УДК 510.6, 681.3

ПРО ЛОКАЛЬНУ КОРЕКТНІСТЬ ФОРМАЛЬНИХ ВИЗНАЧЕНЬ

О.І. Провотар

Київський національний університет ім. Т. Шевченка
01033 Київ, Україна, вул. Володимирська, 64,
e-mail: aprowata@unicyb.kiev.ua

Аналізується діагональна процедура Кантора і приводяться приклади доведення теорем, що її використовують. Досліджуються питання коректності таких доведень і наслідки в теорії обчислень.

The diagonal procedure of Kantor is analyzed. The examples of proofs of theorems which use this procedure are resulted. Questions of a correctness of such proofs and consequences in the theory of calculations are investigated.

Вступ

В математичній логіці, як і в математиці в цілому, вивчення довільних об'єктів починається з визначень, якими ці об'єкти ідентифікують з подальшим формулюванням тверджень про ці об'єкти, які випливають з визначень. Часто ці твердження не очевидні, а потребують пояснень, які в математиці прийнято називати доведеннями.

Метою даної статті є аналіз деяких математичних визначень і побудов з точки зору їхньої коректності, а також дослідження складних теорем математичної логіки і теорії обчислень з урахуванням коректності визначень і побудов, що використовуються при їх доведенні.

Аналіз елементарних визначень

1. Почнемо з простого прикладу. Нехай задані множини $\Omega = \{*, +, \#\}$, $B = \{+\}$. Чи задовольняє множина $A = \{*, \#\}$ співвідношенню

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin B?$$

Це співвідношення означає, що в множину A входять всі ті і тільки ті елементи, які не входять в множину B.

Таке співвідношення, з іншого боку, означає правдивість двох імплікацій

$$x \in A \Rightarrow x \notin B,$$
$$x \notin B \Rightarrow x \in A.$$

Першій імплікації задовольняє, наприклад, множина $C = \{\#\}$ і, власне, множина A, другій – задовольняє тільки множина A.

Отже, для заданих множин Ω і B вище приведене співвідношення однозначно визначає множину A. Іншими словами, серед всіх підмножин множини $P(A)$ тільки множина A задовольняє задане співвідношення. Таким чином, для ідентифікації множини A необхідно побудувати множину $P(A)$ і для кожного її елемента перевірити виконання співвідношення.

2. Нехай множина $A = \{*\}$. Множини Ω і B залишаємо без змін. Чи можна ідентифікувати множину A за допомогою співвідношення

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin B?$$

Якби це можна було зробити, то з одного боку елемент $\# \notin A$, з іншого - $\# \in A$ оскільки $\# \notin B$, а, отже, виконується імплікація

$$x \notin B \Rightarrow x \in A.$$

Таким чином, ідентифікувати множину A приведеним вище співвідношенням не можна.

3. Дещо інший аспект у трактуванні співвідношення одержимо, якщо використаємо останнє для побудови множини. В цьому випадку, якщо множина A визначається співвідношенням

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin B$$

при наперед визначених множинах Ω і B, то зрозуміло, що в множину A входять ті і тільки ті елементи, які належать доповненню до множини B.

Отже, визначити множину A можна тільки при умові визначеності доповнення множини B. Крім того, належність довільного елемента x множині A може бути вирішене через його належність доповненню множини B.

Покладемо $B = A'$ і визначимо множину A співвідношенням

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin A'.$$

Що змінилось в цьому випадку? Справа в тому, що таке співвідношення не може бути визначенням множини A. Адже для того, щоб визначити, чи $x \in A$, потрібно визначити чи $x \notin A'$, тобто чи $x \in A$. Таке співвідношення буде визначати множину A за умови, що визначена множина A', тобто для довільного x можна дати відповідь на питання $x \in A'$ чи $x \notin A'$. Але у випадку визначеності множини A' буде визначеною і множна A, так як для довільного x можна дати відповідь на питання $x \in A$ чи $x \notin A$.

Розглянемо тепер діагональну процедуру Кантора [1], яка використовується при доведенні ряду теорем математичної логіки та теорії обчислень.

Теорема Кантора

Щоб довести незліченність множини всіх підмножин множини натуральних чисел, робиться припущення про існування бієкції $f: N \rightarrow 2^N$. Після цього будується множина A, яка визначається співвідношенням

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin f(x).$$

Так як $f(x)$ – бієкція, то $f(m) = A$ для деякого m. Але тоді приходимо до суперечності

$$m \in f(m) \Leftrightarrow m \notin f(m),$$

яка, на думку Кантора, викликана припущенням про існування бієкції, а, отже, доводить теорему.

Насправді все відбувається дещо по іншому. Побудова множини A буде коректною тільки у випадку визначеності множини $f(x)$. Але при $x = m$ множина $f(m)=A$ буде невизначеною. Це означає, що відносно елемента m не можна дати відповіді на питання $m \in A$ чи $m \notin A$. Так як справедливими будуть наступні імплікації

$$m \in A \Rightarrow m \notin f(m) = A,$$

$$m \notin A \Rightarrow m \notin A.$$

Універсальні функції

Як відомо [2], діагональна процедура Кантора використовується для доведення існування всюди визначеної одномісної функції, яка не належить до множини $\Im$ всюди визначених одномісних функцій, при умові існування універсальної функції для $\Im$.

Введення нової функції $g(x) = F(x,x) + 1$, де F – універсальна для класу $\Im$, означає, що значення функції g в довільній точці x можна обчислити як значення виразу $F(x,x) + 1$. Припущення про те, що g належить класу $\Im$ означає, що $g(x) = F(i,x)$ для деякого i. В цьому випадку одержуємо суперечність

$$F(i, i) = F(i, i) + 1$$

яка повинна доводити, що функція g не належить до $\Im$.

Насправді, суперечність виникає із-за некоректного визначення функції g. А саме, значення функції g в точці i визначається через значення функції g в точці i, тобто

$$g(i) = F(i, i) = F(i, i) + 1 = g(i) + 1.$$

Таким чином, припущення про те, що g належить класу $\Im$ приводить лише до того, що визначення функції g в цьому випадку не буде коректним з тієї причини, що функція в правій частині співвідношення не визначена.

Парадокс Рассела

Для множини всіх множин (універсальна множина) множина R визначається співвідношенням

$$X \in R \Leftrightarrow X \notin X$$

тобто R – множина всіх тих множин, які не є елементами самих себе. Тоді в універсальній множині існує елемент (множина R), для якого не можна дати відповідь на питання: $R \in R$ чи $R \notin R$. В обох випадках одержуємо суперечності. Причина суперечності знову полягає у некоректному визначенні множини R заданим співвідношенням, оскільки в правій його частині при $X = R$ буде не визначена множина R.

Машини Тьюрінга

Формально машина Тьюрінга [2] може бути визначена як п’ятірка

$$A = (K, \Gamma, H, q_0, q^*),$$

де K – множина станів;
Γ – множина вхідних символів;
H – словарне відображення множини $K \backslash \{q^*\} \times \Gamma$ в множину $K \times \Gamma \times \{L, R, \lambda\}$ (функція переходів);
$q_0 \in K$ – початковий стан;
$q^* \in K$ – заключний стан.

Процес обчислень машини Тьюрінга – це процес послідовного перетворення слів. При цьому словарне відображення φ називається частково обчислюваним за Тьюрінгом, якщо воно обчислюється деякою машиною Тьюрінга A, тобто знаходячись в початковому стані q_0 машина A буде працювати нескінченно довго на слові u, якщо $\varphi(u)$ не визначене, або зупиниться через скінченну кількість тактів роботи в стані q^* з вихідним словом $\varphi(u)$.

Вважається, що машина Тьюрінга A задає n-місну часткову функцію $f(x,\ldots, z)$, якщо для будь-яких натуральних $x, \ldots, z$ машина A перетворює вхідне слово $1^x\#\ldots\#\, 1^z$ в слово $1^{f(x, \ldots , z)}$, коли $f(x,\ldots, z)$ визначена, і працює нескінченно довго, коли $f(x, \ldots , z)$ не визначена.

Часткові функції, що задаються машинами Тьюрінга називаються частково обчислюваними за Тьюрінгом.

Зрозуміло, що кожна машина Тьюрінга, яка обчислює деяку одномісну функцію, може бути задана скінченним словом в алфавіті $K = \{1, q, ', R, L, \lambda\}$.

Але не кожне слово в алфавіті K задає машину Тьюрінга. Нехай M – множина слів в алфавіті K, які задають машини Тьюрінга.

Поставимо у відповідність кожному слову X в алфавіті K номер, який одержуємо замінивши в слові 1 на 12, q на 122, $'$ на 1222, R на 12222, L на 122222, λ на 1222222. Позначимо цю ін'єктивну відповідність через $f{:}K^+ \to N$. Тоді відображення $f'{:}\ M \to f(M)$ таке, що $f'(x) = f(x)$ – бієкція.

Кожному слову X із M відповідає також часткова функція $s{:}N \to N$ із множини P всіх часткових функцій із N в N, яка обчислюється машиною X. Позначимо цю відповідність $h{:}\ M \to P$.

Кожному номеру із $f(M)$ поставимо у відповідність натуральне число. Позначимо це відображення $r{:}f(M) \to N$. Тоді

$$r'{:}\ f(M) \to r(f(M))$$

таке, що $r'(x) = r(x)$ – бієкція. Число $r'(f'(X))$ називається номером МТ $X \in M$.
Таким чином будемо мати наступні відображення

$$h(M) \xleftarrow{h} M \xleftrightarrow{f'} f(M) \xleftrightarrow{r'} r(f(M)).$$

Визначимо функцію $g{:}N \to h(M)$ співвідношенням

$$g(x) = \begin{cases} h(f'^{-1}(r'^{-1}(x))), & \text{якщо } x \in r(f(M)); \\ \text{не визначена}, & \text{якщо } x \notin r(f(M)). \end{cases}$$

Побудуємо функцію $u{:}N \to N$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (g(n))(n) - \text{не визначена}; \\ (g(n))(n) + 1, & \text{якщо } (g(n))(n) - \text{визначена}. \end{cases}$$

Очевидно, що u всюди визначена функція однієї змінної, але вона не обчислюється машиною Тьюрінга. Дійсно, якщо припустити, що $u \in h(M)$, то тоді $u = g(m)$ для деякого m.

Так як u всюди визначена функція, то, з одного боку,

$$u(m) = (g(m))(m),$$

з іншого –

$$u(m) = (g(m))(m) + 1.$$

Одержали суперечність. Причина суперечності, як і в попередніх випадках, лежить у некоректному визначенні функції u. А саме, значення функції u в точці m визначається через значення функції u в точці m. Тобто

$$u(m) = u(m) + 1.$$

Універсальна система U

В [3] будується формальна система, в якій можна виразити всі твердження про те, що деяке число знаходиться, наприклад, в рекурсивно перелічимій множині (РПМ) A.

Для побудови системи U вводиться поняття транскрибованої арифметики (ТА) для визначення РПМ. Система U будується наступним чином. Алфавіт ТА розширюється символом *. ТА з аксіомами $A_1, \ldots, A_к$ ставимо у відповідність слово $*A_1*\ldots*A_к*$, яке називається базою. Твердженням системи U називається слово BX, де B – база, X – формула TA. Іншими словами, твердження – це слово $*A_1*\ldots*A_к*X$, де $A_1, \ldots, A_к$, X – ТА-формули. Твердження називається істинним в U, якщо X виводиться в ТА, аксіомами якої є $A_1, \ldots, A_к$.

Нехай S – це множина всіх тверджень системи U, T – множина істин-них тверджень системи, T_0 – множина геделевих номерів істинних тверджень системи.

При доведенні теореми Чьорча в постівській формі (йдеться про те, що множина T_0 не є рекурсивною) доводиться, що множина T_0' не є РПМ. Для доведення останнього використовується поняття геделевого твердження для множини чисел A, тобто твердження, яке істинне тоді і тільки тоді, коли його геделів номер знаходиться в A. Або формально

$$X \in T \Leftrightarrow X_0 \in A.$$

Зрозуміло, що не існує геделевого твердження для множини T_0'. Отже, щоб довести теорему Чьорча, достатньо показати, що для кожної рекурсивно перелічимої множини існує геделеве твердження. При побудові такого твердження для довільної множини A використовується деяке узагальнення діагональної процедури Кантора. При цьому геделеве твердження для множини A – це слово Hh, де H – предикат, що представляє множину всіх чисел, норма яких знаходиться в A, а h – геделів номер H.

Теорема Геделя про неповноту

Ця теорема [3-5] формулюється наступним чином. Існує таке твердження G в формальній теорії, що ні G, ні його заперечення не можуть бути виведені із аксіом цієї теорії, якщо ця система несуперечлива.

Прикладом такого твердження в системі U буде слово Hh, де предикат H представляє множину чисел R^*, яка визначається співвідношенням

$$i \in R^* \Leftrightarrow X_i(i) \in R,$$

де $X_i(i)$ – діагоналізація слова X_i, а R – множина фальшивих тверджень системи U. При цьому нерозв'язніть слова Hh випливає із співвідношення, яке заслуговує тих же критичних зауважень, що і попередні співвідношення такого типу, а саме співвідношення

$$Hh \in T \Leftrightarrow Hh \in R.$$

В цьому випадку не можна визначитись з належністю слова Hh до множини істинних (фальшивих) тверджень системи U, так як обидві імплікації приводять до суперечності.

Висновки

Дана стаття є результатом участі автора в так званій інноваційній війні з основ гармонічної математики, запропонованої в [6]. Суть останньої полягає у створенні певних формальних структур, які грунтуються виключно на понятті актуальної нескінченності. Такий підхід дозволяє уникнути некоректних визначень, про які йшлося вище, а разом з тим парадоксів та інших логіко-парадоксальних побудов теоретико-множинної математики.

За виключення поняття потенціальної нескінченності з гармонічної математики потрібно буде розплатитися тим, що істинність великої кількості тверджень і теорем класичної математики (теоретико-множинної) виявиться досить сумнівною, якщо не сказати більше. Зокрема, це ті твердження, які обговорювались в даній статті. Зрозуміло, що вони утворюють математичні основи тієї науки, яку ми звикли називати інформатикою.

Що ми втратимо і що одержимо в результаті такого переходу до нової концептуальної математичної конструкції, чи є такий перехід переходом до нової якості, чи розв'язує він існуючу кризу теоретико-множинної математики – відповіді на ці питання залежать від багатьох факторів і, очевидно, будуть знайдені (хотілося б у це вірити) в найближчому майбутньому.

1. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. - М.: Наука, 1985. - 430 с.
2. *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. - М.: Наука, 1965. – 392 с.
3. *Смальян Р.* Теория формальных систем. - М.: Наука, 1981. - 208 с.
4. *Антипенко Л.Г.* Проблема неполноты теории и ее гносеологическое значение. -- М.: Наука, 1986. - 224 с.
5. *Провотар А.И.* Неполнота в топосе // КИСА. - 1996. - №6. - С. 132-141.
6. *Петросян В.К.* Основные положения концепции оснований гармонической арифметики. // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. - М.: Янус-К, 1997. - 400 с