

УДК 521.9+520.875

С. Л. Болотин

Главная астрономическая обсерватория НАН Украины
03680 ГСП, Киев, ул. Академика Заболотного, 27

Анализ наблюдений радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами. Оценивание параметров

Описаны методы оценивания параметров и использование квадратнокорневого информационного фильтра. Описаны алгоритмы оценивания параметров, состоящих из наборов глобальных, локальных и стохастических параметров, которые реализованы в программном обеспечении анализа геодинимических РСДБ-наблюдений «SteelBreeze». Приведены оценки зенитной задержки в тропосфере и стандарты частоты с использованием стохастических параметров.

АНАЛІЗ СПОСТЕРЕЖЕНЬ РАДІОІНТЕРФЕРОМЕТРІЇ З НАДДОВГМИ БАЗАМИ. ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ, Болотин С. Л. — Описано методи оцінювання параметрів і використання квадратнокореневого інформаційного фільтра. Надані алгоритми оцінювання параметрів, що складаються з наборів глобальних, локальних і стохастичних параметрів, які реалізовані в програмному забезпеченні аналізу геодинимічних РСДБ-спостережень «SteelBreeze». Приведено оцінки зенітної затримки в тропосфері та стандартів частоти з використанням стохастичних параметрів.

ANALYSIS OF VLBI OBSERVATIONS. ESTIMATION OF PARAMETERS, by Bolotin S. L. — An estimation technique and an application of the Square Root Information Filter are discussed. The estimation algorithms for a complex set of parameters which are implemented in the VLBI data processing software «SteelBreeze» have been described. The results of stochastic estimation of the clock offset and the wet zenith delay for one of the stations are presented as an illustration of the algorithms.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В ГЕОДИНАМИКЕ

Оценивание геодинимических параметров из РСДБ-наблюдений методом наименьших квадратов состоит в следующем. Из теоретической модели временной задержки определяют ее предвычисленное значение τ^c . Сравнивая его с наблюдаемой величиной τ^o , можно получить поправки к различ-

ным параметрам, которые использовались при моделировании τ^c . Обозначим набор этих параметров вектором ψ , тогда предвычисленное значение τ^c можно представить функцией вектора ψ и времени t :

$$\tau^c = \tau(\psi, t),$$

а разности наблюдаемых и предвычисленных значений временной задержки $\Delta\tau = \tau^o - \tau^c$ будут функциями времени и неизвестного вектора поправок $d\psi$ к вектору ψ :

$$\Delta\tau = \Delta\tau(d\psi, t).$$

Следовательно, наблюдаемую временную задержку τ^o можно представить в виде уравнения

$$\tau^o = \tau(\psi + d\psi, t),$$

линеаризуя которое, получаем

$$\tau^o - \tau^c = \frac{\partial\tau^c}{\partial\psi}d\psi + o(d^2\psi). \quad (1)$$

Обозначая в (1) разности $\tau^o - \tau^c$ через z , получаем уравнение поправок (условное уравнение):

$$z = \frac{\partial\tau^c}{\partial\psi}d\psi + v. \quad (2)$$

В этом уравнении неизвестными величинами являются вектор поправок параметров $d\psi$ и поправка уравнения v . Производные $\partial\tau^c/\partial\psi$ вычисляются аналитически либо численно. Записывая уравнение (2) для ряда РСДБ-наблюдений, получаем систему условных уравнений

$$z = A \cdot x + v, \quad (3)$$

где векторы

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} d\psi_1 \\ d\psi_2 \\ \dots \\ d\psi_k \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$$

и матрица

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tau_1^c}{\partial\psi_1} & \frac{\partial\tau_1^c}{\partial\psi_2} & \dots & \frac{\partial\tau_1^c}{\partial\psi_k} \\ \frac{\partial\tau_2^c}{\partial\psi_1} & \frac{\partial\tau_2^c}{\partial\psi_2} & \dots & \frac{\partial\tau_2^c}{\partial\psi_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\tau_n^c}{\partial\psi_1} & \frac{\partial\tau_n^c}{\partial\psi_2} & \dots & \frac{\partial\tau_n^c}{\partial\psi_k} \end{pmatrix}$$

представляют собой вектор свободных членов, вектор уточняемых параметров, вектор невязок и матрицу условных уравнений соответственно. Здесь n — число наблюдений, k — число уточняемых параметров.

Уравнение (3) является основным уравнением при оценивании геодинимических параметров из РСДБ-наблюдений. Обычно его решают минимизируя квадрат вектора невязок с заданной матрицей весов условных уравнений P :

$$J = v^T P v,$$

отсюда и название метода. Легко показать, что минимум функционала J наступает при

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{z}}, \quad (4)$$

где матрица $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ — матрица коэффициентов нормальных уравнений и $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{z}$ — вектор правых частей нормальных уравнений. Наиболее эффективным способом решения системы (4) является приведение матрицы \mathbf{N} к верхнетреугольному виду (т. е. $\mathbf{N}_{i,j} = 0$ для $i > j$) с использованием ортонормированного преобразования Хаусхолдера [3]. Это преобразование не изменяет нормы векторов и детерминанты матриц в силу своей ортонормированности, и его программная реализация достаточно проста, нечувствительна к ошибкам машинного округления и экономна [1].

РЕКУРСИВНАЯ ОБРАБОТКА НАБЛЮДЕНИЙ

Информационную матрицу (которая по определению равна обратной матрице ковариации) можно представить в виде $\Lambda = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$, где \mathbf{R} — верхнетреугольная квадратная матрица. Предположим теперь, что имеется априорная информация об оцениваемых параметрах, т. е. «информационный массив» $[\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{z}}]$. Априорная матрица ковариации $\tilde{\mathbf{P}}$ и оценка $\tilde{\mathbf{x}}$ выражены через $\tilde{\mathbf{R}}$ и $\tilde{\mathbf{z}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{z}}, \\ \tilde{\mathbf{P}} &= \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^{-T} \end{aligned}$$

(символ « $-T$ » означает произведение операций транспонирования и обращения матрицы. Так как эти операции коммутативны, то их порядок не играет роли). Априорный информационный массив соответствует уравнению априорных данных

$$\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{v}}, \quad (5)$$

где $\tilde{\mathbf{v}}$ имеет нулевое среднее и единичную матрицу ковариации. Используем уравнение данных новых измерений в форме (3). Тогда нахождение минимума функционала J

$$J = \left| \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \right|^2 \quad (6)$$

может быть выполнено при помощи приведения матриц к треугольному виду с использованием преобразования Хаусхолдера. Действительно, пусть T — ортонормированное преобразование такое, что

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

где $\hat{\mathbf{R}}$ — верхнетреугольная матрица; результат действия T на второе слагаемое обозначим

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}.$$

Тогда (6) можно записать в виде

$$J = \left| \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \right|^2 = |\hat{\mathbf{R}}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{z}}|^2 + |\mathbf{e}|^2.$$

Очевидно, что минимум J наступает при $\hat{\mathbf{R}}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{z}}$, и его значение равно $|\mathbf{e}|^2$. Таким образом, мы получили оценки $\hat{\mathbf{x}}$ и ковариации \mathbf{P}

$$\hat{x} = \hat{R}^{-1} \cdot \hat{z}, \quad \hat{P} = \hat{R}^{-1} \cdot \hat{R}^{-T},$$

которые минимизируют длину вектора невязок и включают в себя априорную информацию об оцениваемых параметрах.

Несмотря на громоздкость изложения, практическая реализация гораздо проще. Формируется т. н. «приращенный массив»

$$\begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{z} \\ A & z \end{bmatrix},$$

на который и действует преобразование T :

$$T \begin{bmatrix} \tilde{R} & \tilde{z} \\ A & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R} & \hat{z} \\ 0 & e \end{bmatrix}, \quad (7)$$

при этом входные данные $[\tilde{R}\tilde{z}]$ и выходные данные $[\hat{R}\hat{z}]$, как правило, занимают одни и те же места памяти компьютера, а для выполнения преобразования (7) требуется всего лишь один дополнительный вектор, длина которого равна числу строк преобразуемой матрицы. Операция (7) называется обновлением данных (data update) и состоит в переносе информации о параметрах, содержащихся в уравнении данных обрабатываемых наблюдений (3) в уравнение априорных данных, которое после этой трансформации будет иметь вид

$$\hat{z} = \hat{R}x + \hat{v},$$

аналогичный (5).

Использование априорных данных и сохранение формы их уравнений до и после вовлечения обрабатываемой информации позволяет легко сформулировать рекурсивную обработку данных. Для этого достаточно, чтобы адостериорный информационный массив предыдущего шага обработки $[\hat{R}\hat{z}]$ использовался как априорный $[\tilde{R}\tilde{z}]$ для следующего. Обычно необходимость в рекурсивной обработке возникает тогда, когда из-за большого количества уравнений невозможно обработать их за один раз. В работе [1] было показано, что решение, полученное рекурсивно, эквивалентно решению, полученному за один проход.

КВАДРАТНОКОРНЕВОЙ ИНФОРМАЦИОННЫЙ ФИЛЬТР

До сих пор мы рассматривали параметры, которые не изменяются со временем. Предположим теперь, что параметры на моменты времени t_j и t_{j+1} связаны соотношением

$$x_{j+1} = M x_j + w_j, \quad (8)$$

где $E(w_j) = \bar{w}_j$, $E[(w_j - \bar{w}_j) \cdot (w_k - \bar{w}_k)^T] = Q \cdot \delta_{jk}$, $Q = R_w^{-1} R_w^{-T}$, и матрица R_w — верхнетреугольная. Пусть на момент t_j заданы априорные уравнения данных в виде

$$\begin{aligned} R_w w_j &= z_w - v_w, \\ \tilde{R}_j x_j &= \tilde{z}_j - \tilde{v}_j \end{aligned}$$

и уравнение данных

$$z_j = A_j x_j + v.$$

Минимизируя функционал, аналогичный (6), мы получим оценки и ковариации параметров на момент t_j , априорный информационный массив $[\tilde{R}_{j+1} \tilde{z}_{j+1}]$ на момент t_{j+1} (который будет учитывать информацию уравнения масштабирования (8)) и связь между оценками на моменты времени t_j

и t_{j+1} , необходимую для сглаживания. Представим функционал J в виде

$$\begin{aligned} J &= \left| \begin{bmatrix} \tilde{\nu}_j \\ \nu_w \\ \nu \end{bmatrix} \right|^T \begin{bmatrix} \tilde{\nu}_j \\ \nu_w \\ \nu \end{bmatrix} = \\ &= |\tilde{\mathbf{R}}_j \mathbf{x}_j - \tilde{\mathbf{z}}_j|^2 + |\mathbf{A}_j \mathbf{x}_j - \mathbf{z}_j|^2 + |\mathbf{R}_w \mathbf{w}_j - \mathbf{z}_w|^2 = \\ &= \left| \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_j \\ \mathbf{A}_j \end{bmatrix} \mathbf{x}_j - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_j \\ \mathbf{z}_j \end{bmatrix} \right|^2 + |\mathbf{R}_w \mathbf{w}_j - \mathbf{z}_w|^2. \end{aligned}$$

Первое слагаемое идентично уравнению (6). Выполнив над ним преобразование (7), получим

$$J = |\mathbf{e}_j|^2 + |\hat{\mathbf{R}}_j \mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{z}}_j|^2 + |\mathbf{R}_w \mathbf{w}_j - \mathbf{z}_w|^2. \quad (9)$$

Теперь из уравнения масштабирования (8) выразим \mathbf{w}_j :

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{M} \mathbf{x}_j$$

и подставим его в (9):

$$\begin{aligned} J &= |\mathbf{e}_j|^2 + |\hat{\mathbf{R}}_j \mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{z}}_j|^2 + |\mathbf{R}_w \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{R}_w \mathbf{M} \mathbf{x}_j - \mathbf{z}_w|^2 = \\ &= |\mathbf{e}_j|^2 + \left| \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_w \mathbf{M} & \mathbf{R}_w \\ \hat{\mathbf{R}}_j & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{x}_{j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{z}_w \\ \hat{\mathbf{z}}_j \end{bmatrix} \right|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Применим треуголизацию второго слагаемого в этом уравнении:

$$\begin{aligned} &\left| \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_w \mathbf{M} & \mathbf{R}_w \\ \hat{\mathbf{R}}_j & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{x}_{j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{z}_w \\ \hat{\mathbf{z}}_j \end{bmatrix} \right|^2 = \\ &= \left| \tilde{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_w \mathbf{M} & \mathbf{R}_w \\ \hat{\mathbf{R}}_j & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{x}_{j+1} \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_w \\ \hat{\mathbf{z}}_j \end{bmatrix} \right|^2 = \\ &= \left| \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x^* & \mathbf{R}_{xx}^* \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{R}}_{j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{x}_{j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{z}_x^* \\ \tilde{\mathbf{z}}_{j+1} \end{bmatrix} \right|^2. \end{aligned}$$

Тогда функционал J можно записать в виде

$$J = |\mathbf{e}_j|^2 + |\tilde{\mathbf{R}}_{j+1} \mathbf{x}_{j+1} - \tilde{\mathbf{z}}_{j+1}|^2 + |\mathbf{R}_j^* \mathbf{x}_j + \mathbf{R}_{xx}^* \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{z}_j^*|^2.$$

Очевидно, что его минимум наступает при выполнении условий

$$\tilde{\mathbf{R}}_{j+1} \mathbf{x}_{j+1} = \tilde{\mathbf{z}}_{j+1}, \quad (11)$$

$$\mathbf{R}_j^* \mathbf{x}_j + \mathbf{R}_{xx}^* \mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{z}_j^*. \quad (12)$$

Уравнение (11) представляет собой уравнение данных для априорного информационного массива на момент времени t_{j+1} , а уравнение (12) связывает оценки \mathbf{x}_j и \mathbf{x}_{j+1} и необходимо для сглаживания.

В этом случае формируются два «приращенных массива» и выполняются два преобразования. Первое — аналогичное (7) «обновление данных»:

$$\hat{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_j & \hat{\mathbf{z}}_j \\ \mathbf{A}_j & \mathbf{z}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_j & \hat{\mathbf{z}}_j \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_j \end{bmatrix}.$$

Второе называют «распространением во времени» (time propagation):

$$\tilde{T} \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_w \mathbf{M} & \mathbf{R}_w & \mathbf{z}_w \\ \hat{\mathbf{R}}_j & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{z}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x^* & \mathbf{R}_{xx}^* & \mathbf{z}_x^* \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{R}}_{j+1} & \tilde{\mathbf{z}}_{j+1} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Оно вносит в рабочий информационный массив $[\mathbf{Rz}]$ данные о поведении оцениваемых параметров со временем. Необходимо отметить, что (13) — не единственная возможная реализация time propagation, однако в этом случае не представляется сложным описание параметров белым шумом (нет необходимости вычислять \mathbf{M}^{-1}), и для вычисления сглаженных оценок не нужно выполнять преобразования треуголизации матриц.

СОВМЕСТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Выше мы рассмотрели две основные операции, которые применяются в квадратнокорневом информационном фильтре, на примере простых моделей: в первом случае это были параметры, которые считались постоянными на всем обрабатываемом интервале, а во втором — параметры, значения которых изменялись с каждым наблюдением по заданному закону. При обработке РСДБ-наблюдений используются сложные модели оцениваемых параметров. Например, координаты станций и радиостанций обычно оценивают для всего обрабатываемого интервала наблюдений как постоянные, параметры вращения Земли — для каждого сеанса, причем считается, что оценки и ковариации на соседних сеансах наблюдений независимы, а параметры часов и зенитную задержку предпочтительнее (по крайней мере после первой итерации) оценивать как стохастические параметры на каждый момент наблюдений. Ниже мы схематически опишем алгоритмы оценивания, которые реализованы в программном обеспечении анализа РСДБ-наблюдений.

Вектор параметров представлен в виде

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{p} — стохастические параметры, \mathbf{x} — локальные для каждого сеанса наблюдений, \mathbf{y} — глобальные параметры. Тогда элементы информационного массива $[\mathbf{Rz}]$ будут иметь вид

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p & \mathbf{R}_{px} & \mathbf{R}_{py} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_x & \mathbf{R}_{xy} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_p \\ \mathbf{z}_x \\ \mathbf{z}_y \end{bmatrix};$$

уравнение априорных данных, аналогичное (5), будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_p & \tilde{\mathbf{R}}_{px} & \tilde{\mathbf{R}}_{py} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{R}}_x & \tilde{\mathbf{R}}_{xy} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{R}}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_p \\ \mathbf{z}_x \\ \mathbf{z}_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu_p \\ \nu_x \\ \nu_y \end{bmatrix},$$

и уравнение данных новых наблюдений

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}_p \mathbf{p} + \mathbf{A}_x \mathbf{x} + \mathbf{A}_y \mathbf{y} + \nu.$$

Уравнение масштабирования и уравнение данных для шума стохастических параметров практически не изменяют свой вид:

$$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{M} \mathbf{p}_j + \mathbf{w}_j, \quad \mathbf{R}_w \mathbf{w}_j = \mathbf{z}_w - \nu_w.$$

Процедура обновления информационного массива данными наблюдений имеет вид

$$\hat{T} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_p & \tilde{\mathbf{R}}_{px} & \tilde{\mathbf{R}}_{py} & z_p \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{R}}_x & \tilde{\mathbf{R}}_{xy} & z_x \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{R}}_y & z_y \\ \mathbf{A}_p & \mathbf{A}_x & \mathbf{A}_y & \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_p & \hat{\mathbf{R}}_{px} & \hat{\mathbf{R}}_{py} & z_p \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{R}}_x & \hat{\mathbf{R}}_{xy} & z_x \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{R}}_y & z_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_j \end{bmatrix}, \quad (14)$$

а распространение во времени —

$$\tilde{T} \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_w \mathbf{M} & \mathbf{R}_w & \mathbf{0} & \mathbf{0} & z_w \\ \hat{\mathbf{R}}_j & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{R}}_{px} & \hat{\mathbf{R}}_{py} & \hat{z}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p^* & \mathbf{R}_{pp}^* & \mathbf{R}_{px}^* & \mathbf{R}_{py}^* & z_p^* \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{R}}_p & \tilde{\mathbf{R}}_{px} & \tilde{\mathbf{R}}_{py} & \tilde{z}_p \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Оценки параметров можно получить из выражений

$$\begin{aligned} y &= \hat{\mathbf{R}}_y^{-1} \hat{z}_y, \\ x &= \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \hat{z}_x - \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{xy} y, \\ p &= \hat{\mathbf{R}}_p^{-1} \hat{z}_p - \hat{\mathbf{R}}_p^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{px} x - \hat{\mathbf{R}}_p^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{py} y. \end{aligned}$$

Уравнения (14) и (15) являются основными при обработке РСДБ-наблюдений.

МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

До сих пор мы не конкретизировали характер параметров, входящих в уравнение (8). Наиболее простыми и часто применяемыми при моделировании изменяющихся со временем параметров являются стохастические процессы Гаусса — Маркова. Эти процессы описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} p(t) + \omega(t), \quad (16)$$

где τ — константа, характеризующая процесс, а ω — белый шум с нулевым средним $E[\omega(t)] = 0$ и ковариацией $E[\omega(t)\omega(\tau)] = q_{\text{con}}\delta(t - \tau)$ (здесь q_{con} — мощность спектральной плотности задающего белого шума). Переходя от непрерывных величин к дискретным, уравнение (16) можно записать как

$$p(t_{i+1}) = \exp\left(-\frac{t_{i+1} - t_i}{\tau}\right) p(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp\left(-\frac{t_{i+1} - \xi}{\tau}\right) \omega(\xi) d\xi,$$

или, вводя обозначения

$$p_i = p(t_i),$$

$$m_i = \exp\left(-\frac{t_{i+1} - t_i}{\tau}\right), \quad (17)$$

$$w_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp\left(-\frac{t_{i+1} - \xi}{\tau}\right) \omega(\xi) d\xi, \quad (18)$$

привести к форме уравнения масштабирования (8):

$$p_{i+1} = m_i p_i + w_i.$$

Это позволяет определить коэффициенты матриц \mathbf{M} и \mathbf{R}_w , входящих в уравнение «распространение во времени». Предположим, что стохастические процессы, описываемые уравнением масштабирования (8) не зависят друг от друга. Тогда матрицы \mathbf{M} и \mathbf{R}_w будут диагональными. Для \mathbf{M} (k, k)-й элемент на момент t_i вычисляется согласно (17):

$$m(k, k)_i = \exp\left(-\frac{t_{i+1} - t_i}{\tau_k}\right).$$

А для (k, k)-го элемента матрицы \mathbf{R}_w на момент t_i (учитывая уравнение (18), определение матрицы \mathbf{R}_w и условие нормирования белого шума $\omega(t)$, входящего в (16)) получаем:

$$r(k, k)_i = \left\{ \frac{\tau_k}{2} [1 - m(k, k)_i^2] q_{\text{con}i} \right\}^{-1/2}.$$

Постоянная τ , которая входит в уравнение (16), имеет два предельных значения: $\tau = 0$ и $\tau = \infty$. Первый случай соответствует белому шуму, а второй — случайному блужданию. Оценивание параметров, изменяющих свое значение со временем, происходит в основном с использованием модели случайного блуждания. При этом элементы матриц \mathbf{M} и \mathbf{R}_w зависят только от мощности спектральной плотности задающего белого шума q_{con} :

$$m(k, k)_i = 1,$$

$$r(k, k)_i = \frac{1}{\sqrt{(t_{i+1} - t_i) q_{\text{con}i}}}.$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ОБРАБОТКЕ РСДБ-НАБЛЮДЕНИЙ

Поведение стандарта частоты станции РСДБ-наблюдений и тропосферной задержки в зените — наиболее трудно моделируемые явления при обработке наблюдений. В настоящее время большинством центров анализа используется достаточно простой и экономичный подход: весь интервал наблюдений разбивается на сегменты (обычно от 0.5 до 2 ч), и на каждом из сегментов находят несмещенные оценки этих параметров. В разработанном в ГАО НАНУ программном обеспечении обработки РСДБ-наблюдений «SteelBreeze» используется другой подход, основанный на стохастическом моделировании оцениваемых параметров. При этом возможен выбор следующих моделей стохастических процессов: процессы Гаусса — Маркова, белый шум и случайное блуждание. В работе [4] было показано, что ход стандарта частоты и вариации тропосферной задержки в зените могут быть

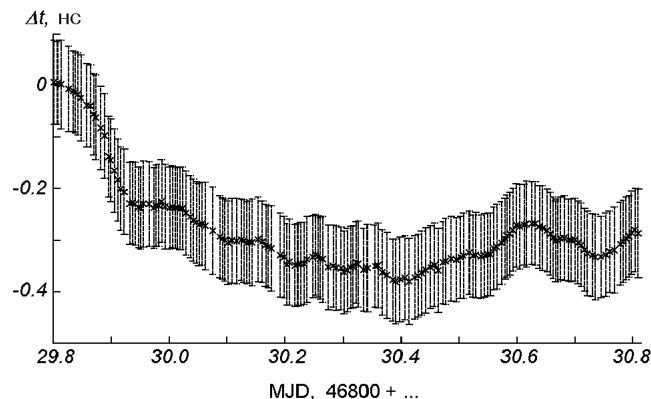


Рис. 1. Вариации Δt стандарта частоты на станции Onsala во время сеанса 87FЕV03ХА РСДБ-наблюдений

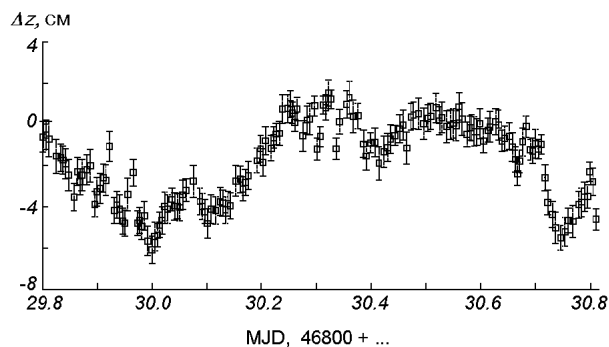


Рис. 2. Оценки тропосферной задержки Δz в зените для влажной компоненты станции Onsala во время сеанса 87FEB03XA РСДБ-наблюдений

описаны при помощи модели случайного блуждания. Мы использовали эту модель для их оценки. Мощность q_{con} спектральной плотности задающего белого шума определялась следующим образом: для хода часов $q_{\text{con}} = 400.0 \text{ пс}^2/\text{ч}$ и для задержки в зените $q_{\text{con}} = 1.0 \text{ см}^2/\text{ч}$. На рис. 1 показаны вариации стандарта частоты на станции Onsala во время сеанса РСДБ-наблюдений 3 февраля 1987 г. Полученные оценки тропосферной задержки в зените влажного компонента для этого же сеанса показаны на рис. 2. Оценивание изменяющихся со временем параметров с использованием стохастических моделей может применяться и для исследований высокочастотных вариаций координат полюса Земли [2].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные выше алгоритмы реализованы в программном обеспечении обработки РСДБ-наблюдений «SteelBreeze» и используются при анализе данных. Они отличаются от классических методов тем, что позволяют комбинировать различные типы параметров (несмещенные оценки, оценки параметров, которые изменяют свои значения от наблюдения к наблюдению) в одном решении. В отличие от фильтра Калмана, квадратнокорневой информационный фильтр прост в реализации, не требователен к ресурсам компьютера, что делает его перспективным для решений задач геодинамики, где приходится обрабатывать миллионы наблюдений и оценивать тысячи параметров.

1. Biermann G. J. Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation. — New York: Academic Press, 1977.—241 p.
2. Bolotin S. High frequency variations of EOP from extensive VLBI operations in January 1994 // Proc. of the 2nd JIVE/EVN Symp. — Torun, 1995.—P. 13—18.
3. Businger P., Golub G. H. Linear least squares solutions by Householder transformations // Num. Math.—1965.—7.—P. 269—276.
4. Herring T., Davis J., Shapiro I. Geodesy by radio interferometry: The application of Kalman filtering to the analysis of Very Long Baseline Interferometry Data // J. Geophys. Res.—B95, N 8.—P. 12561—12581.

Поступила в редакцию 18.07.01