

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРЯМИХ І ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ У СИСТЕМАХ З ХАОСОМ

В.Я. ДАНИЛОВ, А.Ю. ЗІНЧЕНКО, В.Я. ДАНИЛОВ

Анотація. Запропоновано системний підхід до ефективного застосування засобів математичного та комп'ютерного моделювання динамічних систем для вирішення проблем дослідження детермінованого хаосу в складних нелінійних системах та пов'язаних з ними обернених задачах. Розв'язано науково-технічну задачу удосконалення математичного моделювання через поліпшення наявних методологій дослідження детермінованого хаосу та розроблення нових математичних моделей на основі спеціалізації існуючих. Запропоновано схеми дослідження прямих (дослідження динамічних режимів поведінки нелінійних систем залежно від біфуркаційних параметрів) і обернених (реконструкції математичних моделей) задач детермінованого хаосу у складних нелінійних системах. Експериментальні дослідження наведено для скалярних реалізацій нелінійних систем Ю.-Ш. Чена та Ресслера. Для останньої знайдено еквівалентну модель.

Ключові слова: детермінований хаос, нелінійна система Ю.-Ш. Чена, біфуркація, реконструкція математичної моделі.

ВСТУП

Однією з основних проблем дослідження нелінійних динамічних систем під час аналізу складної динаміки є експоненціальна чутливість системи до малих збурень, яка виявляє наявний в системі детермінований хаос. При цьому мала зміна біфуркаційного параметра призводить до якісної зміни поведінки фазових траєкторій системи, тобто до нерегулярної хаотичної динаміки. Проте, на відміну від випадкового процесу, такий експеримент можна відтворити, тобто хаотична траєкторія детермінованої нелінійної системи повністю відтворюється, якщо покласти такі ж початкові умови та точність обчислення. Основним напрямом такого дослідження є проведення експериментів на основі математичного та комп'ютерного моделювання з використанням спеціальних обчислювальних методів, які мають високу точність обчислення і в яких враховуються особливості типів зв'язків нелінійної системи.

Для складання ефективних математичних описів досліджуваних об'єктів важливою задачею є розроблення нових чи еквівалентних видів ма-

тематичних моделей, а також параметричної і структурної ідентифікації нелінійних систем у хаотичному режимі за точними і неповними спостереженнями лише однієї фазової координати системи. Ця задача є складною і потребує створення ефективних програмних засобів комп'ютерної реалізації.

У вітчизняній та світовій науковій літературі є ґрунтовні праці [1, 2], присвячені розробленню підходів та обчислювальних методів дослідження детермінованого хаосу у прямих і обернених задачах. Утім проблематика ефективного застосування комп'ютерних систем моделювання, включаючи структурну та алгоритмічну організацію їх використання з урахуванням різних типів нелінійності, залишається недостатньо висвітленою.

Мета роботи — розроблення системного підходу (структурно-функціональних схем) дослідження детермінованого хаосу в нелінійних системах та пов'язаних з ними обернених задачах.

РОЗРОБЛЕННЯ СХЕМ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЯМИХ І ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

що є математичною моделлю деякої динамічної системи. У фазовому просторі цієї системи правими частинами рівнянь (1) породжується векторне поле швидкостей, яке зіставляє кожній зображувальній точці X_0 вектор $X(x_i) = \{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $i = 1, \dots, n$, модуль якого чисельно дорівнює швидкості руху фазової точки по траєкторії. Сам вектор у кожній точці x_i напрямлений по дотичній до фазової траєкторії. Таким чином, динамічну систему (1) можна записати у векторній формі $\dot{X} = X(x)$, де $\dot{X} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ — відповідні вектори. Надалі вважатимемо, що праві частини системи рівнянь (1) є аналітичними функціями. Система задовольняє умови теореми Коші–Пікара: через кожен точку фазового простору проходить одна і тільки одна траєкторія. Тоді основною задачею дослідження нелінійних динамічних систем різної природи, які, як правило, не мають точних аналітичних розв'язків, є задача виявлення областей хаотичних, регулярних і перехідних режимів, а також закономірностей переходу від одного режиму до іншого через відповідну послідовність біфуркацій [3].

Структурно-функціональний підхід до розв'язання поставленої задачі дослідження запропоновано у вигляді рис. 1. Етапи схеми дослідження складаються зі спеціальних числових методів з локальною точністю числового розв'язання системи (1) до $O(10^{-12}) - O(10^{-16})$.

Поставимо задачу реконструкції. Нехай маємо скалярну реалізацію динамічної системи (1), отриману за точними вимірами: $x_i = [x(i\Delta t), i = 1, \dots, N]$, де x — значення реалізації в момент часу $i\Delta t$; Δt — інтервал дискретизації; N — довжина реалізації. Потрібно реконструювати аттрактори і матема-

тичну модель системи (1), а для часової послідовності — підтвердити наявність чи відсутність хаосу.

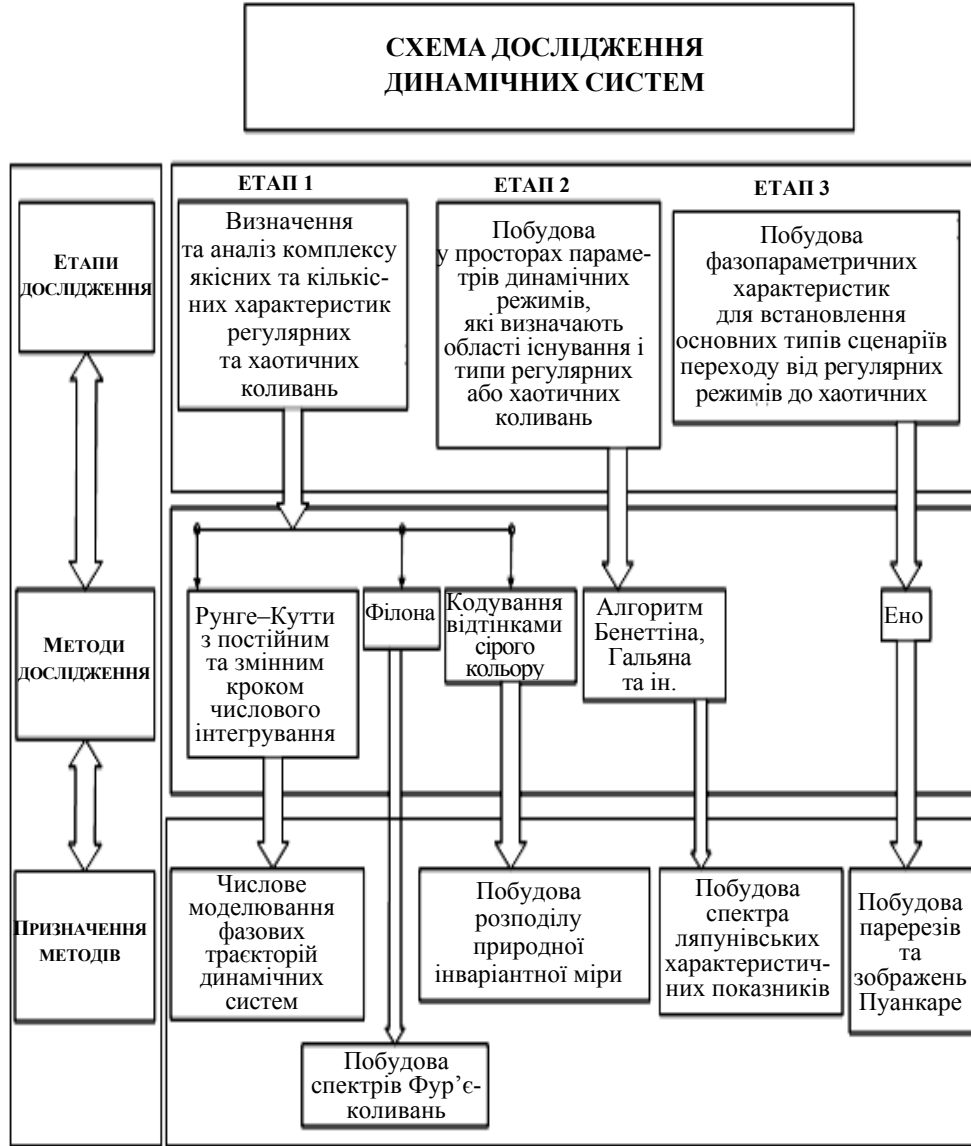


Рис. 1. Структурно-функціональна схема дослідження динамічних систем

Для розв'язання поставленої задачі на рис. 2 показано структурно-функціональну схему з етапами дослідження. Задача реконструкції оператора еволюції системи (1) ускладнюється, якщо інформація про об'єкт дослідження обмежена однією скалярною реалізацією або одновимірною реалізацією функції від фазових координат системи. Для коректного підбору моделі динамічної системи на рис. 3 зображено функціональну схему процесу реконструкції. При цьому вибір структури моделі і виду модельного оператора еволюції ґрунтуються на апріорній інформації про систему та на аналізі динаміки вихідного ряду системи.

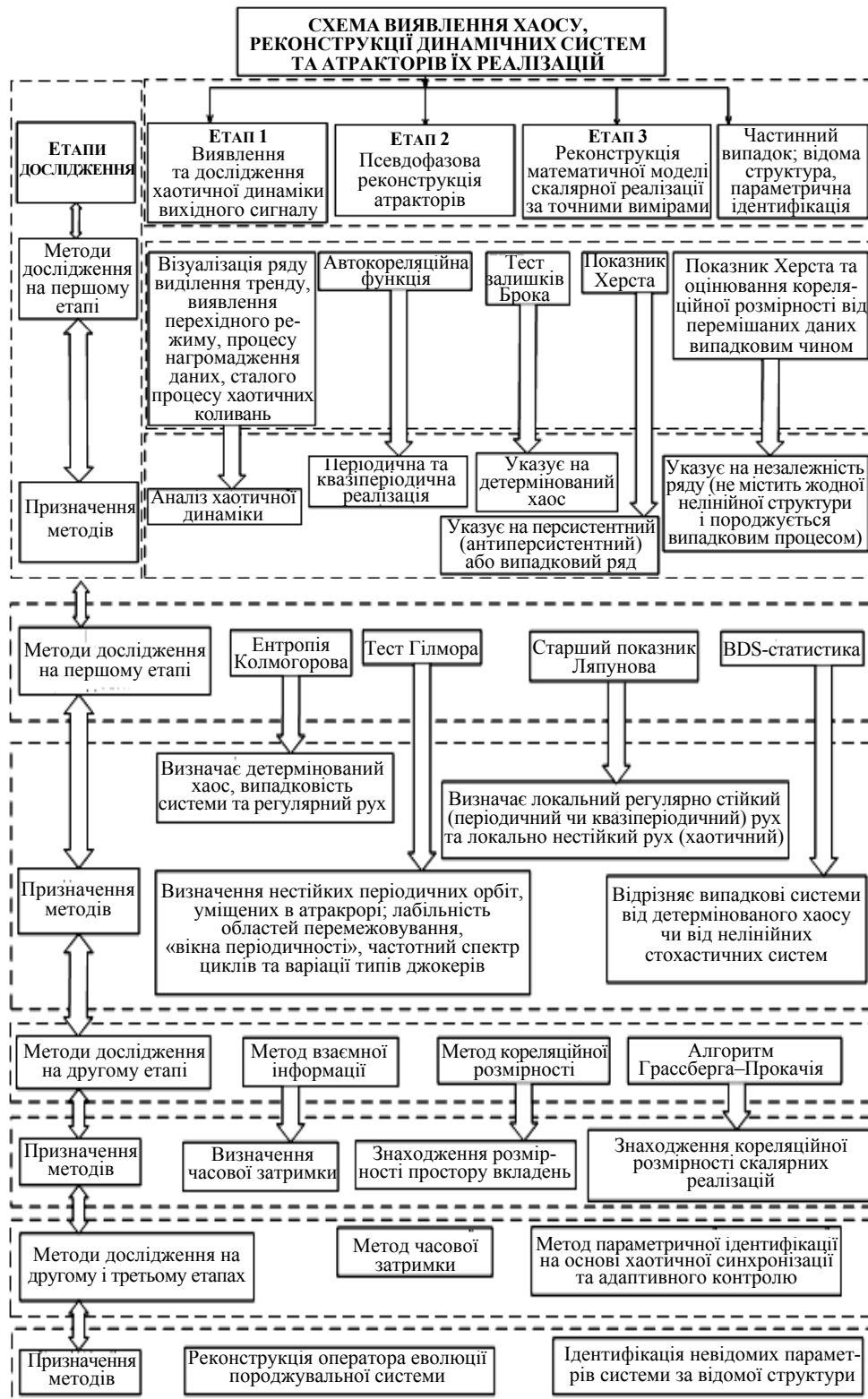


Рис. 2. Структурно-функціональна схема реконструкції атракторів та динамічних систем за їх скалярними реалізаціями

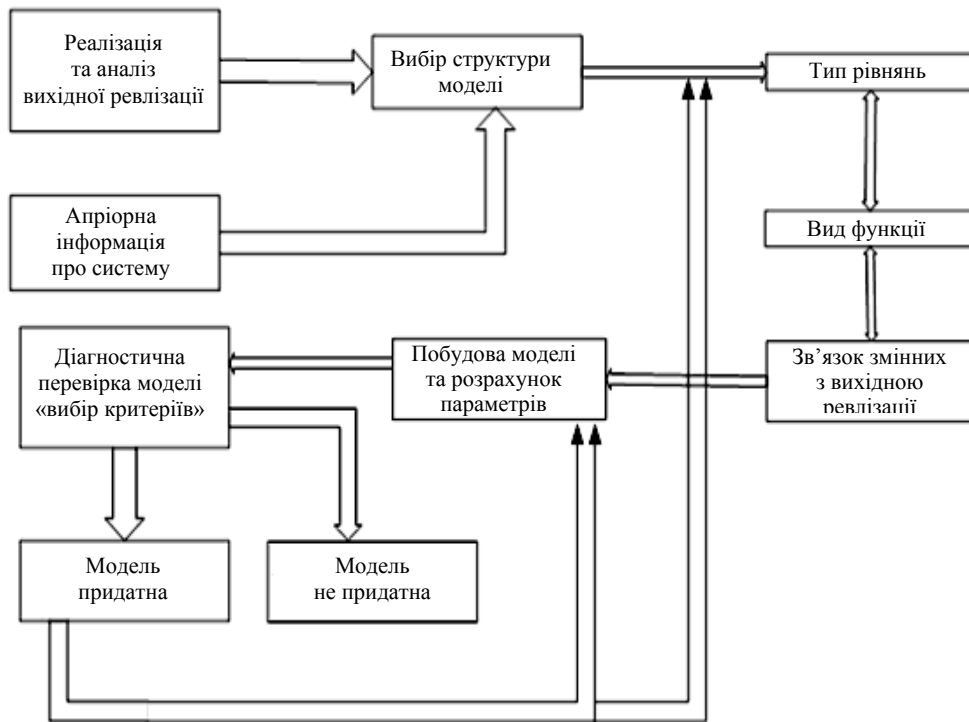


Рис. 3. Функціональна схема реконструкції систем за скалярною реалізацією

Для оцінювання невідомих параметрів реконструйованої системи скористаємося методом глобальної реконструкції [4]. Задамо структуру динамічної системи звичайними диференціальними рівняннями першого порядку $\dot{x} = F_j(x_j)$, $j = 1, \dots, n$ із заздалегідь обчисленою за методом кореляційної розмірності розмірністю системи (розмірністю простору вкладення атракторів). Тоді для отримання конкретного виду еволюційного оператора функцію F_j подамо у вигляді розкладання за деяким базисом, обмежуючись скінченною кількістю членів розкладання. У простішому випадку задавати

$$F_j \text{ можна поліномом деякого степеня } v: F_j(x_i) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^v C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{s=1}^n x_{s,i}^{l_s},$$

де $j = 1, \dots, n$, $\sum_{s=1}^n l_s \leq v$, де $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n}$ — невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти. Для знаходження цих коефіцієнтів необхідно розв'язати систему N

$$\text{лінійних алгебричних рівнянь } x_{j, i+1} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^v C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{s=1}^n x_{s,i}^{l_s}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$j = 1, \dots, n$ з невідомими $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_n}$, у якій N — кількість точок псевдофазової реконструкції скалярного часового ряду $x_i(t)$, що використовуються для апроксимації правих частин; v — степінь полінома. Для апроксимації можна застосовувати поліноми Лежандра, Фур'є або інший базис розкладання функцій F_j . Тоді невідомі коефіцієнти при поліномах обчислюються за рекурентним методом найменших квадратів (РМНК). При цьому діагностична

перевірка моделі являє собою повне дослідження отриманої математичної моделі згідно зі структурно-функціональною схемою (1). Установлення областей регулярної і хаотичної динаміки сконструйованої математичної моделі, а також побудова відповідних атракторів відповідно до вже дослідженої динаміки скалярної реалізації і є основними критеріями адекватності вибору математичної моделі.

ПРИКЛАДИ ПСЕВДОФАЗОВОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ АТРАКТОРІВ

Як приклад розглянемо малодосліджену нелінійну систему Ю.-Ш. Чена [5]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z + (y - a)x, \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2, \\ \dot{z} &= -x - cz, \end{aligned} \quad (2)$$

де параметри $a \geq 0$ — збереження суми відсоткової ставки; $b \geq 0$ — вартість інвестицій; $c \geq 0$ — еластичність попиту на комерційних ринках. Перше рівняння цієї системи описує зміну в часі відсоткової ставки, друге — зміну інвестиційного попиту, а третє — зміну індексу цін. Детальний опис моделі подано у праці [5].

Результати дослідження отримано для скалярних реалізацій за першою та другою координатами для системи (2), отриманої числовим розв'язком системи з використанням алгоритму Дорманда–Принса [6]. Було проведено два комп'ютерні експерименти дослідження детермінованого хаосу: за хаотичним та регулярним режимами динаміки системи. Вибірки рядів як для хаотичних, так і для регулярних режимів вибрано по 100000 значень даних. Початковими умовами для експериментів обрано $x(t_0) = 2$, $y(t_0) = 3$, $z(t_0) = 2$, а параметри — $a = 3$; $b = 0,1$; $c = 1$ — для хаотичного режиму і $a = 3$, $b = 0,24$; $c = 1$ та $a = 2,475$; $b = 0,1$; $c = 1,8$ — для регулярного. При цьому крок дискретизації методу Рунге–Кутти становив 10^{-3} .

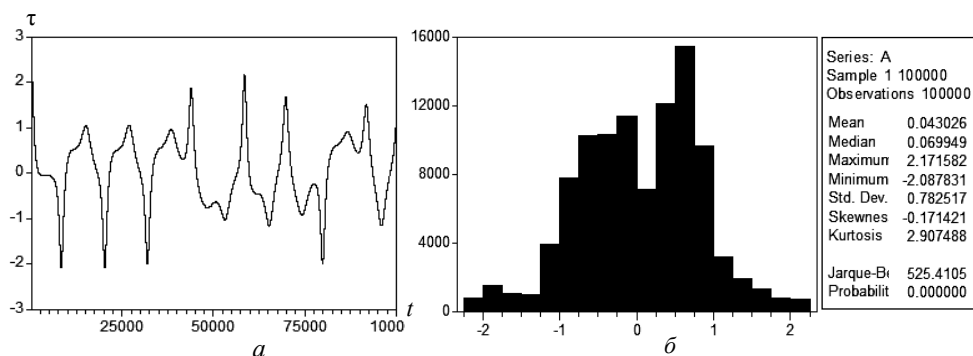


Рис. 4. Динаміка скалярної реалізації хаотичного режиму (а) та її статистичні дані (б)

Для уникнення помилок під час дослідження детермінованого хаосу, зокрема обчислення розмірності вкладення, кореляційної розмірності D_2 , тесту Брока, ентропії Колмогорова, BDS-тесту, пов'язаних зі скінченністю ряду, було застосовано критерій А. Цоніса, що визначає мінімально необ-

хідну довжину ряду вигляду $N > 10^{2+0,4D_2}$. А оскільки оцінка кореляційної розмірності реконструйованого атратора системи (2) становила 2,21 (табл. 1), то мінімально необхідна довжина ряду повинна перевищувати $10^{2+0,4 \cdot 2,21} = 766$ значень.

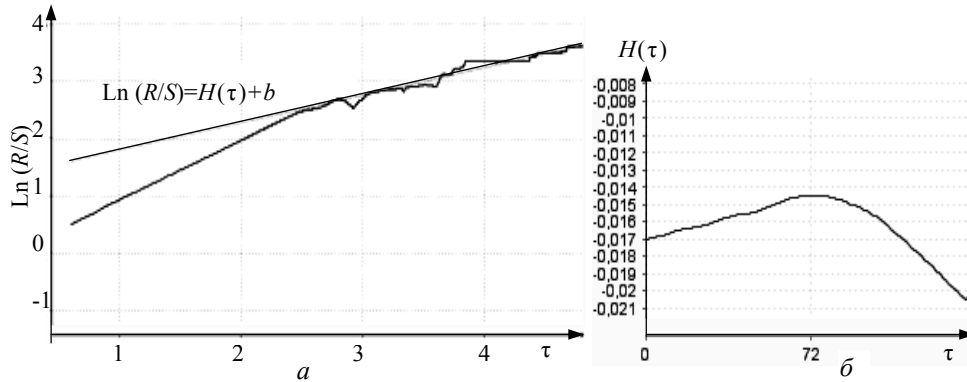


Рис. 5. Лінійна регресія оцінки показника Херста (а) та графік функції взаємної кореляції (б) першої скалярної реалізації хаотичного режиму

Результати дослідження для часових реалізацій регулярного і хаотичного режимів нелінійної системи (2) проілюстровано на рис. 5–10. Характеристики кількісних та якісних ознак зведено у табл. 1.

Із кількісних та якісних характеристик, наведених у табл. 1, можна зробити висновок, що досліджуваний ряд є антиперсистентним (ергодичним, що складаються із частих реверсів зростання–спадання), має нелінійну структуру (підтверджену тестом Брока і випадковим перемішуванням даних) і характеризується ефектом турбулентності. Автокореляційна функція на великих проміжках часу прямує до нуля, що свідчить про відсутність кореляції між сусідніми значеннями (під впливом нестійкості за Ляпуновим), а додатні показники Ляпунова і Колмогорова вказують на наявність у ряду хаосу (локально нестійкого руху двох точок псевдореконструйованого атратора).

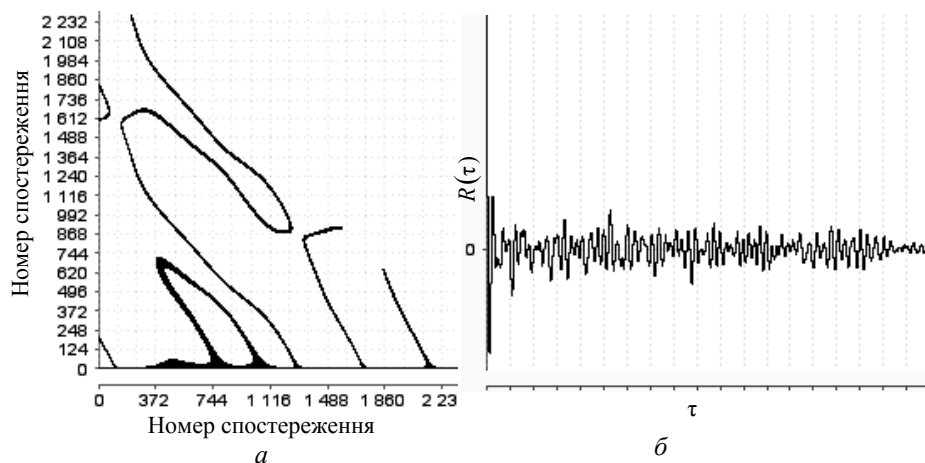


Рис. 6. Тест Гілмора: інтервальний джокер і русла (а) та автокореляційна функція (б) першої скалярної реалізації хаотичного режиму системи (2)

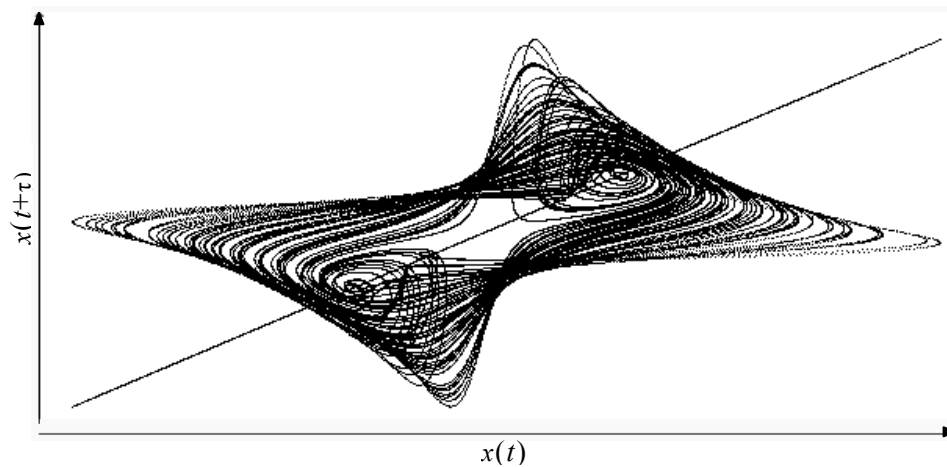


Рис. 7. Псевдофазова реконструкція першої реалізації хаотичного режиму системи (2). Часова затримка — 139 с, розмірність укладення — 3

Таблиця 1. Кількісні та якісні характеристики ідентифікації хаосу та реконструкції його математичної моделі для скалярної реалізації хаотичного режиму

Назва характеристики	Опис характеристики (числове значення)	Назва характеристики	Опис характеристики (числове значення)
Показник Херста	0,4791552279363	Автокореляція	Прямує до нуля
Показник Херста після перемішування (10 раз)	0,4957591621218764	Старший показник Ляпунова	0,243
Тест Брока	D_2 : 2,211 і 2,213 λ_1 : 0,243 і 0,241	Розмірність Мінковського	2,52
Ентропія Колмогорова	0,243	Візуалізація ряду	Хаотичний режим
Кореляційна розмірність і BDS-статистика	2,211 87,91	Розмірність укладення	3
Тест Гілмора та ϵ	Інтервальний джокер, $\epsilon = 0,0247$	Часова затримка	139 с

Оскільки BDS-статистика значно більша від 3, то гіпотезу про випадковий ряд можна відхилити з імовірністю 99% [7]. Графік «тісного повернення» хаотичного режиму — графічний тест Гілмора — показано на рис. 6. Тут бачимо «порожні» області, що не містять точок, і області із суцільними лініями. Наявність «порожніх» областей вказує на розриви у відображенні, а суцільних ліній — на «шумові» цикли, тобто ця картина свідчить про наявність у скалярній реалізації інтервальних джокерів (областей випадкових фазових стрибків) з наявними руслами складного частотного спектра (області детермінованої поведінки). Візуалізація ряду також свідчить про наявність хаосу та відсутність тренду. Реконструйований атрактор на рис. 7 підтверджує припущення про наявність хаосу.

Із кількісних та якісних характеристик, наведених у табл. 2 для регулярного режиму, можна зробити висновок, що досліджуваний ряд є антиперсистентним, не породжується випадковими процесами (підтверджується тестом Брока і випадковим перемішуванням даних) і характеризується ефектом турбулентності. Автокореляційна функція квазіперіодична (періодична), що свідчить про квазіперіодичність (періодичність) відповідної скалярної реалізації, а нульові показники Ляпунова і Колмогорова вказують на відсутність у ряді хаосу (локально нестійкого руху двох точок псевдореконструйованого атратора). Оскільки BDS-статистика значно перевищує 3, то гіпотезу про випадковий ряд можна відхилити з імовірністю 99% [7].

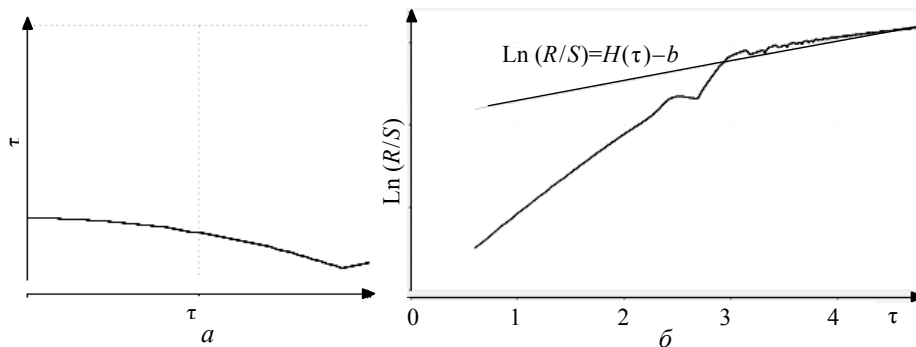


Рис. 8. Функція взаємної кореляції (а) та оцінка показника Херста (б) скалярної реалізації регулярного режиму системи (2)

Графіки «тісного повернення» — графічний тест регулярного режиму Гілмора — показано на рис. 9. Тут зображено суцільні чорні лінії, які проходять горизонтально та вертикально вздовж усього графіка через однакові інтервали, визначені квазіперіодичністю (періодичністю) вимірювань в одиницях часу спостережень.

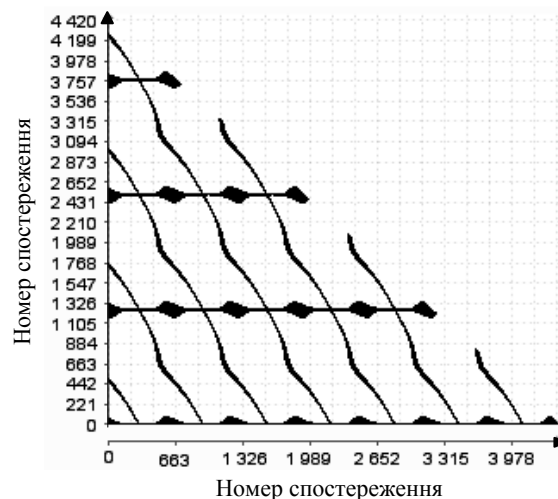


Рис. 9. Тест Гілмора: періодичні орбіти скалярної реалізації регулярного режиму

Наявність квазіперіодичних (періодичних) орбіт на графіку свідчить про квазіперіодичність (періодичність) скалярної реалізації та про наявність русел складного частотного спектра (областей детермінованої поведінки).

Візуалізація відповідного ряду також свідчить про відсутність хаосу та про періодичність (квазіперіодичність). Реконструйований атрактор на рис. 10 підтверджує припущення про наявність періодичної (квазіперіодичної) поведінки одновимірної реалізації.

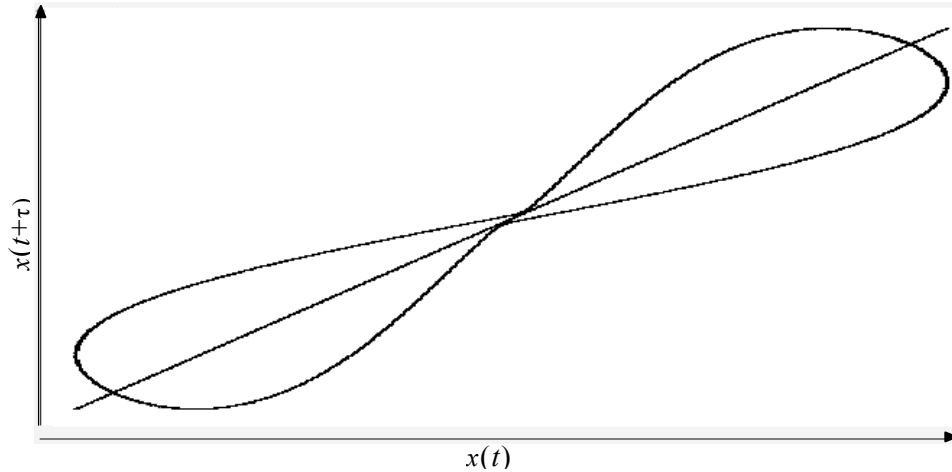


Рис. 10. Псевдофазова реконструкція скалярної реалізації регулярного режиму системи (2). Часова затримка — 44 с, розмірність вкладення — 3

Таблиця 2. Кількісні та якісні характеристики ідентифікації хаосу та реконструкції його математичної моделі скалярної реалізації регулярного режиму

Назва характеристики	Опис характеристики (числове значення)	Назва характеристики	Опис характеристики (числове значення)
Показник Херста	0,24449230462814917	Автокореляція	Періодична
Показник Херста після перемішування (10 раз)	0,5236470025920382	Старший показник Ляпунова	0
Тест Брока	$D_2 : 2,417$ і $2,332$ $\lambda_1 : 0,0$ і $0,27$	Розмірність Мінковського	2,755
Ентропія Колмогорова	0	Візуалізація ряду	Періодичний рух
Кореляційна розмірність і BDS-статистика	2,417 17,19	Розмірність укладення	3
Тест Гілмора та ε	Періодичні орбіти, $\varepsilon = 0,04097$	Часова затримка	44 с

ПРИКЛАД РЕКОНСТРУКЦІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Розглянемо класичну нелінійну систему-осцилятор Ресслера, математична модель якої має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y - z, \\ \dot{y} &= \omega x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c), \end{aligned} \quad (3)$$

де γ — параметр зворотного зв'язку; δ — параметр адаптації; ω — параметр, що визначає основну власну частоту коливань (було вибрано значення $\omega = 0,93$); інші стандартні параметри вибрано такими: $a = 0,15$; $b = 0,2$; $c = 10$.

Вибірка скалярної реалізації по першій фазовій координаті хаотичного режиму на атракторі системи становила 100000 значень. Під час дослідження точність оцінювання з використанням методу Рунге–Кутти п'ятого порядку з коригувальною процедурою Дорманда–Прінса для змінного кроку числового інтегрування становила 10^{-7} . Початкові умови обрано такими: $x(t_0) = y(t_0) = z(t_0) = 0,001$. Згідно з методом послідовного диференціювання [7] за РМНК оцінено невідомі коефіцієнти системи (3). Отримано реконструйовану математичну модель системи Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -0,2 - 10x + 0,5y - 9,85z + 1,0225xy + yz - \\ - 0,15xz - 0,15y^2 - 0,15x^2 + 0z^2. \end{cases} \quad (4)$$

Атрактор системи (4) зображено на рис. 11. Усі основні топологічні властивості і динаміка реконструйованого атрактора цілком відповідають оригінальному атрактору Ресслера (3).

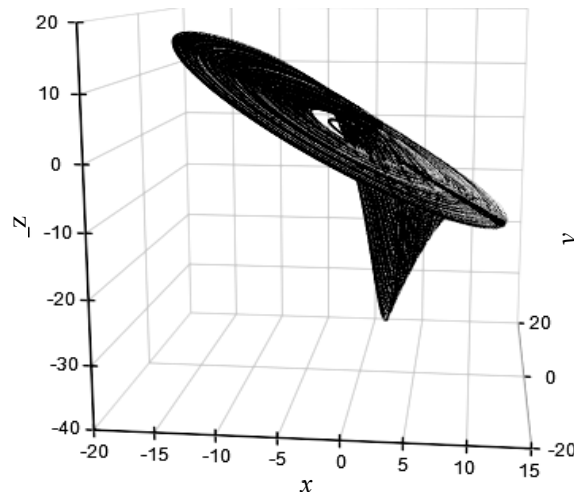


Рис. 11. Атрактор реконструйованої системи Ресслера

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено детермінований хаос для нелінійних динамічних систем, заданих диференціальними рівняннями, та розглянуто задачу реконст-

рукції виявлених атракторів та математичної моделі самої системи за точними і неповними спостереженнями. Для розв'язання поставлених прямих і обернених задач запропоновано системний підхід, описаний структурно-функціональними схемами досліджень. На прикладі нелінійної системи Ю.-Ш. Чена продемонстровано псевдофазову реконструкцію атракторів за спостереженнями скалярних реалізацій фазових координат хаотичного і регулярного режимів. При цьому експериментальні дослідження реалізації цієї системи за хаотичного режиму підтвердили неможливість прогнозування експериментальних даних за виявленого хаосу на проміжках часу, що перевищують деякий часовий масштаб, логарифмічно залежний від неточності задання початкових умов. Це зумовлюється експоненціальною чутливістю вихідної системи до малих збурень. На прикладі системи Ресслера продемонстровано реконструкцію математичної моделі за спостереженнями першої скалярної реалізації фазової координати за хаотичного режиму.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Krasnopol'skaya T.S.* Regular and chaotic surface waves in a liquid in a cylindrical tank / T.S. Krasnopol'skaya, A.Yu. Shvets // *Soviet Applied Mechanics*, 1990. — Vol. 26. — № 8. — P. 787–794.
2. *Shvets A.Yu.* Chaotic Oscillations of Nonideal Plane Pendulum Systems / A.Yu. Shvets, A.M. Makaseyev // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, 2012. — N 1. — P. 195–204.
3. *Зінченко А.Ю.* Исследование регулярной и хаотической динамики одной финансовой системы / А.Ю. Зінченко // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2013. — Т. 21, № 2. — С. 173–187.
4. *Crutchfield J.P.* Equations of motion from a data series / J.P. Crutchfield, B.S. McNamara // *Complex Systems*. — 1987. — N 1. — P. 417–452.
5. *Ma J.H.* Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. I / J. H. Ma, Y.S. Chen // *Applied Mathematics and Mechanics*. — 2001. — Vol. 22, N 11. — P. 1240–1251.
6. *Dormand J.R.* A family of embedded Runge-Kutta formulae / J.R. Dormand, P.J. Prince // *J. Comp. Appl. Math.* — 1980. — Vol. 6. — P. 19–26.
7. *Данилов В.Я.* Синергетичні методи аналізу: навч. посіб. / В.Я. Данилов, А.Ю. Зінченко. — К.: НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка», 2011. — 340 с.

Надійшла 19.04.2017