

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА
И УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ОСНОВЫ
С ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ВЫЕМКОЙ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ**

В.С. КИРИЛЮК, О.И. ЛЕВЧУК

Аннотация. Развита математическая модель контакта при сжатии электроупругого полупространства с упругой изотропной основой, содержащей пологую выемку кругового сечения. Модель базируется на рассмотрении связанной системы уравнений электроупругости. Предложены два алгоритма решения проблемы, основанные на представлении решений уравнений электроупругости. Найдено аналитическое решение задачи, определены геометрические размеры зазора между электроупругим полупространством и деформируемой основой при известных сжимающих усилиях. Для ряда пьезоэлектрических материалов на основе математического моделирования проведены числовые исследования контактного взаимодействия. Изучено влияние связанности силовых и электрических полей на параметры контакта тел. Выявлены характерные механические эффекты.

Ключевые слова: математическое моделирование, связанная система уравнений электроупругости, пьезоэлектрическое полупространство, упругая изотропная основа, пологая осесимметричная выемка, два алгоритма решения, параметры контакта, влияние связанности полей.

ВВЕДЕНИЕ

Возрастающее применение электроупругих (пьезоэлектрических) материалов при создании различных типов датчиков, преобразователей энергии и элементов измерительных приборов стимулирует интерес к исследованию распределений силовых и электрических полей в электроупругих телах вблизи концентраторов напряжений [1–6]. Для увеличения прочности пьезоэлементов в инженерной практике также используются биматериалы, состоящие из электроупругих компонентов и более жестких металлических элементов. Однако при изучении пространственных задач для пьезоэлектрических тел или пьезоэлектрических элементов комбинированных тел возникают значительные затруднения математического характера, вызванные необходимостью решения граничных задач для связанной системы уравнений электроупругости. Наряду с многочисленными исследованиями в области контактных задач упругости рассмотрению статических контактных

задач электроупругости для пьезоэлектрических тел в строгой постановке (с учетом связанности силовых и электрических полей) посвящены только отдельные работы [4–6] и др.

Задачи контактного взаимодействия для упругих изотропных тел с приповерхностными выемками кругового и эллиптического сечения рассматривались в работах [7–9]. Однако моделирование контактного взаимодействия для электроупругого тела является задачей значительно более сложной по самому объекту исследований, чем моделирование взаимодействия упругих изотропных тел. В случае электроупругого (пьезоэлектрического) тела необходимо решать систему из четырех связанных уравнений электроупругости, в которую входят десять независимых постоянных, характеризующих электроупругие свойства пьезоэлектрического материала, в то время, как упругие свойства изотропного материала зависят только от двух упругих постоянных, и система уравнений упругости содержит только три уравнения значительно более простой структуры. Ведь в этом случае приходится полностью пренебречь анизотропией упругих и электрических свойств материала и связанностью силовых и электрических полей.

В работе на основе математического моделирования, которое учитывает связанность силовых и электрических полей в пьезоэлектрическом материале, изучено контактное взаимодействие системы «упругая изотропная основа с выемкой – электроупругое полупространство» при сжатии. При постановке задачи предполагается, что поверхность раздела двух тел, входящих в систему, расположена в плоскости изотропии пьезоэлектрического материала. Предполагается также, что поверхность выемки нагружена давлением P_0 , и в контактной области осуществляется гладкий (без трения) контакт. Предложены два алгоритма решения задачи, основанные на представлении решения статических уравнений электроупругости посредством гармонических функций. Получено замкнутое решение математической задачи, найдены параметры контактного взаимодействия тел (геометрические размеры зазора между телами при сжатии, значение сжимающих усилий, полностью закрывающих зазор). Из найденного на основе математической модели решения задачи следуют соответствующие параметры контакта системы «упругая изотропная основа с выемкой – упругое трансверсально-изотропное полупространство», а также параметры контакта упругого изотропного полупространства с упругой основой [7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим контактное взаимодействие пьезоэлектрического полупространства (рис. 1, 1) с упругой изотропной основой (рис. 1, 2), содержащей пологую осесимметричную выемку (под внутренним давлением P_0), форма которой описывается аналитическим выражением

$$f(r) = h_0(1 - r^2/b^2)^{3/2}, \quad r \leq b, \quad (h_0 \ll b). \quad (1)$$

Полагаем, что плоскость контакта является плоскостью изотропии трансверсально-изотропного электроупругого материала и на поверхности полупространства отсутствует электродное покрытие, т.е. она является неэлектродированной. Считаем также, что к телам приложены сжимающие

усилия p и реализуется гладкий (без трения) контакт. Из-за наличия выемки в упругой основе контакт между телами осуществляется лишь по части поверхности $z=0$ (при $r > a$), где a — неизвестный радиус области контакта (рис. 1). Значение радиуса a зависит от сжимающих усилий p и давления P_0 , геометрии первоначальной выемки, упругих свойств основы и электроупругих свойств полупространства. Дополним функцию $f(r)$ согласно выражению (1) нулевым значением в области $r > b$, имеем

$$f(r) = \begin{cases} h_0(1-r^2/b^2)^{3/2}, & r \leq b, \\ 0, & r > b. \end{cases} \quad (2)$$

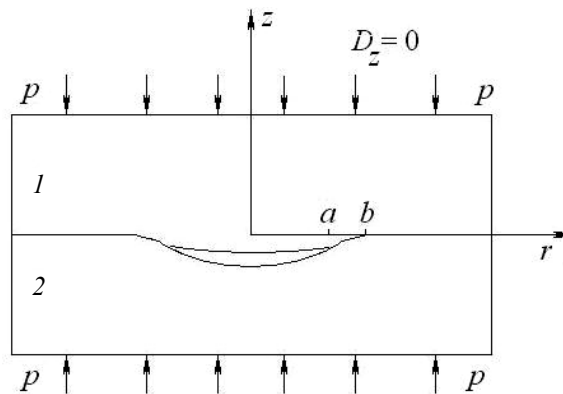


Рис. 1. Контактное взаимодействие упругой основы с полупространством

На поверхности раздела (в плоскости $z=0$) с помощью обозначения (2) приходим к следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(i)} &= -P_0, \quad 0 < r < a; \quad u_z^{(1)} = u_z^{(2)} + f(r), \quad a < r < \infty \quad (i=1,2); \\ \sigma_{zr}^{(i)} &= 0, \quad 0 < r < \infty; \quad \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad a < r < \infty, \quad (i=1,2); \\ D_z^{(1)} &= 0, \quad 0 < r < \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

где D_z — компонента вектора электрической индукции, а индексы «1» и «2» соответствуют первому и второму телам. Заметим, что условия (3) по электрическому состоянию соответствуют случаю незелектродированной поверхности электроупругого полупространства.

При рассмотрении задачи сформулируем условия гладкости смыкания берегов выемки, которым удовлетворяет форма исходной выемки $f(r)$ (согласно формулам (2)) и форма выемки (обозначим ее $f_1(x_1, x_2)$), полученная в результате контактного взаимодействия

$$\partial f_1(x_1, x_2) / \partial x_1 = \partial f_1(x_1, x_2) / \partial x_2 = 0, \quad (x_1, x_2) \in L,$$

где L — контур новой выемки. Отметим, что эти условия ранее были введены в работе [8] при рассмотрении задач контактного взаимодействия для упругих изотропных тел, содержащих приповерхностные выемки.

Далее воспользуемся суперпозицией двух состояний, первое из которых — сжатие вдоль оси Oz , т.е. $\sigma_{zz} = -p$, $D_z = 0$ (в электроупругом полупространстве). Отметим, что в п'єзоелектрическом теле вследствие связанности силовых и электрических полей компонента напряженности электрического поля $E_z \neq 0$, а соответствующая компонента электрической индукции D_z равна нулю. При удалении от области контактного взаимодействия имеем

$$\sigma_{zz}^{(i)} \rightarrow -p, D_z^{(1)} \rightarrow 0, \sigma_{zr}^{(i)} \rightarrow 0 \quad (i=1,2) \text{ при } z \rightarrow \infty; \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}^{(i)} \rightarrow 0, \sigma_{zr}^{(i)} \rightarrow 0 \quad (i=1,2) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Формулы (4) описывают условия на бесконечности.

Для описания напряженного и электрического состояний в п'єзоелектрических телах приведем основные соотношения статики электроупругости для связанных силовых и электрических полей.

Основные уравнения и соотношения. Статические уравнения электроупругости для п'єзоелектрического тела относительно компонентов вектора перемещений и электрического потенциала Ψ можно представить в виде [4]

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0; \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0; \\ (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнениях (5) использованы следующие обозначения: $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ — независимые модули упругости; e_{31}, e_{15}, e_{33} — п'єзомодули; $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ — диэлектрические проницаемости. Следовательно, электроупругие свойства п'єзоелектрического трансверсально-изотропного материала характеризуются десятью независимыми постоянными.

Решение системы уравнений (5) согласно [4] можно представить посредством четырех потенциальных функций Φ_j ($j = \overline{1,4}$):

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \quad (6)$$

где k_j, l_j — некоторые постоянные, а функции Φ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j=1, 2, 3), \quad (7)$$

$\nu_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$, а значения ν_i ($i=1, 2, 3$) согласно работе [4] являются корнями следующего алгебраического уравнения третьего порядка:

$$\begin{aligned} & \nu^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + \nu^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\ & + \nu (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Значения k_j, l_j ($j=1, 2, 3$) в формулах (6) связаны с величинами ν_j такими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j, \quad (j=1, 2, 3), \quad (9)$$

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j; d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j, \quad (j=1, 2, 3, 4). \quad (10)$$

При введении обозначений $z_j = z n_j^{-1/2}$ ($j=\overline{1,4}$) функции $\Phi_1(x, y, z_1)$, $\Phi_2(x, y, z_2)$, $\Phi_3(x, y, z_3)$, $\Phi_4(x, y, z_4)$ согласно уравнениям (7) становятся гармоническими функциями в соответствующих системах координат. Отметим, что приведенные выражения (8)–(10) используются в дальнейшем при проведении вычислений.

Для описания напряженно-деформированного состояния в упругой изотропной основе воспользуемся представлением уравнений равновесия посредством гармонической функции $\chi(r, z)$ согласно [10]. Приведем выражения отдельных компонентов перемещений и напряжений, что входят в граничные условия задачи, на основе этой гармонической функции:

$$2\mu u_z = z \frac{\partial \chi}{\partial z} - 2(1 - \nu)\chi; \quad \sigma_{zz} = z \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - \frac{\partial \chi}{\partial z}; \quad \sigma_{rz} = z \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}. \quad (11)$$

В выражениях (11) использованы обозначения модуля сдвига μ и коэффициента Пуассона ν , характеризующих упругие свойства материала основы.

Метод решения. Алгоритм 1. При построении решения граничной задачи электроупругости воспользуемся представлением (6) для электроупругого полупространства и выражением (11) для упругой основы с выемкой. Потенциальные функции $\Phi_i(x, y, z_i)$ и гармоническую функцию χ возьмем в виде следующих гармонических потенциалов:

$$\begin{aligned} & \Phi_i(x, y, z_i) = \\ & = -\frac{\alpha_i^*}{2\pi} \left(\iint_{S_1} \frac{h(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z_i^2}} + \iint_{S_0} \frac{r(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z_i^2}} \right); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \chi(x, y, z) = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\iint_{S_1} \frac{h(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z^2}} + \iint_{S_0} \frac{r(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + z^2}} \right), \end{aligned}$$

где

$$h(\xi_1, \xi_2) = h_1(1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2)^{3/2}, \quad r(\xi_1, \xi_2) = -h_0(1 - \xi_1^2/b^2 - \xi_2^2/b^2)^{3/2},$$

S_1 и S_0 — круговые площадки радиусов a и b соответственно (рис. 1). Положим функцию $\Phi_4^{(2)} \equiv 0$. Постоянные α_j^* в формулах (12) определим из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E(1+k_j) + e_{15}l_j) &= 1; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E(1+k_j) + e_{15}l_j) / \sqrt{v_j} = 0; \\ \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (e_{15}(1+k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В выражениях (13) используются значения k_j, v_j, l_j , введенные ранее.

При таком выборе гармонической функции χ и коэффициентов α_j^* в формулах (12) удовлетворяются граничные условия по касательным напряжениям на поверхности раздела и условия (4). Также удовлетворяются условия по электрическому состоянию вдоль поверхности полупространства и выполняется равенство нормальных компонентов напряжений вне зазора между телами. Необходимо удовлетворить оставшиеся граничные условия с помощью нахождения следующих параметров контактной задачи: a — значение радиуса площадки контакта (рис. 1); h_1 — максимальная высота зазора в результате контакта электроупругого и упругого тел. Условия гладкости смыкания берегов зазора удовлетворяются автоматически вследствие выбора потенциальных функций в виде формул (12).

Отметим, что потенциалы вида (12) использовались ранее при рассмотрении задачи контактного взаимодействия двух изотропных упругих тел [9]. Идея их применения близка к приему использования скачков перемещений в задаче о трещине нормального отрыва. Однако для трещины ее поверхность задана изначально, в то время как площадка контакта S_1 и ее радиус a в задаче контактного взаимодействия заранее не известны и определяются в процессе решения задачи.

На основе выбора гармонической функции χ и потенциальных функций согласно формулам (12) и (13), удовлетворяя оставшиеся граничные условия, приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_1} \frac{h(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} = \\ &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_0} \frac{r(\vec{\xi}) d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} + 2\pi L^* (p - P_0), \quad (x, y) \in S_1. \end{aligned} \quad (14)$$

В выражениях (14) значение $L^* = \frac{1-\nu}{\mu} + \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* k_j / \sqrt{v_j}$.

После проведения дифференцирования в формулах (14) воспользуемся согласно работе [11] известными значениями следующих интегралов:

$$\iint_S \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2]^{3/2}} d\xi S = -\frac{\pi^2}{a};$$

$$\iint_S \frac{\xi_1^2 \sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2]^{3/2}} d\xi S = \frac{\pi^2}{16a} (4a^2 - 33x^2 - 3y^2);$$

$$\iint_S \frac{\xi_2^2 \sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{[(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2]^{3/2}} d\xi S = \frac{\pi^2}{16a} (4a^2 - 3x^2 - 33y^2).$$

Далее применим следующую схему решения задачи. Приравняем коэффициенты при вторых степенях декартовых координат. В результате находим $h_1/h_0 = (a/b)^3$. Из равенства коэффициентов при однородных слагаемых приходим к квадратному уравнению относительно значения неизвестного радиуса a , из которого находим значения неизвестных параметров контакта:

$$a = b \sqrt{1 - \frac{4(p - P_0)bL^*}{3\pi h_0}}; \quad h_1 = h_0 \left(1 - \frac{4(p - P_0)bL^*}{3\pi h_0} \right)^{3/2}. \quad (15)$$

Таким образом, из выражений (15) по известным размерам первоначальной выемки (параметры b и h_0), значениям сжимающих усилий p и давления P_0 , двух упругих постоянных основы и десяти независимым значениям электроупругих постоянных пьезоэлектрического материала (входят через величину L^*) определяем значение радиуса контакта a и максимальную высоту зазора h_1 (после контактного взаимодействия). Также из равенства нулю выражения a находим значение силы сжатия $p^* = P_0 + \frac{3\pi h_0}{4bL^*}$, при котором выемка в упругом теле полностью заполняется материалом. Следовательно, при сжатии $p \geq p^*$ исходная приповерхностная выемка в упругой основе в результате контактного взаимодействия полностью исчезает.

При переходе от пьезоэлектрического материала к чисто упругому трансверсально - изотропному материалу имеем

$$L^* - \frac{1 - \nu}{\mu} \rightarrow M^{\text{Trans}} = \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11}n_1 + c_{13})(c_{11}n_2 + c_{13})},$$

где n_1, n_2 — корни квадратного уравнения $c_{11}c_{44}n^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]n + c_{33}c_{44} = 0$, что зависят от упругих постоянных трансверсально - изотропного материала. Заменив в выражениях (15) значение M^* величиной M^{Trans} , находим параметры контакта системы «упругое трансверсально-изотропное полупространство — жесткая основа с выемкой».

Последующий предельный переход от трансверсально-изотропного материала к упругому изотропному материалу приводит к переходу $M^{\text{Trans}} \rightarrow (1-\nu)/\mu$. При взаимодействии упругого изотропного полупространства с упругой основой, содержащей осесимметричную выемку (частный случай рассмотренной контактной задачи электроупругости), заменив в формулах (15) величину M^* значением $(1-\nu_1)/\mu_1$, приходим к полному совпадению результатов с данными работы [7].

Алгоритм 2. Второй алгоритм решения задачи (в рамках используемой математической модели) основан на применении аппарата парных интегральных уравнений. Для решения задачи воспользуемся следующими выражениями гармонической функции $\chi(r, z)$ и потенциальных функций $\Phi_j^{(1)}(x, y, z_j)$, ($j=1, 2, 3, 4$):

$$\chi(r, z) = \int_0^{\infty} A^{(2)}(\lambda) e^{\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda ;$$

$$\Phi_j^{(1)}(x, y, z_j) = \alpha_j^* \int_0^{\infty} \frac{A^{(1)}(\lambda)}{\lambda} e^{-\lambda z_j} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (j=1, 2, 3); \quad \Phi_4^{(1)} = 0. \quad (16)$$

Значения постоянных α_j^* в выражениях (16) определяем согласно уравнениям (13), как и при использовании алгоритма 1. Тогда на поверхности $z=0$ удовлетворяются такие граничные условия: $\sigma_{zr}^{(i)} = 0, \quad 0 < r < \infty$; $D_z^{(i)} = 0, \quad (i=1, 2)$.

Из оставшихся граничных условий приходим к системе парных интегральных уравнений

$$-\int_0^{\infty} \lambda A^{(1)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = p - P_0, \quad \int_0^{\infty} \lambda A^{(2)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = p - P_0, \quad 0 < r < a ;$$

$$\left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* k_j / \sqrt{\nu_j} \right) \int_0^{\infty} A^{(1)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda =$$

$$= \left(\frac{1-\nu}{\mu} \right) \int_0^{\infty} A^{(2)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda + f(r), \quad a < r < \infty ;$$

$$-\int_0^{\infty} \lambda A^{(1)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda A^{(2)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda, \quad a < r < \infty. \quad (17)$$

Полагая $A^{(1)} = -A^{(2)}$ и объединяя первое и третье уравнения системы (17), приходим к системе парных интегральных уравнений. Следуя в дальнейшем схеме рассмотрения задачи о контакте двух упругих изотропных полупространств (одно из которых содержит выемку) [7], сводим систему парных интегральных уравнений к интегральному уравнению Абеля. Аналогично работе [7] приходим к явным выражениям компонент напряжений и перемещений в области контакта электроупругого полупространства с упругой основой.

Так, имеем

$$\sigma_{zz}^{(i)}|_{z=0} = -p + \sigma' + \sigma'' ,$$

где

$$\sigma' = \begin{cases} (p - P_0) - \frac{3\pi h_0}{4L^* b} \left(1 - \frac{3r^2}{2b^2}\right), & 0 < r < a, \\ \frac{2}{\pi} (p - P_0) \left(\arcsin \frac{a}{r} - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right) - \frac{3h_0}{2L^* b} \left[\left(1 - \frac{3r^2}{2b^2}\right) \arcsin \frac{a}{r} - \right. \\ \left. - \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) + \frac{a\sqrt{r^2 - a^2}}{2b^2} \right], & a < r < \infty, \end{cases} \quad (18)$$

$$\sigma'' = \frac{1}{L^*} \begin{cases} \frac{3\pi h_0}{4b} \left(1 - \frac{3r^2}{2b^2}\right), & 0 < r < b, \\ -\frac{3h_0 b^2}{r^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+3)(2n+5)2n!!} \left(\frac{r}{b}\right)^{2n}, & b < r < \infty. \end{cases} \quad (19)$$

Для определения неизвестного радиуса зазора a воспользуемся условием ограниченности контактного давления на границе области контакта в плоскости контакта $z = 0$. Поскольку в формулах (19) отсутствуют сингулярные члены, на основе анализа сингулярных слагаемых в формулах (18) получаем

$$a = b \sqrt{1 - \frac{4(p - P_0)bL^*}{3\pi h_0}}. \quad (20)$$

Полагая $a = 0$, приходим к значению сжимающих усилий p^* , при котором зазор полностью закрывается

$$p^* = P_0 + \frac{3\pi h_0}{4bL^*}. \quad (21)$$

Сравнивая выражения (20), (21) с формулами (15), можно заключить, что два используемых алгоритма решения задачи приводят к одним и тем же выражениям для радиуса площадки контакта и величины усилий, полностью закрывающим зазор между телами. Заметим, что при условиях гладкости смыкания берегов выемки для алгоритма 2 также удовлетворяются.

Следовательно, два приведенных алгоритма являются достаточно эффективными при решении рассматриваемой задачи. Их применение приводит к одним и тем же аналитическим выражениям для параметров контакта. В то же время алгоритм 2 дает возможность извлечь более детальную информацию о характере распределения напряжений в области контакта (по сравнению с алгоритмом 1), однако его применение в силу уровня развития соответствующего математического аппарата ограничено лишь осесимметричной формой выемки. Для алгоритма 1 такого ограничения нет и его потенциальные возможности несколько шире.

При переходе к чисто упругому трансверсально-изотропному материалу имеем

$$L^* - \frac{1-\nu}{\mu} = M^* \rightarrow M^{\text{Trans}} = \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11}n_1 + c_{13})(c_{11}n_2 + c_{13})},$$

где n_1, n_2 — корни квадратного уравнения $c_{11}c_{44}n^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]n + c_{33}c_{44} = 0$, которые зависят от упругих свойств трансверсально-изотропного материала. После рутинных преобразований, основанных на свойствах корней квадратного уравнения, значение M^{Trans} получаем в виде

$$M^{\text{Trans}} = \frac{c_{11}}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)} \sqrt{\frac{c_{33}c_{11} - c_{13}(c_{13} + 2c_{44})}{c_{11}c_{44}}} + 2\sqrt{\frac{c_{33}}{c_{11}}}. \quad (22)$$

Выражение (22) удобно тем, что в него можно сразу подставлять значения упругих постоянных трансверсально-изотропного материала, оно не требует проведения промежуточных вычислений. Заменяя в полученных выражениях $L^* - \frac{1-\nu}{\mu}$ величиной M^{Trans} , получим параметры контактного взаимодействия системы «упругое трансверсально-изотропное полупространство – упругая основа с выемкой». Последующий предельный переход от трансверсально-изотропного материала к упругому изотропному материалу приводит к переходу от значения M^{Trans} к $(1-\nu)/\mu$. В результате в частном случае рассмотренной задачи приходим к совпадению результатов исследований с данными работы [7] для контактного взаимодействия двух упругих изотропных тел, одно из которых содержит выемку.

Анализ результатов численных исследований. На рис. 2, 3 приведены зависимости радиуса и высоты зазора между упругой основой с приповерхностной выемкой и электроупругим полупространством от действующих нагрузок (сплошные линии). На этих рисунках использовано обозначение $N^* = 4bL^*/(3\pi h_0)$. Показано изменение радиуса и высоты зазора при меняющейся нагрузке, которые зависят также от значения внутреннего давления P_0 , геометрических параметров выемки (b, h_0), двух упругих постоянных материала основы и десяти электроупругих постоянных пьезоэлектрического материала. Зависимость от свойств материалов контактирующих тел осуществляется через величину L^* . Согласно рис. 1 приповерхностная выемка полностью заполняется материалом при $p \geq P_0 + \frac{1}{N^*} = p^*$. Для значений нагрузок $P_0 \leq p \leq p^*$ радиус и высота зазора между телами показаны на рис. 2 и 3 сплошными линиями. Влияние эффекта связанности силовых и электрических полей на параметры контакта в рассматриваемой проблеме взаимодействия тел можно оценить на основе вычислений отношения M^*/M^{Trans} для каждого конкретного вида пьезоэлектрического материала. Так, для пьезокерамических материалов PZT-4, PХЕ-5, PZT-5, PZT-7А, ВаTiO3, PZT-5Н, Р-7 получаем $M^*/M^{\text{Trans}} = 0,6947$;

0,7348; 0,6961; 0,7372; 0,8544; 0,7837; 0,7112 соответственно. То есть значение M^* для перечисленных электроупругих материалов превышает соответствующее значение M^{Trans} в процентном выражении (для чисто упругого трансверсально-изотропного материала с теми же упругими свойствами, что и пьезокерамический материал) на 30,5; 26,5; 30,4; 26,3; 14,6; 21,6; 28,9. При $\mu \rightarrow \infty$ в L^* переходим к жесткой основе (чтобы избежать влияния упругих постоянных основы) на параметры контакта. На рис. 2 и 3 штриховыми линиями показано изменение параметров контакта жесткой основы с чисто упругим трансверсально-изотропным полупространством, упругие свойства которого соответствуют свойствам электроупругого материала PZT-5Н. Тогда, сравнивая параметры контакта (радиус зазора и его высоту) для сплошных линий (пьезоэлектрический материал) и штриховых линий (упругий трансверсально-изотропный материал) на этих рисунках, для материала PZT-5Н можно оценить влияние связанности силовых и электрических полей на параметры контактного взаимодействия. Видно, что связанность силовых и электрических полей препятствует закрытию выемки при сжатии электроупругого полупространства с основой. Для закрытия зазора при контакте с пьезоупругим полупространством требуются большие значения сжимающих усилий, чем для упругого трансверсально-изотропного полупространства (с теми же упругими свойствами, что и электроупругий материал).

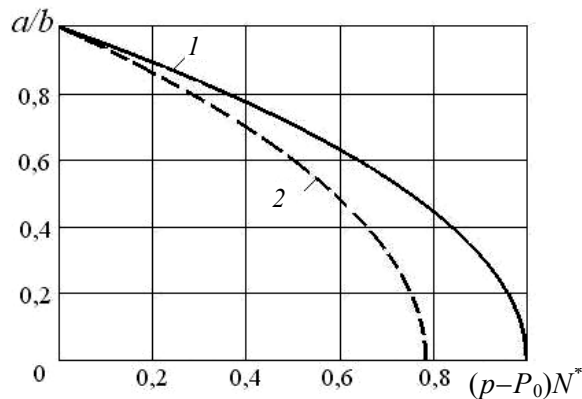


Рис. 2. Зависимость радиуса зазора от действующих нагрузок

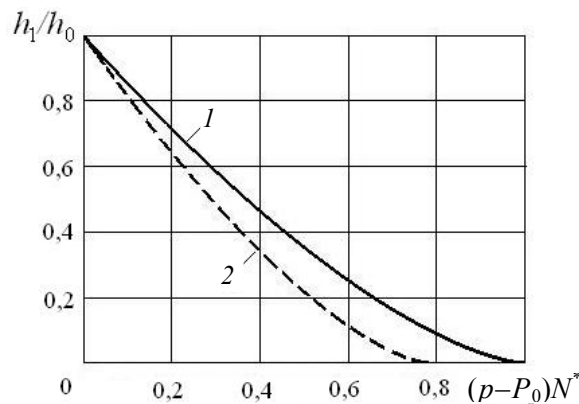


Рис. 3. Изменение высоты зазора при действии нагрузок

Из выражений (15), (21), (22) видно, что при увеличении жесткости материала основы (увеличении модуля сдвига материала) зазор между телами уменьшается медленней, чем для более эластичной основы. Величина p^* (значение сжимающих усилий, полностью закрывающих зазор) с увеличением жесткости основы также увеличивается, что соответствует физическим соображениям. В предельном случае ($\mu \rightarrow \infty$) выемка в основе заполняется только пьезоэлектрическим материалом, поскольку основа становится недеформируемой. В случае же более мягкой упругой основы совместное деформирование электроупругого материала и эластичной основы позволяет затратить меньше усилий для полного закрытия выемки системы «пьезоэлектрическое полупространство — упругая основа».

Проанализируем также влияние силовых параметров на процесс совместного деформирования электроупругого материала и упругой основы с выемкой. Из формул (15), а также (20), (21) видно, что внутреннее давление внутри выемки препятствует уменьшению размеров выемки при сжатии. При этом на размеры зазора при деформировании влияет простая разность усилий сжатия p и внутреннего давления P_0 , которая входит в выражения (15), (20).

Принципиально важным, с точки зрения авторов, является то обстоятельство, что для всех семи известных пьезокерамических материалов (PZT-4, PХЕ-5, PZT-5, PZT-7A, BaTiO₃, PZT-5H, P-7) эффект связанности силовых и электрических полей приводил к увеличению значений усилий для полного закрытия зазора по сравнению со случаем закрытия зазора в трансверсально-изотропном упругом материале (с теми же упругими свойствами, что и соответствующий электроупругий материал). При этом эффект связанности для рассмотренного ряда материалов является наименее выраженным для пьезокерамического материала BaTiO₃, а наиболее выраженным — для PZT-4. Для упомянутых материалов M^* / M^{Trans} равно 0,8544 и 0,6947 соответственно.

Отметим также, что проведенные числовые исследования и оценка влияния связанности силовых и электрических полей для конкретных пьезокерамических материалов позволяет в какой-то мере спрогнозировать погрешность, вносимую в результаты исследований контактного взаимодействия электроупругого полупространства, при использовании упрощенной модели трансверсально-изотропного тела упругого тела (вместо электроупругого), которое имеет те же упругие свойства, что и соответствующий электроупругий материал. При этом величина M^* заменяется в формулах (15) значением M^{Trans} и соответствующая погрешность (относительно M^*) составляет (%) 30,5; 26,5; 30,4; 26,3; 14,6; 21,6; 28,9 для пьезокерамических материалов PZT-4, PХЕ-5, PZT-5, PZT-7A, BaTiO₃, PZT-5H, P-7 соответственно. Таким образом, наименьшая погрешность при использовании упрощенной модели для материала BaTiO₃, наибольшая — для PZT-4.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в настоящей работе на основе математической модели, учитывающей связанность силовых и электрических полей в пьезоэлектрическом материале, рассмотрена проблема контактного взаимодействия в сис-

теме «упругая основа с выемкой — электроупругое полупространство». Исследуемое контактное взаимодействие зависит от 16 независимых параметров (значения сжимающей нагрузки p и давления P_0 , двух геометрических параметров исходной выемки, двух упругих постоянных материала основы и десяти значений электроупругих постоянных), что входят в систему связанных уравнений статики электроупругости и граничные условия. Предложены два алгоритма решения задачи, приводящие к нахождению точного ее решения. В виде замкнутых выражений получены основные параметры контактного взаимодействия тел. Найдены геометрические размеры зазора между телами (радиус контакта, высота зазора), значение нагрузки для полного закрытия зазора. Выявлено влияние связанности силовых и электрических полей на контактное взаимодействие. Как частный случай из полученных выражений следует решение задачи контактного взаимодействия упругого трансверсально-изотропного полупространства с упругой изотропной основой, содержащей приповерхностную выемку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chang Ch.-R.* Eshelby's tensor for cubic piezoelectric crystals and its application to cavity problems / Ch.-R. Chang // *Eng. Frac. Mech.* — 2016. — **155**. — P. 119–129.
2. *Kaloerov S.A.* Determination of intensity factors for stresses, induction and field strength in multi-connected electro-elastic anisotropic media / S.A. Kaloerov // *Int. Appl. Mech.* — 2007. — **43**, № 6. — P. 77–84.
3. *Xu C.H.* Electroelastic singularities and intensity factors for an interface crack in piezoelectric–elastic bimetals / C.H. Xu, Z.H. Zhou, X.S. Xu, A.Y.T. Leung // *Appl. Math. Model.* — 2015. — **39**, № 9. — P. 2721–2739.
4. *Podil'chuk Yu.N.* Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems / Yu.N. Podil'chuk // *Int. Appl. Mech.* — 2003. — **39**, № 2. — P. 132–170.
5. *Кирилюк В.С.* О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством / В.С. Кирилюк // *Теоретическая и прикладная механика.* — 2009. — Вып. 46. — С. 29–35.
6. *Кирилюк В.С.* О расклинивании пьезокерамических материалов / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук // *Прикладная механика.* — 2010. — **46**, № 5. — С. 46–57.
7. *Монастирський Б.Є.* Осесиметрична контактна задача для півпросторів з геометричним збуренням поверхні / Б.Є. Монастирський // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* — 1999. — № 6. — С. 22–26.
8. *Kit G.C.* Просторові контактні задачі для пружного півпростору і жорсткої основи з поверхневими виїмками / Г.С. Кіт, Р.М. Мартиняк // *Математичні методи та фізико-механічні поля.* — 1999. — **42**, № 6. — С. 7–11.
9. *Мартиняк Р.М.* Контакт пружних півпросторів за наявності між ними еліптичного зазору з рідиною / Р.М. Мартиняк, Б.С. Слободян // *Фізико-хімічна механіка матеріалів.* — 2009. — № 1. — С. 62–65.
10. *Green A.E.* Theoretical elasticity / A.E. Green, W. Zerna // Oxford, Clarendonpress, 1968. — 458 p.
11. *Хай М.В.* Двумерные интегральные уравнения ньютоновского потенциала и их приложения / М.В. Хай. — К.: Наук. думка, 1993. — 256 с.

Поступила 27.05.2016