldsymbol{B'}}(\delta)$ маємо $\Phi_{\boldsymbol{A'}}(\delta)\neq\Phi_{\boldsymbol{B'}}(\delta)$. Проте $\sigma(\Phi)=\{p_1,\ldots,p_n\}$, $\boldsymbol{A'}$ та $\boldsymbol{B'}$ – $\{p_1,\ldots,p_n\}$-тотожні, тому $\Phi_{\boldsymbol{A'}}(\delta)=\Phi_{\boldsymbol{B'}}(\delta)$. Отримали суперечність ■

Зауваження. Можливо $\boldsymbol{\Gamma}\models q\leftrightarrow\Phi$, але для $\overline{p}$-тотожних *локально-еквітонних* моделей істинності $\boldsymbol{A}=(M,\boldsymbol{I_A})$ та $\boldsymbol{B}=(M,\boldsymbol{I_B})$ для $\boldsymbol{\Gamma}$ можливо $q_{\boldsymbol{A}}\neq q_{\boldsymbol{B}}$. Справді, візьмемо як Φ предикатний символ p, візьмемо $\boldsymbol{\Gamma}=\{q\leftrightarrow p\}$. Задамо $q_{\boldsymbol{A}}(d)=F$ для скінченних d та $q_{\boldsymbol{A}}(d)=T$ для нескінченних d, $q_{\boldsymbol{B}}(d)=T$ для довільних d; задамо $p_{\boldsymbol{A}}(d)\uparrow$ та $p_{\boldsymbol{B}}(d)\uparrow$ для скінченних d, $p_{\boldsymbol{A}}(d)=p_{\boldsymbol{B}}(d)=T$ для нескінченних d. Для скінченних d маємо $(q\leftrightarrow p)_{\boldsymbol{A}}(d)\uparrow$ та $(q\leftrightarrow p)_{\boldsymbol{B}}(d)\uparrow$, для нескінченних d маємо $(q\leftrightarrow p)_{\boldsymbol{A}}(d)=T$ та $(q\leftrightarrow p)_{\boldsymbol{B}}(d)=T$. Але $q\leftrightarrow p\models q\leftrightarrow p$, тому $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ – моделі істинності для $\boldsymbol{\Gamma}=\{q\leftrightarrow p\}$. У той же час $q_{\boldsymbol{A}}\neq q_{\boldsymbol{B}}$.

Теорема 7. Нехай предикатний символ q семантично визначний через $\{p_1,\ldots,p_n\}$. Тоді q синтаксично визначний через $\{p_1,\ldots,p_n\}$ в множині формул $\boldsymbol{\Gamma}$.

Згідно умови для довільних $\{p_1,\ldots,p_n\}$-тотожних еквітонних моделей істинності $\boldsymbol{A}=(M,\boldsymbol{I_A})$ та $\boldsymbol{B}=(M,\boldsymbol{I_B})$ множини формул $\boldsymbol{\Gamma}$ маємо $q_{\boldsymbol{A}}\cong q_{\boldsymbol{B}}$. Покажемо, що існує формула Φ із $\sigma(\Phi)=\{p_1,\ldots,p_n\}$ така, що $\boldsymbol{\Gamma}\models q\leftrightarrow\Phi$.

Продублюємо як β' кожний ПС $\beta\in Ps\setminus\{p_1,\ldots,p_n\}$. При цьому задаємо $\mu(\beta')=\mu(\beta)$, $\boldsymbol{I_A}(\beta')=\boldsymbol{I_A}(\beta)$, $\boldsymbol{I_B}(\beta')=\boldsymbol{I_B}(\beta)$. При заміні кожного β на β' кожна формула $\Psi\in\boldsymbol{\Gamma}$ переходить у формулу Ψ', множина $\boldsymbol{\Gamma}$ – у $\boldsymbol{\Gamma'}$. При цьому $\Psi_{\boldsymbol{A}}=\Psi'_{\boldsymbol{A}}$, $\Psi_{\boldsymbol{B}}=\Psi'_{\boldsymbol{B}}$. Кожна модель істинності $\boldsymbol{M}=(M,\boldsymbol{I_M})$ множини формул $\boldsymbol{\Gamma}$ ізоморфно перетворюється у модель істинності $\boldsymbol{M'}=(M,\boldsymbol{I_{M'}})$ множини формул $\boldsymbol{\Gamma'}$.

Позначимо $\boldsymbol{I_\cup}=\boldsymbol{I_M}\cup\boldsymbol{I_{M'}}$. Тоді $\boldsymbol{M_\cup}=(M,\boldsymbol{I_\cup})$ – модель істинності множини формул $\boldsymbol{\Gamma}\cup\boldsymbol{\Gamma'}$. Маємо $\boldsymbol{I_\cup}(q)=\boldsymbol{I_M}(q)=\boldsymbol{I_{M'}}(q')=\boldsymbol{I_\cup}(q')$. Звідси $\boldsymbol{\Gamma}\cup\boldsymbol{\Gamma'}\models q\leftrightarrow q'$. Згідно теореми повноти секвенція $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\cup\boldsymbol{\Gamma'}\dashv q\leftrightarrow q'$ вивідна, вона має скінченне замкнене секвенційне дерево $\boldsymbol{\delta}$. При побудові $\boldsymbol{\delta}$ використовуються лише формули деякої скінченної секвенції $\boldsymbol{\Gamma_0}\cup\boldsymbol{\Gamma'_0}\subseteq\boldsymbol{\Gamma}\cup\boldsymbol{\Gamma'}$. Отримуємо дерево $\boldsymbol{\delta_0}$ з коренем $\vdash\boldsymbol{\Gamma_0}\cup\boldsymbol{\Gamma'_0}\dashv q\leftrightarrow q'$, всі вершини якого – скінченні секвенції. Отже, скінченна секвеція $\vdash\boldsymbol{\Gamma_0}\cup\boldsymbol{\Gamma'_0}\dashv q\leftrightarrow q'$ вивідна. Нехай $\boldsymbol{\Gamma_0}\cup\boldsymbol{\Gamma'_0}=\{A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_k\}$, де $\boldsymbol{\Gamma_0}=\{A_1,\ldots,A_m\}$, $\boldsymbol{\Gamma'_0}\setminus\boldsymbol{\Gamma_0}=\{B_1,\ldots,B_k\}$. Формули $A_1\&\ldots\&A_m$ та $B_1\&\ldots\&B_k$ позначимо A та B відповідно. Тоді секвеція $\vdash A\&B\dashv q\leftrightarrow q'$ вивідна, звідки $A\&B\models q\leftrightarrow q'$. Звідси $\models A\&B\to(q\leftrightarrow q')$, що рівносильно $\models(A\&q\to B\to q')\&(A\&\neg q\to B\to\neg q')$, тому $\models A\&q\to B\to q'$ та $\models A\&\neg q\to B\to\neg q'$. Отже, секвенції $\dashv A\&q\to B\to q'$ та $\dashv A\&\neg q\to B\to\neg q'$ вивідні.

Згідно інтерполяційної теореми для вивідної секвенції $\dashv A\&q\to B\to q'$ існує формула Φ сигнатури $\sigma(\Phi)\subseteq\sigma(A\&q)\cap\sigma(B\to q')$ така, що $\dashv A\&q\to\Phi$ та $\dashv\Phi\to B\to q'$ вивідні. Але $\sigma(A\&q)\cap\sigma(B\to q')=\sigma(A)\cap\sigma(B)\subseteq\sigma(\boldsymbol{\Gamma})\cap\sigma(\boldsymbol{\Gamma'})$, $\sigma(\boldsymbol{\Gamma})\cap\sigma(\boldsymbol{\Gamma'})=\{p_1,\ldots,p_n\}$. Тому $\sigma(\Phi)\subseteq\{p_1,\ldots,p_n\}$.

Із вивідності $\dashv A\&q\to\Phi$ та $\dashv\Phi\to B\to q'$ випливає вивідність секвенцій $\dashv A\to q\to\Phi$ та $\dashv B\to\Phi\to q'$. Звідси вивідні секвенції $\vdash A\dashv q\to\Phi$ та $\vdash B\dashv\Phi\to q'$, отже, вивідні секвенції $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv q\to\Phi$ та $\vdash\boldsymbol{\Gamma'}\dashv\Phi\to q'$. Продублюємо секвенційне дерево для $\vdash\boldsymbol{\Gamma'}\dashv\Phi\to q'$, знімаючи '. Отримаємо виведення секвенції $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\Phi\to q$. Із виведень секвенцій $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv q\to\Phi$ та $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\Phi\to q$ дістаємо виведення секвенції $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv q\leftrightarrow\Phi$. Звідси $\boldsymbol{\Gamma}\models q\leftrightarrow\Phi$ ■

Зауважимо, що при застосуванні інтерполяційної теореми до вивідної секвенції $\dashv A\&\neg q\to B\to\neg q$ отримуємо формулу Ξ таку, що $\sigma(\Xi)\subseteq\{p_1,\ldots,p_n\}$ та секвенція $\vdash\boldsymbol{\Gamma}\dashv\neg q\leftrightarrow\Xi$ вивідна. Звідси $\boldsymbol{\Gamma}\models\neg q\leftrightarrow\Xi$, тобто $\Xi\sim\neg\Phi$.

4. Автоматизована система доведення теорем теорії метаномінативних даних

З метою побудови адекватних формалізмів специфікацій недетермінованих програм в [25] запропонована аксіоматична система специфікацій програм над метаномінативними даними (МНД). Така система є достатньо багатою, вона дозволяє доводити низку важливих властивостей часткових багатозначних функцій, а також проводити подальшу конкретизацію специфікацій у мовах програмування більш низького рівня. Базуючись на аксіоматичній системі специфікацій програм над МНД, секвенційних численнях фінітарних КНЛ та запропонованому в [26] секвенційному численні снгулярних КНЛ, ми пропонуємо прототип системи автоматизації доведення теорем теорії метаномінативних даних.

Система Автоматизації Доведення теорем теорії Метаномінативних Даних (САДМД) будується на основі відомої Системи Автоматизації Дедукції (САД) [27]. Структура САДМД аналогічна структурі САД.

САДМД може орієнтуватися на сингулярні КНЛ або на фінітарні КНЛ 1-го порядку. САДМД забезпечує введення тексту у вигляді секвенції відповідної мови та здійснює пошук виведення такої секвенції.

Ядром САДМД є програма **alice.** Вона обробляє вхідний текст, використовуючи вбудований reasoner. Посередником між **alice** та зовнішніми пруверами є програма **haigha**. Ці програми не призначені для безпосереднього використання. Інтерфейс для їх функціонування забезпечується сценарієм **sad-moses**. Аксіоми теорії метаномінативних даних [25] описані окремим файлом.

САДМД функціонує наступним чином. Спочатку вона переводить вхідний текст, записаний у вигляді секвенції мови КНЛ першого порядку, в його внутрішнє представлення. В переведеному тексті система обирає множину цілей (твердження, які доводяться) та для кожної цілі визначає набір її логічних попередників (твердження, які потрібно використовувати в доведенні). Нарешті, за допомогою відповідного прувера система пробує виводити кожну ціль із її попередників.

Програма **alice** містить такі основні модулі: [FOL], [TPTP], [Reason] та [Moses]. Наведемо їх короткий опис.

Модуль [FOL]. Виконує розбір вхідних текстів. Він перетворює вхідний текст, записаний у вигляді секвенції мови КНЛ, у відповідне внутрішнє представлення.

Модуль [TPTP]. Об'єднує САДМД з відомою TPTP-бібліотекою, яка містить кілька тисяч логічних проблем для автоматизованих систем доведення.

Модуль [Reason]. Цей модуль керує верифікацією. Він формулює задачі верифікації та намагається їх розв'язати, використовуючи власні евристичні засоби, а також прувер САДМД та зовнішні прувери. Зокрема, [Reason] розбиває складну ціль на множину більш простих.

Модуль [Moses]. Це прувер САДМД, він призначений для пошуку виведення на основі відповідного секвенційного числення. Moses може орієнтуватися на числення сингулярних КНЛ або на числення фінітарних КНЛ 1-го порядку. Прувер переглядає область пошуку, використовуючи обмежений пошук в глибину. Для підвищення ефективності пошуку виведення [Moses] використовує спеціальні обмеження і техніку згортання [28].

САДМД протестована на прикладах. Це засвідчує, що пропонована система дозволяє доводити низку властивостей програм.

Висновки

Розглянуті композиційно-номінативні логіки, які орієнтовані на специфікації програм. Такі логіки будуються в семантико-синтаксичному стилі на основі композиційно-номінативного підходу. Пропонується спектр композиційно-номінативні логік різних рівнів абстрактності та загальності. Для логік еквітонних квазіарних предикатів розглядаються інтерполяційна теорема і теореми про визначність, вони доводяться на основі секвенційних числень. На базі аксіоматичної системи специфікацій програм над метаномінативними даними побудована система автоматизації доведення теорем теорії МНД. Таким чином, композиційно-номінативний підхід може ефективно використовуватися для дослідження та побудови систем специфікацій програм над даними складної структури.

1. *Никитченко Н.С.* Композиционно–номинативный подход к уточнению понятия программы // Пробл. программирования. – 1999. – №1. – С. 16–31.
2. *Никитченко Н.С.* Предикатные композиционно–номинативные системы // Там же. – №2. – С. 3–19.
3. *Никитченко Н.С.* Пропозициональные композиции частичных предикатов // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 2. – С. 3-19.
4. *Шкільняк С.С.* Безкванторні неокласичні логіки // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2001. – Вип. 4. – С. 323–331.
5. *Нікітченко М.С.* Інфінітарні реномінативні логіки часткових предикатів // Там же. – 2002. – Вип. 3. – С. 229–238
6. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки еквітонних предикатів // Там же. – 2000. – Вип. 2. – С. 300–314.
7. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Чисті композиційно-номінативні числення // Там же. – Вип. 3. – С. 290–303.
8. *Никитченко Н.С., Шкильняк С.С.* Неоклассические логики предикатов // Пробл. программирования. – 2000. – № 3–4. – С. 3–17.
9. *Никитченко Н.С.* Аппликативные композиции частичных предикатов // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – № 2. – С. 14–33.
10. *Шкільняк С.С.* Неокласичні кванторні логіки з рівністю // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2003. – Вип.1. – С. 222–225.
11. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки першого порядку // Там же. – 2001. – Вип.1. – С. 260–274.
12. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні числення першого порядку // Там же. – Вип. 2. – С. 302–313.
13. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка. К.: Київ. ун-т. – 2003. – 120 с.
14. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційні логіки номінативних даних // Пробл. программирования. – 2003. – № 3. – С. 29–40.
15. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка. Додаткові розділи. – К.: Київ. ун-т. – 2004. – 77 с.
16. *Шкільняк С.С.* Неокласичні секвенційні числення // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип.4. – С. 261–274.
17. *Шкільняк С.С.* Функціонально-еквaційні неокласичні логіки: числення секвенційного типу // Там же. – 2003. – Вип. 4. – С. 302–309.
18. *Шкільняк С.С.* Фінітарні логіки квазіарних предикатів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: кібернетика. – 2005. – Вип. 6. – С. 47–55.
19. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Логіки локально-еквітонних предикатів: семантичні властивості та секвенційні числення // Пробл. программирования. – 2003. – № 2. – С. 28–41.
20. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки предикатів над даними з неповною інформацією // Там же. – 2004. – № 2–3. – С. 74–80.
21. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Ієрархія композиційно-номінативних логік // Там же. – № 4. – С. 5 –14
22. *Клини С.* Математическая логика. – М.: Наука, 1973. – 480 с.
23. *Непейвода Н.Н.* Прикладная логика. – Новосибирск: НГУ, 2000. – 521 с.
24. *Шкільняк С.С.* Властивості неокласичних секвенційних числень // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2004. – Вип.1. – С. 286 –293.
25. *Никитченко Н.С., Омельчук Л.Л., Шкильняк С.С., Янченко О.И.* Аксиоматические системы спецификаций программ над номинативными данными // Пробл. программирования. – 2000. – № 1-2. – С. 259–272.

26. *Омельчук Л.Л.* Секвенційне числення для композиційно-номінативних логік часткових предикатів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2003. – Вип.4. – С. 270–278.
27. *Lyaletski A., Verchinine K., Degtyarev A., Paskevich A.* System for Automated Deduction (SAD): Linguistic and deductive peculiarities // Intelligent Information Systems 2002 (Proc. IIS'2002 Symp., Sopot, Poland) / Eds. M.A. Klopotek, S.T. Wierzchon, M. Michalewicz). – Physica-Verlag, 2002. – P. 413–422.
28. *Letz R., Stenz G.* Model elimination and connection tableau procedures // Handbook for Automated Reasoning. Vol. II Eds. A. Robinson, A. Voronkov. – Elsevier Science, 2001. – P. 2017–2116.