КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 16 № 3 2000

УДК 521.9:528.111:519.24

Устарел ли способ наименьших квадратов?

И. В. Джунь

Ровенский экономико-гуманитарный институт
33018, г. Ровно, ул. Д. Галицкого, 25, корп. 6

Осуществлена статистическая проверка аксиоматических основ способа наименших квадратов (СНК), заложенных А. А. Марковым, на основе использования астроинформации. Показано, что на современном этапе развития наблюдательной астрономии СНК следует применять при значениях параметра распределения Пирсона VII типа $m \geq 7$, если число наблюдений не превышает 2000.

ЧИ ЗАСТАРІВ МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ?, Джунь Й. В. — Виконана статистична перевірка аксюматичних положень методу найменших квадратів (МНК), сформульованих А. А. Марковим, на основі використання астроінформації. Показано, що на сучасному етапі розвитку астрометрії МНК слід застосовувати при значеннях параметра розподілу Пірсона VII типу $m \geq 7$, якщо обсяг спостережень не перевищує 2000.

IS THE METHOD OF LEAST-SQUARES OUT OF DATE?, by Dzhun I. V. — Statisticals examination of the axiomatic bases of the method of least-squares was carried out. We show, that the method of least-squares may be of practical importance in data analyses if the Pearson VII type distribution parameter is $m \geq 7$ and the number of observations is less than 2000.

В последние несколько десятков лет классический способ наименьших квадратов (СНК) подвергается критике на том основании, что ошибки многократных наблюдений, как правило, не следуют нормальному распределению. Источником такой критики является сама работа «Теория комбинаций наблюдений...» Гаусса, в которой он обосновывает СНК из предположения, что ошибки наблюдений следуют закону e^{-h^2}, и письмо к Шумахеру 25.11.1844 г., в котором Гаусс писал: «...вывод, изложенный в “Теории комбинаций наблюдений...”, на мой взгляд, есть единственно приемлемым» [3]. После появления известной работы [22], в которой С. Ньюкомб впервые выразил несогласие с гипотезой нормальности, а также классических работ А. Эддингтона, К. Пирсона, Г. Джеффриса [18, 20, 23], основания для критики СНК возросли. Р. Фишер в 1912 г. [19] предложил метод максимума правдоподобия (ММП), который позволял получать эффективные оценки параметров для любого непрерывного от $+\infty$ до $-\infty$ и дважды дифференцируемого закона плотности. В случае нормального распределения ММП приводит к формулам, идентичным формулам СНК.

Впервые ММП для обработки астрономических наблюдений применил Г. Джеффрис в работе [20] для очень больших отклонений распределений ошибок от закона Гаусса. ММП аналитически значительно сложнее СНК, а его практическая реализация требует понимания таких тонкостей, которые практически доступны лишь специалистам, освоившим оксфордский курс «Теории вероятностей» [21] Г. Джеффриса. Поэтому, насколько нам известно, ММП применялся в астрометрии лишь эпизодически [4, 5, 7, 9]. Со временем все больше и больше данных подтверждали негауссовый характер ошибок астрономических наблюдений. Поэтому мы должны прийти к выводу, что не всегда законно повсеместно используем СНК. Действительно ли мы должны простые математические приемы СНК заменить на более сложную аналитическую архитекгуру ММП или других методов, которые учитывают негауссовый характер ошибок? Решение этого вопроса нам представляется важным потому, что еще в 1970-х гг. известные математики-статистики это предлагали. Например, Д. Тьюки писал в работе [24]: «...если мы хотим получать всюду наибольший эффект из наших данных, то мы должны примириться с возможностью, — нет, почти с достоверностью, — что распределение наших наблюдений часто будет таким, для которого сведение к минимуму квадратичного выражения — выбор очень плохой. И необходимо лишь незначительное изменение кривой распределения Гаусса, чтобы использование арифметического среднего привело к несколько худшему представлению о типичности поведения выборки, а сумма квадратов отклонений стала почти нетерпимо плохой характеристикой ее разброса..., в частности, процедуры, необходимые для достижения качественного результата будут, в конце концов, лишь немного более сложными, чем оценка фиксированной квадратичной функции». Д. Тьюки не уточнил, при каких объемах выборок и при каких отклонениях от закона Гаусса стандарт становится «нетерпимо плохой характеристикой разброса», тем не менее атака на СНК специалиста такого уровня нам представляется исключительно серьезной. С другой стороны, А. Марков еще в 1899 г., закладывая аксиоматические основы СНК, писал [10]: «Не допуская определенного закона распределения погрешностей, мы можем прийти к СНК, исходя из следующих положений:

1) мы рассматриваем только такие приближенные равенства, которые, по нашим предположениям, не заключают постоянной погрешности;

2) веса различных приближенных равенств мы считаем обратно пропорциональными математическим ожиданиям квадратов погрешностей;

3) для каждого неизвестного отыскиваем такое приближенное равенство, вес которого наибольший».

Не задаваясь определенным законом распределения ошибок и аксиоматически задав систему весов, А. Марков приходит к СНК, заменив постулат о нормальном законе, постулатом о весах наблюдений. Вопрос состоит в том, достаточно ли оправданной является такая замена применительно к реалиям астрометрии. Основная задача настоящей работы сводится к определению того, действительно ли вторые центральные моменты, найденные для реальных ошибок астрометрических рядов, являются «нетерпимо плохой характеристикой» неопределенности, вносимой ошибками наблюдений, по сравнению с полной ее характеристикой. Для получения последней для закона плотности y, которому подчинены ошибки астрономических наблюдений, воспользуемся шенноновской мерой:

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} y \ln y \, dx, \tag{1}$$

которая впервые была применена П. В. Новицким для анализа погрешностей наблюдений [11].

В результате проделанного нами исследования [5] было установлено, что ряды ошибок астрономических наблюдений удивительно однотипны. Все они имеют существенный эксцесс $E > 0$ и, как правило, незначимую асимметрию, т. е. они могуть быть удовлетворительно представлены, например, распределением Пирсона VII типа, имеющего плотность вероятности

$$y = c\sigma_{\mathrm{VII}}^{-1}R^{-\mathrm{m}}, \tag{2}$$

где

$$c = \left[\sqrt{2(m-0.5)}\,B\left(m+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\right]^{-1}, \tag{3}$$

$$R = 1 + \left(\frac{x-\lambda}{\sigma_{\mathrm{VII}}}\right)^2\frac{1}{2M}, \qquad M = \frac{(m-0.5)^2}{m^2}; \tag{4}$$

$B(z, w)$ — бэта-функция; λ, σ_{VII}, m — параметры распределения Пирсона VII типа, в котором m может рассматриваться как мера отклонения от закона Гаусса, для которого $m = \infty$.

Вычислим теперь по формуле (1) энтропию H_{VII} распределения (2), полагая $\lambda = 0$ и воспользовавшись интегралами [12]:

$$\int\limits_0^\infty (x^\mu + z^\mu)^{-\mathrm{p}}dx = z^{1-\rho\mu}\mu^{-1}B(\mu^{-1}, \rho - \mu^{-1}); \tag{5}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\mathrm{a}-1}\ln(ax+d)}{(ax+d)^{\mathrm{p}}}\,dx = d^{\alpha-\rho}a^{-\alpha}B(\alpha, \rho-\alpha)\,[\ln a + \Psi(\rho) - \Psi(\rho-\alpha)], \tag{6}$$

где $\Psi(z)$ — пси-функция. Подставляя (2) в (1), с учетом (3)—(6), имеем

$$\begin{gathered} H_{\mathrm{VII}} = -\ln\frac{c}{\sigma_{\mathrm{VII}}} + \frac{mc}{\sigma_{\mathrm{VII}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R^{-\infty}\ln R\,dx, \\ H_{\mathrm{VII}} = \ln\left\{\frac{\sigma_{\mathrm{VII}}}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{m}\,[\Psi(\mathrm{m})\,-\,\Psi(\mathrm{m}\,+\,0.5)]}\right\}, \end{gathered} \tag{7}$$

Полагая в (1), что y следует закону Гаусса, имеем

$$H_{\Gamma} = \ln(\sigma\sqrt{2\pi\mathrm{e}}), \tag{8}$$

где σ^2 — дисперсия нормального распределения, имеющего энтропию H_{Γ}.

Приравнивая $H_{\mathrm{VII}} = H_{\Gamma}$, имеем из (8)

$$H_{\mathrm{VII}} = \ln(\sigma\sqrt{2\pi\mathrm{e}}), \tag{9}$$

откуда, учитывая (7), получим:

$$\sigma = (2\pi\mathrm{e})^{-1/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{H_{VII}}} = \frac{\sigma_{\mathrm{VII}}}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}\,c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{m}\,[\Psi(\mathrm{m})\,-\,\Psi(\mathrm{m}\,-\,0.5)]}. \tag{10}$$

Следовательно, если для распределения Пирсона VII типа с любым отклонением от нормального закона m, найти H_{VII} формуле (9), то σ в (10) — это стандартная погрешность такого гауссового распределения, энтропия которого $H_{\mathrm{VII}} = H_{\Gamma}$. Марковскую меру веса σ_0^2 для распределения (2) находим, используя формулу:

$$\sigma_0^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\lambda)^2y\,dx = c\sigma_{\mathrm{VII}}^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\lambda)^2R^{-\infty}dx = \sigma_{\mathrm{VII}}^2\frac{M}{m-1.5}, \tag{11}$$

где λ — математическое ожидание независимой переменной x.

Иными словами, цель нашего исследования состоит в вычислении соотношения

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \tag{12}$$

для наиболее известных рядов ошибок астрономических наблюдений.

Для распределения Пирсона УП типа соотношение (12) принимает следующий вид с учетом выражений (10) и (II):

$$k^2 = \frac{\Gamma^2(m - 0.5)}{\Gamma^2(m)} (m - 1.5) e^{2m[\Psi(m) - \Psi(m - 0.5)] - 1}. \tag{13}$$

Как видим из (13), коэффициент k^2 зависит только от параметра m.

Для иллюстрации характера этой зависимости в табл. 1 нами приведены значения k для $2.0 \leq m \leq 6.9$.

Таблица 1. **Значения коэффициента k в зависимости от параметра m распределения Пирсона VII типа**

m	k	m	k	m	k	m	k	m	k
2.0	0.823	3.0	0.954	4.0	0.979	5.0	0.988	6.0	0.993
2.1	0.853	3.1	0.958	4.1	0.981	5.1	0.989	6.1	0.993
2.2	0.876	3.2	0.964	4.2	0.982	5.2	0.989	6.2	0.993
2.3	0.894	3.3	0.965	4.3	0.983	5.3	0.990	6.3	0.993
2.4	0.908	3.4	0.968	4.4	0.984	5.4	0.990	6.4	0.994
2.5	0.920	3.5	0.970	4.5	0.985	5.5	0.991	6.5	0.994
2.6	0.929	3.6	0.973	4.6	0.986	5.6	0.991	6.6	0.994
2.7	0.937	3.7	0.975	4.7	0.986	5.7	0.992	6.7	0.994
2.8	0.994	3.8	0.976	4.8	0.987	5.8	0.992	6.8	0.994
2.9	0.949	3.9	0.978	4.9	0.988	5.9	0.992	6.9	0.995

Значения параметров λ, σ_{VII}, m необходимых при использовании формул (10)—(12), мы нашли на основе функции правдоподобия L, употребив формулу (2):

$$L = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{c}{\sigma_{\mathrm{VII}}} R_i^{-m} \right)^{n_i},$$

где n_i — число наблюдений в i-м разряде гистограммы. ММП-оценки для исследуемых рядов мы получали, решая следующую систему уравнений правдоподобия:

$$\left\{ \begin{aligned} &-\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{m}{M\sigma_{\mathrm{VII}}^2} \sum_{i=1}^{r} n_i R_i^{-1}(x_i - \lambda) = 0, \\ &-\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_{\mathrm{VII}}} = \frac{n}{\sigma_{\mathrm{VII}}} - \frac{m}{M\sigma_{\mathrm{VII}}^3} \sum_{i=1}^{r} n_i R_i^{-1}(x_i - \lambda)^2 = 0, \\ &-\frac{\partial \ln L}{\partial m} = n\Psi_0 - \sum_{i=1}^{r} n_i \ln R_i + M_i \sum n_i R_i^{-1} \left(\frac{x_i - \lambda}{\sigma_{\mathrm{VII}}} \right)^2 = 0, \end{aligned} \right. \tag{14}$$

$$\Psi_0 = \Psi(m + 1) - \Psi(m + 0.5) - [2(m - 0.5)]^{-1}.$$

$$M_1 = \frac{m + 1}{2M(m - 0.5)},$$

где $n = \sum n_i$.

Как было показано в работе [6], ММП-оценки распределения Пирсона VII типа являются состоятельными и эффективными. Следовательно, при вычислении дисперсий этих оценок можно воспользоваться границами неравенства Рао—Крамера [6]:

$$\begin{gathered}\sigma_\lambda^2 \geq \sigma_{\mathrm{VII}}^2 \frac{(m-0.5)^2(m+1)}{nm^3},\\ \sigma_{\sigma_{\mathrm{VII}}}^2 \geq \sigma_{\mathrm{VII}}^2 \frac{m+1}{2n(m-0.5)},\end{gathered} \tag{15}$$

$$\sigma_{\mathrm{m}}^2 \geq \left\{ n\left[\Psi'(m-0.5) - \Psi'(m) - \frac{m+1}{2m^2(m-0.5)} \right] \right\}^{-1} = \frac{\sigma_{1\mathrm{m}}^2}{n}. \tag{16}$$

ММП-оценки параметра m для каждого исследуемого нами ряда, а также значения σ, σ_0, k^2, найденные по формулам (10)—(12), даны в табл. 2. Так как некоторые из рядов табл. 2 весьма сильно отклоняются от закона Гаусса, то классическая формула для вычисления стандартной ошибки среднего квадратического отклонения здесь оказывается непригодной. Эту стандартную ошибку мы получили из (11):

$$\sigma_0 = \sigma_{\mathrm{VII}} \left(\frac{M}{m-1.5} \right)^{0.5}. \tag{17}$$

Таблица 2. Результаты вычисления коэффициента k^2 и показателя дезинформации $1 - k^2$

Наименование ряда наблюдений	n	$\sigma_0 \pm$ σ_{σ_k} σ_{σ_0}	$m \pm \sigma_m$	$\sigma \pm \sigma_\sigma$	$k^2 \pm \sigma_{k^2}$	$1 - k$, %
Ошибки определения широты на плавающем зенит-телескопе Куксона, Гринвич, 1927—1931 гг. [20]	4540	2.275 0.024 0.046	2.71±0.29	2.133±0.030	0.879±0.039	12.1
Ошибки определения широты на плавающем зенит-телескопе Куксона, Гринвич, 1932—1936 гг. [20]	5014	2.610 0.027 0.070	2.26 0.18	2.316 0.033	0.787 0.054	21.3
Разности ближайших определений широты, зенит-телескоп Бамберга, Мидзусава, Япония [5]	6440	0.347 0.003 0.003	10.78 2.78	0.347 0.003	1.000 0.002	0.00
Разности ближайших определений широты, зенит-телескоп Куксона [5]	8130	0.454 0.004 0.004	7.11 0.86	0.452 0.004	0.991 0.003	0.9
Разности ближайших определений широты по фотографической зенитной трубе [5]	7159	0.338 0.003 0.004	3.82 0.25	0.330 0.003	0.953 0.008	4.7
Остаточные погрешности определения времени и широты на призменной астролябии Данжона, Полтава [8]	8823	0.431 0.003 0.004	3.92 0.24	0.422 0.004	0.959 0.007	4.1
Разности широт зенит-телескопов Цейсса и Бамберга, Полтава, 1949.9—1954.9 гг. [5]	7057	0.241 0.002 0.003	5.06 0.45	0.238 0.002	0.975 0.005	2.5
Разности широт телескопов Бамберга и Куксона, Мидзусава, Япония, 1990—1949 гг. [5]	4008	0.328 0.004 0.005	4.95 0.57	0.324 0.004	0.976 0.007	2.4
Разности широт телескопов Бамберга и Куксона, Мидзусава, Япония, 1957—1961 гг. [5]	2127	0.263 0.004 0.005	7.09 1.60	0.262 0.004	0.992 0.005	0.8
Разности O–C наблюденных и вычисленных дальностей до ИСЗ, короткая международная программа MERIT [7]	4475	0.297 0.003 0.004	4.19 0.38	0.282 0.004	0.967 0.008	3.3

Логарифмируя (17) и взяв частные производные, имеем:

$$\frac{\partial \ln\sigma_0}{\partial \sigma_{\rm VII}} = \frac{1}{\sigma_{\rm VII}}; \qquad \frac{\partial \ln\sigma_0}{\partial m} = \frac{1.5}{2m(m-0.5)(m-1.5)}. \tag{18}$$

Используя формулу для вычисления стандартной ошибки функции независимых аргументов и учитывая (18), (15) и (16), имеем

$$\sigma^2_{\sigma_0} = \frac{\sigma_0^2}{2n}\frac{m+1}{m-1.5} + \frac{\sigma_0^2}{n}\sigma^2_{\rm 1m}\frac{0.75^2}{m^2(m-0.5)^2(m-1.5)^2}. \tag{19}$$

При больших значениях m второй член формулы (19) практически исчезает. Но при малых m картина резко изменяется. Например, для строки 1 табл. 2 (для $m = 2.71$) имеем $\sigma_{\sigma_0} = 0.046$, в тоже время значение σ_{σ_0}, вычисленное по классической формуле, меньше почти в два раза:

$$\sigma_{\sigma_{\rm k}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = 0.024. \tag{20}$$

Аналогичным образом, логарифмируя формулу (10) и учитывая (3), имеем

$$\ln\sigma = \ln\sigma_{\rm VII} + 0.5 1\ln(m-0.5) + \ln\Gamma(m+0.5) - \ln\Gamma(m+1) +$$
$$+ \ln\sqrt{\pi} + m\Psi(m) - m\Psi(m-0.5) - 0.5\ln 2e. \tag{21}$$

Тогда дисперсия σ^2_σ оценки σ определится по формуле

$$\sigma^2_\sigma = \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\rm VII}}\sigma^2_{\sigma_{\rm VII}} + m^2\frac{\sigma^2}{\sigma^4_{\rm 1m}}\sigma^2_{\rm m}. \tag{22}$$

Подставляя в (22) значения границ (15) и (16), получим после элементарных преобразований

$$\sigma_\sigma = \frac{\sigma\delta}{\sqrt{n}}, \tag{23}$$

где $\delta = m[\Psi'(m-0.5) - \Psi'(m)]$.

В табл. 2 указаны объемы анализируемых рядов n, значения σ_0, $\sigma_{\sigma_{\rm k}}$, σ_{σ_0}, вычисленные на основе формул (17), (20), (19). Значения $\sigma_{\sigma_{\rm k}}$, σ_{σ_0} приведены для того, чтобы показать отличие общеупотребимого способа оценки стандартной погрешности значения σ_0 от способа вычисления стандарта оценки σ_0, примененного нами впервые и который учитывает негауссовый характер распределения.

Далее в графе 4 приведена ММП-оценка параметра m, полученная путем решения системы (14) и значения стандартной погрешности $\sigma_{\rm m}$, вычисленной по формуле (16). В графе 5 даны значениях σ и σ_σ, вычисленные на основе формул (10) и (22), а в графе 6 — значение коэффициента k^2 по формуле (13). Стандартную ошибку $\sigma_{\rm k}{}^2$, мы нашли по формуле

$$\sigma_{\rm k}{}^2\left(\frac{1}{m-1.5} - 2m\delta\right)\sigma_{\rm m}, \tag{24}$$

где $\sigma_{\rm m}$ — граница неравенства Рао-Крамера для соответствующего распределения с найденным m.

По даным табл. 2 можно сделать вывод: только в 20 % случаев средняя квадратическая погрешность как мера веса (мера дезинформирующего воздействия ошибок) не вызывает сомнений.

Видимо, астрономы не могут с неувядающим оптимизмом верить дальше в универсальную применимость СНК, для любых законов распределения погрешностей наблюдений. Кроме того, этот оптимизм существенно уменьшает постулат 1 работы [10], который исключает наличие систематических ошибок в наблюдениях. Таких наблюдений, в которых бы отсутствовали систематические ошибки, нет. Эти ошибки присутствуют и во всех анализируемых нами рядах. Именно наличие систематических ошибок в наблюдениях «размывает», как показал еще Г. Джеффрис в [20], пик распределения, уменьшая его положительный эксцесс. В результате распределение ошибок становится ближе к нормальному.

Таким образом, устоявшееся в астрометрии мнение о том, что близость распределения ошибок к закону Гаусса есть свидетельством благополучия, наиболее желаемым результатом распределения ошибок, не соответствует действительности. Все наоборот. Именно нормальность распределения ошибок при многократных измерениях должна быть поводом для серьезного беспокойства в отношении систематических ошибок. Это парадокс, к которому астрономам еще предстоит привыкнуть. Именно это обстоятельство подчеркивает П. Хьюбер. По его заключению [16], при полном отсутствии систематического влияния ряды ошибок должны следовать распределению Стьюдента в пределах t_3, или, что тоже самое, распределению Пирсона VII типа с $m = (\nu + 1)/2 = 2$, где ν — число степеней свободы t-распределения. Значение $m = 2$ уже близко к значениям $m_2 = 2.26$ и $m_1 = 2.71$, полученных Г. Джеффрисом в [20] и свидетельствуют о тщательности постановки этих рядов, свойственной, пожалуй, лишь классической английской школе широтных наблюдений в Гринвиче.

Наличие систематических ошибок в наблюдениях имеет более серьезные причины, чем принято думать. Они касаются принципиальной невозможности осуществления закона больших чисел в практике наблюдений. Этот закон, «подтверждение» которого основывалось на примитивных экспериментах типа бросания монеты, перестает действовать, если наблюдаются сложные объекты. Вот что пишет по этому поводу П. Е. Эльясберг [17]: «... опыт решения прикладных задач показывает, что в действительности свойство состоятельности никогда не осуществляется на практике и, начиная с некоторого момента, дальнейшее увеличение объема измерительной информации не приводит к повышению точности оценок». Этот фактор отмечен и другими авторами [1, 2]. Поэтому, одну из основных проблем наблюдательной астрометрии можно определить как поиск оптимума для соотношения σ/Δ, где σ — стандартная ошибка окончательного результата наблюдения, Δ — систематическая погрешность результата.

Многочисленные факты, подтверждающие доминирующую роль систематических погрешностей при проведении современных высокоточных наблюдений, приведены в обзоре [2]. Здесь же проводится пример измерения геометрических параметров Земли и Солнечной системы, взятый из [17, с. 102]: «...наилучшие оценки этих погрешностей заметно изменились после перехода к измерениям с использованием ИСЗ, и эти изменения немного превысили полученные в свое время оценки предела погрешности результатов прежних измерений».

Единственным способом в астрометрии, который дает возможность при массовой автоматизации многократных измерений, оценить влияние систематических ошибок, есть паралельные наблюдения, осуществляемые различными физическими методами. Такую идею настойчиво поддерживал член-корреспондент РАН Ю. Д. Буланже в области гравиметрических измерений. Однако, наблюдения в современной астрометрии остаются по существу однометодными и характеризуются скорее гиперболизированным развитием какого-либо одного фаворитного способа, чем нескольких параллельных, т. е. современные астрометрические проекты являются методологически отсталыми.

Заметим, что для обоснования полученных выводов мы воспользовались главным образом результатами, полученными классическими методами астрометрии. К пост-классическим табл. 2 можно отнести лишь ряд разностей *O–C*, полученных по програме MERIT.

Основной вывод следующий: процедуры СНК можно считать удовлетворительными, если $m \geq 7$ при объемах выборок по крайней мере менее 2000. При $m < 7$ марковская мера веса при $n > 2000$ уже может считаться как первое приближение перед дальнейшим применением робастных процедур.

1. *Алимов Ю. И.* Альтернатива методу математической статистики. — М.: Знание, 1980.—28 с.
2. *Алимов Ю. И., Шаевич А. Б.* Методологические особенности оценивания результатов количественного химического анализа // Журн. аналит. химии.—1989.—**63**, вып. 10.—С. 1843—1917.
3. *Гаусс К. Ф.* Избранные геодезические сочинения. — М.: Геодезиздат, 1957.—Т. 1: Способ наименших квадратов / Под. ред. Г. В. Багратуни.—1957.—234 с.
4. *Джунь Н. В.* Распределение Пирсона VII типа в ошибках наблюдений над колебаниями широт // Астрометрия и астрофизика.—1969.—№ 2.—С. 101—115.
5. *Джунь И. В.* Анализ параллельных широтных наблюдений, выполненных по общей программе: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1974.—19 с.
6. *Джунь И. В.* О границах неравенства Рао—Крамера для дисперсий оценок распределения Пирсона VII типа // Кинематика и физика небес. тел.—1988.—**4**, № 1.—С. 85—87.
7. *Джунь И. В.* Распределение Пирсона VII типа ошибок лазерных наблюдений ИСЗ // Кинематика и физика небес. тел.—1991.—**7**, № 3.—С. 82—91.
8. *Джунь И. В.* Математическая обработка астрономической и космической информации при негауссовых ошибках наблюдений: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1992.—46 с.
9. *Джунь И. В., Славинская А. А.* Обработка наблюдений на астролябии Данжона с учетом эксцесса закона ошибок остаточных погрешностей // Тр. II Орлов. конф. — Киев: Наук. думка, 1988.—С. 231—222.
10. *Марков А. А.* Закон больших чисел и способ наименьших квадратов // Изв. физ.-мат. об-ва при Казанском ун-те. Сер 2.—1899.—Т. 7.—С. 18—25.
11. *Новицкий П. В.* Основы информационной теории измерительных устройств. — Л.: энергия, 1968.—248 с.
12. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев Ф. И.* Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981.—800 с.
13. *Робастность* в статистике. Подход на основе функций влияния: [Пер. с англ.] / Ф. Хампель, Э. Рончетти, П. Рауссеу, В. М. Штаэль. — М.: Мир, 1989.—512 с.
14. *Справочник* по специальным функциям / Под. ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979.—832 с.
15. *Харин А. С., Яцкив Я. С.* Изучение ошибок наблюдения Голосеевского каталога звезд широтных программ // Астрометрия и астрофизика.—1970.—Вып. 10.—С. 34—43.
16. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. — М.: Мир, 1984.—304 с.
17. *Эльясберг П. Е.* Измерительная информация: сколько ее нужно. Как обрабатывать. — М.: Наука, 1983.—203 с.
18. *Eddington A. S.* Notes on the method of least-squares // Proc. of the Phys. Soc.—1933.—**45**, N 247.
19. *Fisher R. A.* On an absolute criterion for fitting frequensy curves // Mess. of Math.—1912.—**41**, N 155.
20. *Jeffereys H.* The law of error in the Greenvich variation of latitude observation // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.—1939.—**99**, N 9.—P. 703—709.
21. *Jeffereys H.* Theory of probability.—3-d ed. — Oxford: Clarerndon press, 1961.—468 p.
22. *Newcomb S.* A Generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best result // Amer. J. Math.—1886.—**8**.—P. 345—366.
23. *Pearson K.* On the mathematical theory of errors of judgment, with spesial reference to the Personal equation // Phil. Trans. Roy. Soc. London A.—1902.—**198**.—P. 235—290.
24. *Tukey J. W.* Data analysis and the frontiers of geophysics // Science.—1965.—**148**, N 3675.—P. 1283—1289.

Поступила в редакцию 20.01.99