КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том **16** № **5** **2000**

УДК 521;528

Самогравітуючі диски як засоби описання зовнішніх гравітаційних полів небесних тіл

О. В. Завізіон

Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини
20300, Черкаська обл., м. Умань, вул. Садова 2

Знайдено еквівалентний самогравітуючий неоднорідний диск, зовнішній гравітаційний потенціал якого збігається з зовнішнім гравітаційним потенціалом еліпсоїда обертання. Отримано розв'язки для однорідного і неоднорідних співфокусних еліпсоїдів обертання. При умові, що планети-гіганти мають фігури, близькі до рівноважних, знайдено параметри систем неоднорідних дисків, за допомогою яких описуються зовнішні гравітаційні потенціали планет-гігантів. Порівнюються спостережувані та модельні значення гравітаційних моментів планет-гігантів.

САМОГРАВИТИРУЮЩИЕ ДИСКИ КАК СПОСОБ ОПИСАНИЯ ВНЕШНИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ, Завизион О. В. — Найден эквивалентный самогравитирующий неоднородный диск, внешний гравитационный потенциал которого совпадает с внешним гравитационным потенциалом эллипсоида вращения. Получены решения для однородного и неоднородных софокусных эллипсоидов вращения. В допущении, что планеты-гиганты имеют фигуры, близкие к равновесным, найдены параметры систем неоднородных дисков, с помощью которых описываются внешние гравитационные потенциалы планет-гигантов. Сравниваются модельные и наблюдаемые гравитационные моменты планет-гигантов.

SELF-GRAVITATING DISKS AS A TOOL FOR DESCRIBING THE EXTERNAL GRAVITATIONAL FIELDS OF CELESTIAL BODIES, by Zavizion O. V. — We found an equivalent self-gravitating inhomogeneous disk whose external gravitational potential coincides with the external gravitational potential of the ellipsoid of revolution. Solutions for a homogeneous ellipsoid and inhomogeneous confocal ellipsoids were obtained. Giant planets were assumed to have forms close to equilibrium ones. The parameters of inhomogeneous disk systems which describe the external gravitational potential of giant planets were found. Gravitational moments of giant planets were taken from astronomical observational data.

Потенціалом самогравітуючого диска можна описувати зовнішній гравітаційний потенціал планет Сонячної системи. Такі еквігравітуючі диски необхідно розташовувати перпендикулярно до осі обертання планети з умовою суміщення центрів мас планети і диска. Даний метод відображає задання об'ємного потенціалу планет потенціалом неоднорідного плоского диска певного радіуса:

$$G\iiint_V \frac{\rho(Q_1)}{l_{PQ1}}dV_{Q_1} = G\iint_S \frac{\sigma(Q_2)}{l_{PQ2}}dS_{Q_2},$$

де $G = 6.67\cdot10^{-11}$ м^{3}кг$^{-1}$с$^{-2}$ — гравітаційна стала, Q_1 — точка, до якої віднесені елемент об'єму dV і густина ρ планети; Q_2 — точка, до якої віднесені елемент площі dS і густина σ диска; P — точка, в якій визначається гравітаційний потенціал.

Обернена гравітаційна задача полягає у визначенні густини σ і розмірів диска при заданій величині зовнішнього гравітаційного потенціалу. Для розв'язку поставленої задачі скористаємося методом моментів [2], який полягає в рівновазі мас і гравітаційних моментів планети і диска. Для осесиметричного тіла розв'язок зводиться до виконання системи інтегральних рівнянь

$$2\pi P_{2n}(0)\int_0^{R_x} \sigma(R')R'^{(2n+1)}dR' = \iiint_V \rho'^{2n}P_{2n}(\cos\theta')dV', \qquad n = 0,\dots\infty, \tag{1}$$

де $P_{2n}(\cos\theta')$ — парні поліноми Лежандра.

У випадку еліпсоїда обертання точний розв'язок оберненої задачі можливий тільки тоді, коли поверхня еліпсоїда еквіпотенціальна, тобто розподіл мас у еліпсоїді зберігає гомологічну стратифікацію [7]. Таким розподілом густини може бути закон

$$\rho(R, z) = \rho_0\left[\alpha + \beta\left(\frac{R^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right], \quad \alpha \ge 0, \quad \alpha + \beta \ge 0. \tag{2}$$

Якщо $\beta = 0$ і $\alpha \ne 0$, отримаємо однорідний еліпсоїд обертання ($\rho = \rho_0 =$ const), для якого система (1) набуде вигляду

$$\frac{3}{(2n+1)(2n+3)}(a^2 - c^2)^n = \frac{2\pi}{M}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^{R_x} \sigma(R')R'^{(2n+1)}dR'. \tag{3}$$

Точним розв'язком системи (3) є закон розподілу густини еквівалентного кругового диска радіуса

$$R_x = (a^2 - c^2)^{1/2}, \tag{4}$$

$$\sigma(R) = \frac{2a^2c\rho_0}{a^2 - c^2}\left(1 - \frac{R^2}{a^2 - c^2}\right)^{1/2} = \sigma_0\left(1 - \frac{R^2}{R_x^2}\right)^{1/2}.$$

Про подібний розв'язок, отриманий ще Ріманом, згадується в [9].

Як видно з (4), для стисненого еліпсоїда обертання ($a > c$) отримаємо дійсний розв'язок, для видовженого — уявний.

При розв'язуванні системи (2) для неоднорідних гомологічних еліпсоїдів обертання з розподілом густини (3) отримується однозначний розв'язок у вигляді кругового диска радіуса $R_x = (a^2 - c^2)^{1/2}$, який має закон розподілу густини

$$\sigma(R) = \frac{2a^2c\rho_0}{a^2 - c^2}\left[\left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right) + \frac{2}{3}\beta\frac{R^2}{a^2 - c^2}\right]\left(1 - \frac{R^2}{a^2 - c^2}\right)^{1/2}.$$

Якщо вважати фігури планет-гігантів близькими до рівноважних, то можна представити їх еліпсоїдами обертання. Розбивши фігуру планети на кілька еліпсоїдальних шарів, можна згідно з теорією потенціалу [1, 9] для кожного з них знайти еквігравітуючий диск, і зовнішній гравітаційний потенціал системи таких дисків буде з достатньою точністю описувати зовнішній потенціал планет-гігантів.

Нехай фігура планети складається з кількох однорідних еліпсоїдальних шарів, кожен з яких має власну густину ρ_i і стиснення f_i, згідно з багатошаровими моделями [3, 4, 6].

Першою умовою розбиття є умова рівності мас:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i ,$$

де M — маса планети; $M_i = (4\pi/3)(\rho_i - \rho_{i+1})R_i^3$ — маси однорідних еліпсоїдів обертання, з яких складається фігура планети ($\rho_{n+1} = 0$); $R_i = \sqrt[3]{a_i^2 c_i}$ — еквівалентний радіус шару; n — кількість шарів.

Друга умова: геометричне стиснення кожного шару повинне відповідати розв'язку диференціального рівняння Клеро [8, 10]

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{6}{r}\frac{\rho}{D}\frac{df}{dr} - \frac{6}{r^2}\left(1 - \frac{\rho}{D}\right) f = 0,$$

де $D = D(r) = \frac{3}{r^3}\int\limits_0^r \rho r'^2 dr'$ — середня густина сфери радіуса r. Граничними умовами для розв'язку вищевказаного рівняння є параметри на зовнішній поверхні:

$$f\big|_{r=R} = f_0, \qquad \left.\frac{df}{dr}\right|_{r=R} = \frac{1}{R}\left(\frac{5}{2}m - 2f_0\right),$$

де f_0 — поверхневе стиснення планети, $m = \omega^2 R^3/(GM)$, ω — кутова швидкість власного обертання планети.

Параметри отриманих моделей приведені в табл. 1 (графи 1—4). На їхній основі обчислимо параметри неоднорідних дисків:

$$R_{xm} = \sqrt{a_m^2 - c_m^2}, \qquad \sigma_{0m} = \frac{2a_m^2 c_m(\rho_m - \rho_{m+1})}{a_m^2 - c_m^2}$$

і побудуємо моделі систем неоднорідних самогравітуючих дисків (графи 5—7), що описують зовнішні гравітаційні потенціали планет.

Таблиця 1. Параметри моделей планет-гігантів

Номер шару i	Середній радіус R_i, км	ρ_i, г/см^3	f_i	Номер диска m	R_{xm}, км	σ_{0m}, 10^{11} г/см^2
			Юпітер			
1	4893	12.60	0.00429	1	453.17	4.678
2	9086	8.50	0.00976	2	1270.72	5.900
3	53818	2.15	0.03431	3	14139.60	2.105
4	63604	0.80	0.05102	4	20409.00	0.531
5	69894	0.37	0.06487	5	25462.36	0.390
			Сатурн			
1	5247	9.08	0.00874	1	694.25	2.361
2	18073	5.14	0.02132	2	3738.31	2.855
3	28567	1.76	0.04829	3	8919.32	0.287
4	39644	1.27	0.07168	4	15108.85	0.595
5	58300	0.18	0.09500	5	25639.85	0.108
			Уран			
1	8122	4.37	0.00902	1	1091.85	1.681
2	19543	2.50	0.01350	2	3214.77	3.438
3	25380	0.12	0.02070	3	5192.48	0.145
			Нептун			
1	12311	4.99	0.01197	1	1907.08	2.422
2	19205	2.63	0.01500	2	3330.47	3.130
3	24622	0.18	0.01710	3	4560.24	0.258

Таблиця 2. Динамічні характеристики планет-гігантів (J^*_{2k} — дані спостережень; J_{2k} — модельні дані)

Планета	M, 10^{26} кг	a_e, км	$J_2 \cdot 10^2$	$J^*_2 \cdot 10^2$	$J_4 \cdot 10^4$	$J^*_4 \cdot 10^4$	$J_6 \cdot 10^5$	$J^*_6 \cdot 10^5$	m
Юпітер	18.97	71492	1.4697 ±0.0001	1.47	−5.84 ±0.05	−5.85	3.1±2.0	3.475	0.083
Сатурн	5.68	60268	1.6331 ±0.0018	1.63	−9.14 ±0.61	−9.12	10.8±5.0	8.03	0.139
Уран	0.8687	25559	0.351323± 0.000032	0.351	−0.319 ±0.005	−0.322	0.021— 0.067	0.04784	0.0285
Нептун	1.0243	24764	0.3539 ±0.0010	0.353	$0.28^{+0.12}_{-0.20}$	−0.313			0.0259

Для перевірки точності описання зовнішнього гравітаційного потенціалу рівноважної планети

$$V = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k} P_{2k}(\cos\theta)\left(\frac{a_e}{r}\right)^{2k}\right]$$

порівняємо обчислені значення парних гравітаційних моментів [5]

$$J_{2k} = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{Ma^{2n}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{0i}\int_0^{R_{x_i}}\left(1 - \frac{R'^2}{R^2_{x_i}}\right)^{1/2} R'^{2k} dR'^2$$

та їхні значення J^*_{2k}, отримані із астрономічних спостережень. Дані табл. 2 показують, що описання зовнішнього гравітаційного потенціалу системою самогравітуючих неоднорідних дисків — достатньо ефективний метод. Відносна похибка визначення перших гравітаційних моментів складає δJ_2 = = 0.02 % і δJ_4 = 0.17 % для Юпітера; відповідно 0.19 % і 0.22 % для Сатурна; 0.09 % і 0.94 % для Урана; δJ_2 = 0.25 % для Нептуна. Відмінності гравітаційних моментів пояснюються неоднорідністю внутрішньої будови та відсутністю інформації про геометричне стиснення внутрішніх шарів планет-гігантів. Порівняння вищих гравітаційних моментів неможливо зробити через відсутність надійних спостережних даних.

1. *Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала.—М.: Наука, 1988.—272 с.
2. *Ахиезер Н., Крейч М.* О некоторых вопросах теории моментов. — Харьков: ДНТВУ, 1938.—256 с.
3. *Гудкова Т. В., Жарков В. Н.* Модели Юпитера и Сатурна с однородным распределением гелия // Письма в Астрон. журн.—1993.—19, № 2.—С. 153—159.
4. *Гудкова Т. В., Жарков В. Н.* Модели Юпитера и Сатурна с наружными оболочками, обогащенными водой // Письма в Астрон. журн.—1996.—22, № 1.—С. 66—80.
5. *Дубошин Г. Н.* Теория притяжения.—М.: Физматгиз, 1961.—288 с.
6. *Жарков В. Н.* Внутреннее строение планет-гигантов // Астрон. вестник.—1991.—25, № 6.—С. 627—649.
7. *Завізіон О. В.* Про густину самогравітуючих дисків, зовнішні потенціали яких співпадають з гравітаційними потенціалами еліпсоїдів обертання // Вісник Астрон. школи.—2000.—1, № 1.—С. 82—85.
8. *Машимов М. М.* Планетарные теории геодезии.—М.: Наука, 1982.—261 с.
9. *Мещеряков Г. А.* Задачи теории потенциала и обобщенная Земля.—М.: Наука, 1991.—216 с.
10. *Мориц Г.* Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли.—Киев, 1994.—240 с.

Надійшла до редакції 23.10.00