

УДК 523.9-72

**Ю. И. Федоров, Б. А. Шахов**

Главная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины  
ул. Академика Заболотного 27, Киев, 03143  
fedorov@mao.kiev.ua

### **Описание распространения солнечных космических лучей в межпланетной среде на основе кинетического уравнения**

*Распространение солнечных космических лучей в межпланетном пространстве рассмотрено на основе кинетического уравнения. Получено выражение для концентрации космических лучей при мгновенной инжекции частиц точечным источником. На основе кинетического уравнения получена система дифференциальных уравнений для гармоник функции распределения космических лучей. Выведено уравнение переноса космических лучей, учитывающее наличие второй гармоники углового распределения частиц. Получено решение этого уравнения.*

**Ключевые слова:** космические лучи, кинетическое уравнение, диффузия.

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Ускорение заряженных частиц до высоких энергий в солнечной короне и распространение солнечных космических лучей (СКЛ) во внутренней гелиосфере являются фундаментальными проблемами астрофизики и космической физики. СКЛ содержат важную информацию о свойствах космической плазмы и электромагнитных условиях вблизи Солнца и в межпланетном пространстве [9, 11, 26, 27].

Солнечные космические лучи являются составляющей космической погоды, так как представляют опасность для электроники и экипажей космических кораблей, для систем связи и навигации, могут оказывать влияние на полярную атмосферу Земли [22, 27, 30].

Рассеяние заряженных частиц в случайных магнитных полях является основным механизмом, который контролирует распространение космических лучей (КЛ) в Галактике, солнечную модуляцию га-

лактических космических лучей, перенос СКЛ в межпланетной среде. Распространение в межпланетной среде заряженных частиц высокой энергии, ускоренных во время солнечных вспышек, существенным образом зависит от уровня турбулентности межпланетного магнитного поля. Если рассеяние КЛ на магнитных неоднородностях достаточно эффективно, так что транспортный пробег КЛ оказывается малым по сравнению с расстоянием до источника частиц, то можно использовать уравнение диффузии для описания распространения СКЛ [5, 26].

Диффузионное приближение справедливо, когда пространственные и временные масштабы изменения функции распределения КЛ значительно превышают транспортный пробег частицы и характерное время рассеяния соответственно [12, 24, 31]. В противоположном случае слабого рассеяния частиц на магнитных неоднородностях, когда транспортный пробег КЛ сравним с расстоянием до источника частиц, диффузионное описание процесса распространения СКЛ становится некорректным и необходимо пользоваться кинетическим уравнением.

В ряде работ распространение КЛ в межпланетной среде рассматривалось на основании кинетического уравнения Больцмана [17—19, 24, 31, 31]. Рассеяние КЛ на неоднородностях магнитного поля в данном случае представлено интегралом столкновений, соответствующим рассеянию частиц на произвольные (в том числе значительные) углы. Кинетическое уравнение Фоккера — Планка соответствует многократному рассеянию частиц на малые углы, а соответствующий интеграл столкновений описывает диффузию КЛ в импульсном пространстве. Перенос КЛ в межпланетной среде исследован на основании кинетического уравнения Фоккера — Планка в работах [2, 10, 23, 28, 29]. Мелкомасштабные флуктуации межпланетного магнитного поля обуславливают рассеяние КЛ на малые углы, а магнитные структуры солнечного ветра могут вызывать рассеяние частиц на значительные углы. Таким образом, перенос заряженных частиц высокой энергии в солнечном ветре, по-видимому, является комбинацией малоуглового рассеяния частиц и рассеяния КЛ на значительные углы [23, 32].

В настоящей работе получено аналитическое решение кинетического уравнения Больцмана, соответствующее мгновенной инжекции частиц точечным источником. Получена система дифференциальных уравнений для сферических гармоник функции распределения КЛ. На основе данной системы уравнений проведен вывод уравнения диффузии, телеграфного уравнения и уравнения переноса КЛ, учитывающего наличие второй гармоники углового распределения частиц, и приведено решение этих уравнений.

## КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Будем исходить из кинетического уравнения, описывающего распространение заряженных частиц высокой энергии в межпланетных магнитных полях [5, 10, 15]:

$$\frac{f}{t} - \frac{f}{r} - \frac{(1 - \mu^2)}{r} \frac{f}{r} - f \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} f = \frac{f(r, t)}{16 r^2}, \quad (1)$$

где  $f(r, \mu, t)$  — функция распределения КЛ,  $\mu$  — косинус угла между вектором скорости частицы и радиальным направлением,  $r$  — транспортный пробег КЛ. Два последних слагаемых в левой части кинетического уравнения (1) описывают процесс рассеяния частиц на неоднородностях магнитного поля. Предполагаем, что функция распределения КЛ зависит от единственной пространственной координаты  $r$ . В правую часть кинетического уравнения входит мгновенный, точечный источник частиц, расположенный в начале координат.

Введем безразмерные переменные

$$\frac{r}{r_0}, \quad \frac{t}{t_0}. \quad (2)$$

Таким образом, расстояние будет измеряться в длинах пробега КЛ, а время — в характерных временах рассеяния  $t_0$ . В безразмерных переменных кинетическое уравнение (1) приобретает следующий вид:

$$\frac{f}{t_0} - \frac{f}{r_0} - \frac{1 - \mu^2}{r_0} \frac{f}{r_0} - f \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} f = \frac{f(r, t)}{16 r_0^2}. \quad (3)$$

Введем новую функцию  $\tilde{f}$ , пропорциональную функции распределения КЛ:

$$\tilde{f}(r, \mu) = f(r, \mu) \exp(-\mu). \quad (4)$$

Выполним преобразование Фурье по пространственной координате и преобразование Лапласа по времени:

$$f(k, \omega) = \int_0^\infty dt \int_{-1}^1 d\mu \tilde{f}(r, \mu) \exp(i\vec{k}\vec{r} - \omega t). \quad (5)$$

Исходя из кинетического уравнения (3), получим следующее выражение для образа Фурье — Лапласа функции распределения КЛ

$$f(k, \omega) = \frac{1}{ik\vec{g}} - \frac{1}{4} \frac{1}{\omega^3} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} f(k, \omega), \quad (6)$$

где  $\vec{g} = \vec{v}/v$  — единичный вектор в направлении движения частицы.

Функция распределения космических лучей  $f(r, \mu)$ , удовлетворяющая кинетическому уравнению (3), может быть представлена в виде суперпозиции функции  $f_0$  распределения частиц, не испытавших рассеяния, и функции  $f_s$  распределения рассеянных частиц [16, 18, 24, 31]:

$$f(r, \mu) = f_0(r, \mu) + f_s(r, \mu). \quad (7)$$

Образ Фурье — Лапласа функции распределения нерассеянных частиц имеет вид

$$f(k, \omega) = \frac{1}{4} \frac{1}{\omega^3 (ik\vec{g})}. \quad (8)$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим

$$f_0(k, t) = \frac{\exp(-ik\vec{g}t)}{4^3}. \quad (9)$$

Концентрация частиц определяется соотношением

$$N(k, t) = 2 \int_0^t f_0(k, t-t') dt'. \quad (10)$$

Проинтегрировав соотношение (9) по  $t'$ , получим выражение для образа Фурье концентрации нерассеянных частиц:

$$N_0(k, t) = \frac{\sin kt}{3k}. \quad (11)$$

Выполняя обратное преобразование Фурье (с учетом соотношения (4)), получим следующее выражение для концентрации нерассеянных частиц [6, 15]:

$$N_0(r, t) = \frac{\exp(-\frac{r}{a})}{4^3} \left( \frac{r}{a} \right). \quad (12)$$

Соотношение (12) описывает концентрацию нерассеянных частиц после их мгновенной инжекции точечным источником, расположенным в начале координат. Согласно формуле (12) нерассеянные частицы в момент времени  $t$  находятся на сфере радиуса  $r = at$ , а их число экспоненциально уменьшается со временем.

Проинтегрировав соотношение (6) по величине  $k$  и подставив полученное выражение в формулу (6), получим выражение для образа функции распределения рассеянных частиц:

$$f_s(k, t) = \frac{1}{4^3} \frac{\arctg(k/a)}{ik\vec{g}k \arctg(k/a)}. \quad (13)$$

При интегрировании по  $k$  было использовано соотношение

$$\int_0^\infty \frac{d}{dk} \frac{2}{k} \arctg \frac{k}{a} dk = 1. \quad (14)$$

Проинтегрировав соотношение (13) по величине  $k$ , получим следующее выражение для образа Фурье — Лапласа концентрации рассеянных частиц:

$$N_s(k, t) = \frac{1}{3k} \frac{\arctg^2(k/a)}{k \arctg(k/a)}. \quad (15)$$

### КОНЦЕНТРАЦИЯ ОДНОКРАТНО РАССЕЯННЫХ ЧАСТИЦ

Функция распределения рассеянных частиц может быть представлена в виде суммы функций распределения частиц, испытавших различную кратность рассеяний [18, 31]. Запишем выражение для образа

Фурье — Лапласа концентрации рассеянных частиц (15) в виде ряда:

$$N_s(k, \theta) = \sum_{i=1} N_i(k, \theta), \quad (16)$$

где

$$N_i(k, \theta) = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{arctg}(k/\theta)^{i+1}}{k}. \quad (17)$$

Проинтегрировав соотношение для образа концентрации нерассеянных частиц (8) по  $\theta$ , получим

$$N_0(k, \theta) = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{arctg}(k/\theta)}{k}. \quad (18)$$

Таким образом, образ концентрации всех частиц можно представить в виде ряда, аналогичного (16), при условии, что суммирование будет начинаться со значения  $i = 0$ .

Представим образ Фурье — Лапласа концентрации рассеянных частиц (15) в виде

$$N_s(k, \theta) = N_1(k, \theta) + \frac{1}{3k^2} \frac{\operatorname{arctg}^3(k/\theta)}{\operatorname{arctg}(k/\theta)}, \quad (19)$$

где

$$N_1(k, \theta) = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{arctg}^2(k/\theta)}{k^2} \quad (20)$$

— образ концентрации однократно рассеянных частиц. Второе слагаемое в формуле (19) представляет собой образ Фурье — Лапласа концентрации частиц, рассеянных более одного раза.

Функция комплексного переменного

$$\operatorname{arctg} \frac{k}{\theta} = \frac{1}{2i} \ln \frac{ik}{-ik} \quad (21)$$

имеет две точки ветвления  $\theta = ik$  [4]. Для выделения однозначной ветви аналитической функции  $N_1(k, \theta)$  (20), необходимо в комплексной плоскости провести разрез по мнимой оси между точками  $ik$  и  $-ik$ . Контур интегрирования, используемый при выполнении обратного преобразования Лапласа, приведен на рис. 1. Замыкаем прямую  $L$ , по которой необходимо интегрировать при выполнении обратного преобразования Лапласа, дугой бесконечно большого радиуса, расположенной в левой полуплоскости, и проводим разрез между точками  $-ik$  и  $ik$ . Таким образом, выполнение обратного преобразования Лапласа сводится к интегрированию по берегам разреза  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 1).

Выполнив обратное преобразование Лапласа функции  $N_1(k, \theta)$  (20), получим следующее выражение для образа Фурье концентрации однократно рассеянных частиц:

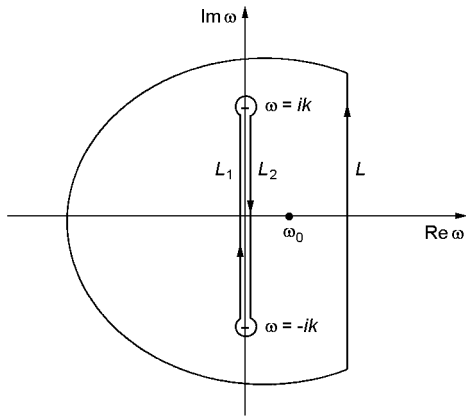


Рис. 1. Контур интегрирования, используемый при выполнении обратного преобразования Лапласа

$$N_1(k, \tau) = \frac{1}{3k} \int_0^1 d(\tau) \sin k \tau, \quad (22)$$

где

$$d(\tau) = \ln \frac{1}{1 - \tau^2}. \quad (23)$$

После выполнения обратного преобразования Фурье величины  $N_1(k, \tau)$  (22) получаем выражение для концентрации однократно рассеянных частиц:

$$N_1(x, \tau) = \frac{\exp(-x)}{4} \int_0^1 \ln \frac{1}{1 - \tau^2} d(\tau) \cos k \tau, \quad (24)$$

где  $\chi(x)$  — единичная функция Хевисайда.

Образ Фурье — Лапласа концентрации двукратно рассеянных частиц имеет вид

$$N_2(k, \tau) = \frac{1}{3} \frac{\text{arctg}^3(k/\tau)}{k^3}. \quad (25)$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа (контур интегрирования приведен на рис. 1), получим

$$N_2(k, \tau) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(\tau)}{3k^2} d(\tau) (\tau^2 - 3\tau^2) \cos k \tau, \quad (26)$$

где функция  $d(\tau)$  определена соотношением (23). Обратное преобразование Фурье функции (26) позволяет записать следующее выражение для концентрации частиц, рассеянных дважды:

$$N_2(x, \tau) = \frac{\exp(-x)}{16} \int_0^1 \frac{d(\tau)}{3} d(\tau) (\tau^2 - 3\tau^2). \quad (27)$$

Для трехкратно рассеянных частиц получим

$$N_3(k, \tau) = \frac{1}{3} \frac{\arctg^4 \frac{k}{\tau}}{k^4}, \quad (28)$$

$$N_3(k, \tau) = \frac{1}{2} \frac{1}{3k^3} \int_0^{\tau} d\tau' (\tau'^2 - \tau^2) \sin k \tau'. \quad (29)$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, получаем следующее выражение для концентрации частиц, испытавших рассеяние три раза:

$$N_3(\tau, \tau) = \frac{\exp(-\tau/3)}{8} \int_0^{\tau} d\tau' (\tau'^2 - \tau^2) \int_0^{\tau'} d\tau'' (\tau''^2 - \tau^2). \quad (30)$$

На рис. 2 представлена зависимость концентрации рассеянных частиц от времени в точке  $\tau = 3$ . Числа у кривых соответствуют кратности рассеяния. Отметим, что если  $\tau < 3$ , то концентрация частиц равна нулю, в соответствии с конечным значением их скорости. Первыми в точку  $\tau = 3$  приходят однократно рассеянные частицы и до момента времени, соответствующего условию  $N_1 = N_2$ , число однократно рассеянных частиц в данной точке пространства оказывается больше числа частиц с другой кратностью рассеяния. Затем некоторый период времени в точке  $\tau = 3$  будут преобладать двукратно рассеянные частицы, и так далее (рис. 2).

Число  $k$ -кратно рассеянных частиц во всем пространстве в данный момент времени определяется соотношением

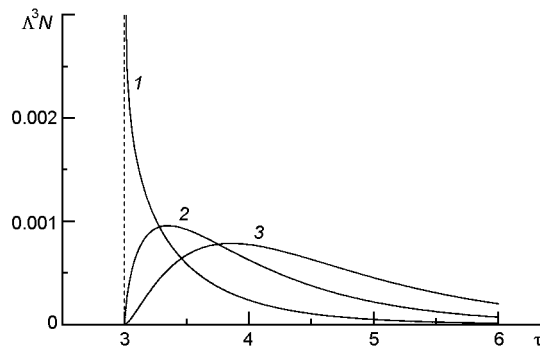
$$n_k(t) = 4 \int_0^t dr r^2 N_k(r, t). \quad (31)$$

Проинтегрировав выражение для концентрации нерассеянных частиц (12), получим

$$n_0(\tau) = \exp(-\tau/3). \quad (32)$$

Таким образом, полное число нерассеянных частиц (32) экспоненциально уменьшается со временем вследствие их рассеяния на неоднородностях магнитного поля. Интегрируя по пространственной

Рис. 2. Зависимость концентрации рассеянных частиц от времени в точке  $\tau = 3$ . Цифры у кривых соответствуют кратности рассеяния



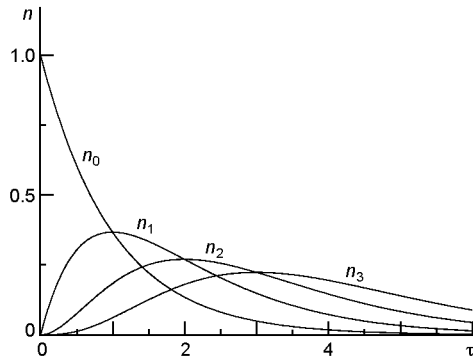


Рис. 3. Зависимость числа рассеянных частиц от времени. Числа у кривых соответствуют кратности рассеяния

переменной соотношения (24), (27) и (30), получаем количества  $n_i$  рассеянных частиц во всем пространстве, которые испытали одно, два и три рассеяния:

$$n_1(t) = \exp(-t), \quad (33)$$

$$n_2(t) = \frac{t^2}{2} \exp(-t), \quad (34)$$

$$n_3(t) = \frac{t^3}{3!} \exp(-t). \quad (35)$$

Можно записать выражение для числа частиц (во всем пространстве), которые испытали  $k$  рассеяний:

$$n_k(t) = \frac{t^k}{k!} \exp(-t). \quad (36)$$

Полное число частиц не изменяется со временем и равно числу частиц, инжектированных источником:

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k(t) = 1. \quad (37)$$

На рис. 3 представлена зависимость от времени числа  $k$ -кратно рассеянных частиц (во всем пространстве) согласно выражению (36). Видно, что при малых значениях  $t$  в пространстве преобладают нерассеянные частицы. При условии  $1 < t < 2$  оказывается больше всего однократно рассеянных частиц, а в случае  $k < t < k + 1$ , преобладают частицы, испытавшие рассеяние  $k$  раз.

### КОНЦЕНТРАЦИЯ ЧАСТИЦ, РАССЕЯННЫХ БОЛЕЕ ОДНОГО РАЗА

Образ Фурье — Лапласа рассеянных частиц (15) можно представить в следующем виде:

$$N_s(k, t) = N_1(k, t) + N_2(k, t) + \dots \quad (38)$$



где величина  $N_1$  (20) соответствует однократно рассеянным частицам, а выражение

$$N(k, \dots) = \frac{1}{3k^2} \frac{\operatorname{arctg}^3(k/\dots)}{k \operatorname{arctg}(k/\dots)} \quad (39)$$

представляет собой образ Фурье — Лапласа концентрации частиц, рассеянных более одного раза.

Выполним сначала обратное преобразование Лапласа соотношения (39). Если выполнено условие  $k > 1/2$ , то уравнение

$$k \operatorname{arctg} \frac{k}{\dots} = 0 \quad (40)$$

имеет единственный корень

$$\dots = k \operatorname{ctg} k. \quad (41)$$

В противоположном случае  $k < 1/2$  уравнение (40) не имеет решений. Таким образом, при выполнении обратного преобразования Лапласа необходимо вычислить вычет в точке  $\dots = k \operatorname{ctg} k$  (41) (при условии  $k > 1/2$ ). Контур интегрирования, используемый при выполнении обратного преобразования Лапласа, приведен на рис. 1. Выполнив обратное преобразование Лапласа, получаем следующее выражение для образа Фурье концентрации частиц, рассеянных более одного раза:

$$N(k, \dots) = N(k, \dots) + N(k, \dots), \quad (42)$$

$$N(k, \dots) = \frac{k^2}{3 \sin^2 k} \exp(k \operatorname{ctg} k) - \frac{1}{2} k, \quad (43)$$

$$N(k, \dots) = \frac{1}{16} \frac{1}{3k_0} \int d \exp(ik \dots) \left( \frac{(i \dots)^3}{k - \frac{i}{2}} - \frac{(i \dots)^3}{k - \frac{i}{2}} \right)$$

$$\frac{1}{16} \frac{1}{3k_0} \int d \exp(ik \dots) \left( \frac{(i \dots)^3}{k - \frac{i}{2}} - \frac{(i \dots)^3}{k - \frac{i}{2}} \right), \quad (44)$$

где величина  $\dots$  определена формулой (23). Величина  $N$  (43) получена при вычислении вычета в точке  $\dots = k \operatorname{ctg} k$  (41), а формула для  $N$  (44) получена при интегрировании по берегам разреза  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 1).

Выполняя обратное преобразование Фурье и учитывая формулу (4), приходим к следующим соотношениям:

$$N(\dots, \dots) = \frac{\exp(\dots)}{2} \int_0^{\dots} dk \frac{k^3 \sin k}{\sin^2 k} \exp(k \operatorname{ctg} k), \quad (45)$$

$$N(\tau, \theta) = \frac{\exp(-\frac{\tau}{2})}{16 \tau^2 \theta^3} d_0 (\tau^2 - 3\theta^2) \cos \frac{\theta}{2} (\tau^2 - 3\theta^2) \sin \frac{\theta}{2} (\tau^2 - 3\theta^2) \exp \frac{\tau}{2} (\tau^2 - 3\theta^2). \quad (46)$$

Верхний предел интегрирования  $\tau_1$  в формуле (46) равен величине  $\tau/\theta$ , если  $\tau < \theta$ , и  $\tau_1 = 1$  в противоположном случае ( $\tau > \theta$ ). Концентрация рассеянных частиц  $N_s(\tau, \theta)$  представляет собой сумму однократно рассеянных частиц  $N_1(\tau, \theta)$  (24) и частиц, рассеянных более одного раза  $N(\tau, \theta)$ . Концентрация частиц, рассеянных более одного раза, можно представить в виде суммы

$$N(\tau, \theta) = N_1(\tau, \theta) + N(\tau, \theta), \quad (47)$$

где величины  $N_1, N$  определены формулами (45) и (46).

Если время, прошедшее после инъекции частиц, значительно превышает характерное время рассеяния ( $\tau \gg 1$ ), то можно пренебречь концентрацией нерассеянных частиц  $N_0$  (12) и однократно рассеянных частиц  $N_1$  (24), так как эти величины пропорциональны экспоненциально малому множителю  $\exp(-\frac{\tau}{2})$ .

Таким образом, при больших значениях безразмерного времени в распределении КЛ доминируют многократно рассеянные частицы. При больших значениях времени величина  $N$  (45) значительно превышает величину  $N$  (46), поэтому при выполнении условия  $\tau \gg 1$  концентрация рассеянных частиц определяется соотношением (45). Подынтегральная функция в выражении для  $N$  (45) в случае  $\tau \gg 1$  имеет резкий максимум в точке  $k = 0$ . Разлагая подынтегральную функцию в ряд при малых значениях  $k$  и распространяя интегрирование в формуле (45) до бесконечности, получаем следующее выражение для концентрации КЛ:

$$N(\tau, \theta) = \frac{1}{2 \tau^2 \theta^3} \int_0^\infty dk k \sin k \left( 1 - \frac{k^2}{3} + \frac{k^4}{45} \right) \exp \frac{k^2}{3}. \quad (48)$$

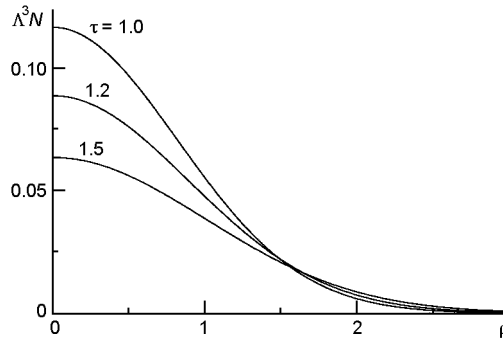
Интегрирование приводит к следующему результату [3]:

$$N(\tau, \theta) = \frac{1}{8 \tau^3} \frac{3}{\theta^3} \exp \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{3}{4} \right). \quad (49)$$

Соотношение (49) описывает пространственно-временное распределение КЛ в случае, когда время, прошедшее после инъекции частиц мгновенным источником, значительно превышает обратную частоту столкновений ( $\tau \gg 1$ ). Отметим, что при диффузионном распространении концентрация СКЛ имеет вид

$$N(\tau, \theta) = \frac{1}{8 \tau^3} \frac{3}{\theta^3} \exp \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{3}{4} \right). \quad (50)$$

Рис. 4. Пространственная зависимость концентрации частиц. Диффузионное приближение



Таким образом, полученное соотношение для концентрации частиц (49) отличается от решения уравнения диффузии (50) только наличием множителя  $1 + 3/4$ . При увеличении параметра  $\tau$  этот множитель стремится к единице, а выражение для концентрации КЛ (48) приближается к решению уравнения диффузии (50). В переменных  $r, t$  формула (50) имеет вид

$$N(r, t) = \frac{1}{8} \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right), \quad (51)$$

где  $D = 1/3$  — коэффициент диффузии КЛ.

На рис. 4 представлена пространственная зависимость концентрации КЛ (50) в различные моменты времени (значения величины приведены у соответствующих кривых). По оси абсцисс приведена пространственная координата  $\rho$ , а по оси ординат — безразмерная величина  $\Lambda^3 N$ , пропорциональная концентрации частиц. Видно, что с течением времени максимум пространственного распределения частиц, расположенный в начале координат, уменьшается, а пространственное распределение КЛ расширяется (рис. 4). Отметим, что в момент времени  $\tau$  частицы оказываются распределенными во всем пространстве, а не в ограниченной области  $\rho < \sqrt{4\tau}$ . Такое распределение частиц является следствием неограниченной скорости распространения возмущений, которая характерна для уравнения диффузии.

Пространственное распределение рассеянных частиц представлено на рис. 5. Концентрация рассеянных частиц  $N_s$  соответствует решению кинетического уравнения (3) и описывается соотношениями (24), (45), (46). В момент времени  $\tau$  рассеянные частицы распределены внутри сферы радиуса  $\rho = \sqrt{4\tau}$  (рис. 5). Со временем частицы занимают все больший объем пространства, а их концентрация в центральной области уменьшается. Отметим, что в пространственной области  $\rho > \sqrt{4\tau}$  частицы отсутствуют ( $N = 0$ ). Заметим, что на рис. 5 приведена концентрация только рассеянных частиц. Нерассеянные частицы в момент времени  $\tau$  расположены на сфере радиуса  $\rho = \sqrt{4\tau}$ , их число экспоненциально уменьшается со временем, а концентрация удовлетворяет соотношению (12). При приближении координаты  $\rho$  к значению  $\rho = \sqrt{4\tau}$  концентрация рассеянных частиц неограниченно

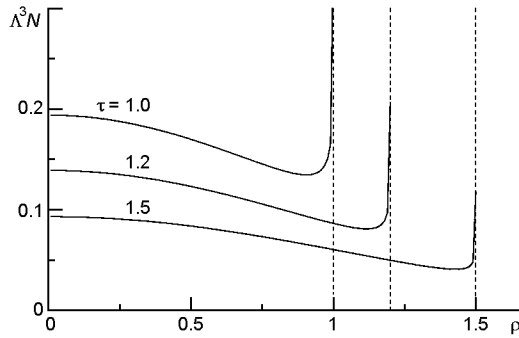


Рис. 5. Пространственная зависимость концентрации частиц. Решение кинетического уравнения

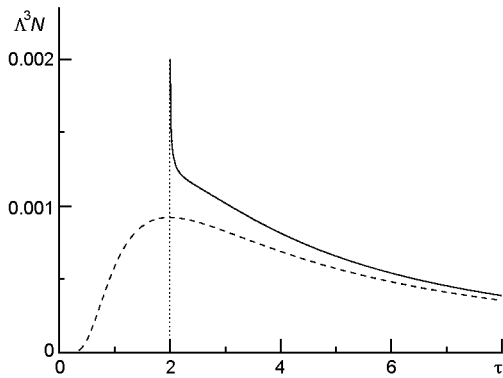


Рис. 6. Зависимость от времени концентрации частиц в точке  $\rho = 2$ . Штриховая кривая — диффузионное приближение, сплошная — решение кинетического уравнения

возрастает (рис. 5), что обусловлено однократно рассеянными частицами  $N_1$  (24).

На рис. 6 представлена зависимость концентрации рассеянных частиц от времени в точке  $\rho = 2$ . Штриховой кривой представлена концентрация КЛ, вычисленная в диффузионном приближении (50). Сплошная кривая соответствует временному профилю концентрации рассеянных частиц в данной точке, вычисленной исходя из кинетического уравнения. Видно, что в точке  $\rho = 2$  концентрация КЛ монотонно уменьшается со временем, а при больших значениях величины  $\tau$  кривые, соответствующие кинетическому и диффузионному описанию распространения КЛ, постепенно сближаются (рис. 6). Отметим, что нерассеянные частицы, которые приходят в точку  $\rho = 2$  в момент времени  $\tau = 2$ , не приведены на данном рисунке. В начальный период времени (когда  $\tau$  лишь немного превышает значение  $\tau = 2$ ) в данной точке пространства преобладают однократно рассеянные частицы (рис. 6).

#### СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ГАРМОНИК ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

Функцию распределения КЛ можно представить в виде разложения по полиномам Лежандра, которые зависят от величины  $\mu$ . Исходя из кинетического уравнения, можно получить бесконечную систему дифференциальных уравнений для гармоник функции распределения КЛ

[13, 17, 31]. Представим функцию распределения космических лучей  $f(r, \mu, \lambda)$  в следующем виде:

$$f(r, \mu, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} g_n(r, \lambda) P_n(\mu), \quad (52)$$

где

$$g_n(r, \lambda) = \int_{-1}^1 P_n(\mu) f(r, \mu, \lambda) d\mu, \quad (53)$$

а  $P_n(\mu)$  — полином Лежандра.

Умножив кинетическое уравнение (3) на  $1, P_1$  и  $P_2$  соответственно, и проинтегрировав полученные соотношения по  $\mu$ , получим следующую систему уравнений:

$$-\frac{g_0}{2} - \frac{1}{2} \nabla^2 g_1 = 0, \quad (54)$$

$$\frac{g_1}{3} - g_1 - \frac{1}{3} \nabla^2 g_0 - \frac{2}{3} \nabla^2 g_2 = 0, \quad (55)$$

$$\frac{g_2}{5} - g_2 - \frac{2}{5} \nabla^2 g_1 - \frac{2}{5} \nabla^2 g_3 - \frac{12}{5} \nabla^2 g_3 = 0, \quad (56)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}. \quad (57)$$

Предположим, что функция распределения КЛ изменяется достаточно медленно, так что  $\frac{g_1}{g_0} \ll 1$ , и пренебрежем второй гармоникой  $g_2$  по сравнению с величиной  $g_1$ . При сделанных приближениях уравнение (55) принимает вид

$$g_1 = \frac{1}{3} \nabla^2 g_0. \quad (58)$$

Подставив соотношение (58) в уравнение (54), получим уравнение диффузии для величины  $g_0$ :

$$-\frac{g_0}{3} - \frac{1}{3} \nabla^2 g_0 = 0, \quad (59)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$g_0(r, \lambda) = \frac{3^{3/2}}{16^{5/2} 3^{3/2}} \exp\left(-\frac{3r^2}{4}\right). \quad (60)$$

Так как концентрация КЛ связана с величиной  $g_0$  соотношением

$$N(r, t) = 2 g_0(r, t), \quad (61)$$

приходим к выражению (50), описывающему концентрацию КЛ в диффузионном приближении.

**ТЕЛЕГРАФНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ**

Если в уравнении (55) пренебречь второй гармоникой функции распределения КЛ, то из уравнений (54), (55) можно получить телеграфное уравнение для величины  $g_0$  [7, 8, 12, 14, 17, 20, 21, 25, 32]:

$$\frac{\partial^2 g_0}{\partial t^2} - \frac{g_0}{3} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 g_0}{\partial r^2} \quad (r, t) = \frac{g_0(r, t)}{t}. \quad (62)$$

В координатах  $r, t$  телеграфное уравнение (62) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 g_0}{\partial t^2} - \frac{g_0}{t} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{g_0}{r} - \frac{g_0}{r} = (r, t) = \frac{g_0(r, t)}{t}. \quad (63)$$

Телеграфное уравнение (63) соответствует скорости распространения возмущений, равной  $1/\sqrt{3}$  [7, 12, 20]. Такое значение является следствием пренебрежения второй гармоникой функции распределения КЛ при выводе телеграфного уравнения.

В работе [21] приведен вывод модифицированного телеграфного уравнения, которое характеризуется иной скоростью распространения возмущений. Кроме того, оказывается, что модифицированное телеграфное уравнение, полученное из кинетического уравнения Больцмана (1), отличается от соответствующего уравнения, вывод которого проведен исходя из кинетического уравнения с интегралом столкновений Фоккера — Планка [17, 21].

Выполнив преобразование Фурье по координате и преобразование Лапласа по времени, получим из уравнения (62) выражение

$$g_0(k, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{k^2/3}. \quad (64)$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, получим выражение для образа Лапласа величины  $g_0$ :

$$g_0(r, t) = \frac{3}{8} \frac{1}{2^3} \exp(-\sqrt{3}(r^2/2)). \quad (65)$$

Обратное преобразование Лапласа [1] приводит к следующему выражению для нулевой гармоники функции распределения КЛ:

$$g_0(r, t) = \frac{3\sqrt{3} \exp(-r^2/2)}{32 t^2/3}$$

$$1 - \frac{2}{3^2} \frac{I_1(\sqrt{3}t/2)}{2} - \frac{I_0(\sqrt{3}t/2)}{2} - \frac{I_2(\sqrt{3}t/2)}{3^2} \left( \sqrt{3} \right) \\ \frac{3 \exp(-\sqrt{3}t/2)}{8^2 3^3} \frac{1}{2} \left( \sqrt{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \sqrt{3} \right) \left( \sqrt{3} \right), \quad (66)$$

где

$$\sqrt{t^2 + 3^2}, \quad (67)$$

а  $I_n(x)$  — модифицированная функция Бесселя  $n$ -го порядка.

Выражение для нулевой гармоники функции распределения КЛ (66) содержит сингулярную часть (которая пропорциональна дельта-функции и ее производной) и слагаемое, пропорциональное единичной функции Хевисайда. При мгновенной инжекции частиц точечным источником, расположенным в начале координат, в момент времени частицы будут находиться в ограниченной области пространства  $t/\sqrt{3}$ , в соответствии со скоростью распространения возмущений  $t/\sqrt{3}$ , характерной для телеграфного уравнения. Сингулярность, которая имеет место в выражении для величины  $g_0$  (66) в точке  $t = \sqrt{3}$ , характерна для решений телеграфного уравнения [17, 20].

Рассмотрим выражение для величины  $g_0$  (66), которая является решением телеграфного уравнения, при больших значениях времени. При условии  $t \gg 1$  аргумент модифицированных функций Бесселя (67) приобретает большое значение, и можно использовать приближенные выражения модифицированных функций Бесселя, справедливые при больших значениях аргумента [1]. При условии  $t \gg 1$  из формулы (66) получим следующее соотношение:

$$g_0(t, \sqrt{3}) \approx \frac{3^{3/2}}{16^{5/2} 3^{3/2}} \exp\left(-\frac{3}{4}t\right) \left(1 - \frac{9}{4}\right). \quad (68)$$

Вследствие наличия последнего множителя в формуле (68) данная величина (в данной точке пространства, в данный момент времени) оказывается несколько меньше, чем соответствующая уравнению диффузии величина (60). С увеличением времени различие между величинами (60) и (68) уменьшается.

На рис. 7 представлена зависимость концентрации КЛ от безразмерного времени  $t$  в точке  $r = 2$ . Кривая 1 соответствует решению диффузионного уравнения (60). Отметим, что величина  $g_0$  согласно формуле (61) пропорциональна концентрации КЛ. В диффузионном приближении частицы появляются в точке  $r = 2$  мгновенно, а не в момент времени  $t = 2$  (кривая 1 на рис. 7). Кривая 2 на рис. 7 соответствует решению (66) телеграфного уравнения. В точку  $r = 2$  частицы приходят в момент времени  $t = 2\sqrt{3}$ , в соответствии со скоростью распространения возмущений, характерной для телеграфного уравнения. При

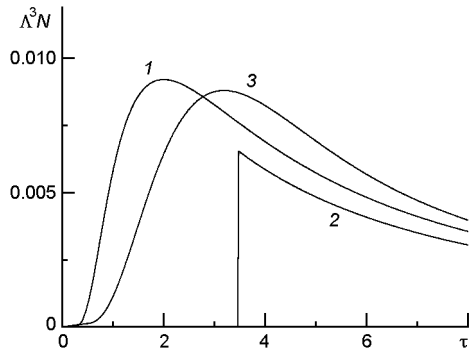


Рис. 7. Зависимость концентрации космических лучей от безразмерного времени в точке  $\tau = 2$ . Кривая 1 — решение уравнения диффузии, кривая 2 — решение телеграфного уравнения, кривая 3 — решение уравнения переноса КЛ (72)

условии  $\tau < 2\sqrt{3}$  концентрация КЛ в точке  $\tau = 2$  равна нулю. При больших значениях  $\tau$  решение телеграфного уравнения мало отличается от решения уравнения диффузии. Отметим, что на рис. 7 сингулярная часть решения телеграфного уравнения (64) не представлена.

**УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА,  
УЧИТЫВАЮЩЕЕ НАЛИЧИЕ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ  
УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ**

Перейдем к выводу уравнения переноса КЛ, учитывающего наличие второй сферической гармоники функции распределения КЛ [17]. В уравнении (56) пренебрежем третьей гармоникой и производной по времени от величины  $g_2$ . В этом приближении уравнение (56) приобретает вид

$$g_2 \frac{2}{5} \frac{g_1}{5} \frac{2}{5} g_1 = 0. \tag{69}$$

Система уравнений (54), (55), (69) приводит к следующему уравнению для величины  $g_0$ :

$$\frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau^2} - \frac{g_0}{3} = \frac{1}{3} \frac{\partial g_0}{\partial \tau} - \frac{4}{15} \frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau^2} + \frac{4}{15} \frac{\partial g_0}{\partial \tau} - \frac{4}{15} g_0. \tag{70}$$

Уравнению (70) соответствует следующее выражение для образа Фурье — Лапласа нулевой гармоники функции распределения КЛ:

$$g_0(k, \tau) = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{4}{15} k^2}{k^2 + \frac{4}{15} k^2}. \tag{71}$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, получим



$$g_0(k, \tau) = \frac{\exp\left(-\frac{2}{15}k^2\right)}{2^{\frac{2}{3}}} \operatorname{ch}\frac{2}{15}\sqrt{k^2 - \frac{15}{4}} \operatorname{sh}\frac{2}{15}\sqrt{k^2 - \frac{15}{4}}, \quad (72)$$

где

$$(k) = k^4 - \frac{45}{4}k^2 + \frac{15}{4}, \quad (73)$$

а  $\operatorname{ch}(x)$  и  $\operatorname{sh}(x)$  — гиперболический косинус и синус соответственно.

Обратное преобразование Фурье приводит к следующему соотношению

$$g_0(\tau, \tau) = \frac{\exp(-\tau/2)}{4^{\frac{2}{3}}} \int_0^\infty dk k \sin k \exp\left(-\frac{2}{15}k^2\right) \operatorname{ch}\frac{2}{15}\sqrt{k^2 - \frac{15}{4}} \operatorname{sh}\frac{2}{15}\sqrt{k^2 - \frac{15}{4}}. \quad (74)$$

Можно показать, что при больших значениях  $k$  подынтегральное выражение в формуле (74) стремится к величине  $k \sin k \exp(-3/4)$ . Поэтому соотношение (74) можно записать в следующем виде:

$$g_0(\tau, \tau) = \frac{\exp(-\tau/2)}{4^{\frac{2}{3}}} \int_0^\infty dk k \sin k \exp\left(-\frac{2}{15}k^2\right) \operatorname{ch}\frac{2}{15}\sqrt{k^2 - \frac{15}{4}} \operatorname{sh}\frac{2}{15}\sqrt{k^2 - \frac{15}{4}} \exp\left(-\frac{3}{4}\right) \frac{\exp(-5/4)}{4^{\frac{2}{3}}} (\tau). \quad (75)$$

Отметим наличие сингулярности в точке  $\tau = 0$  в выражении (75). Наличие данной особенности в соотношении (75) обусловлено, вероятно, заменой уравнения (56) приближенным соотношением (69), сделанной при выводе уравнения переноса КЛ (70).

Если время, прошедшее после инъекции частиц, значительно превышает обратную частоту столкновений ( $\tau \gg 1$ ), то подынтегральная функция в выражении (74) имеет резкий максимум в точке  $k = 0$ . Разлагая подынтегральное выражение в ряд по  $k$ , приходим к соотношению (48). В результате интегрирования получаем выражение для концентрации КЛ (49). Таким образом, если время, прошедшее после инъекции частиц, значительно превышает среднее время рассеяния КЛ, и время их распространения от источника ( $t \gg r/v$ ,  $t \gg r/c$ ), решение уравнения переноса КЛ (70) совпадает с решением кинетического уравнения. Кривая 3 на рис. 7 иллюстрирует зависимость концентрации КЛ (74), (61) от времени в точке  $\tau = 2$ . Отметим, что максимум интенсивности КЛ в данном случае имеет место позднее, чем в случае

диффузионного распространения частиц (рис. 7). Так же, как в случае диффузии, в данном приближении частицы появляются в точке  $r = 2$  сразу после их инъекции в начале координат. Следовательно, для уравнения переноса КЛ (70) характерна бесконечная скорость распространения возмущений.

### МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЙЯНИЕ ЧАСТИЦ НА МАЛЫЕ УГЛЫ

Рассмотрим кинетическое уравнение, описывающее многократное рассеяние заряженных частиц на малые углы [2, 5, 10]:

$$\frac{f}{t} \cos \frac{f}{r} - \sin \frac{f}{r} \frac{1}{2} \sin \frac{f}{r} \frac{(r)(t)}{16 r^2}. \quad (76)$$

Первое слагаемое в правой части кинетического уравнения (76) описывает многократное рассеяние частиц на малые углы, а второе — мгновенный точечный источник частиц, расположенный в начале координат. Отметим, что рассеяние КЛ на неоднородностях магнитного поля в данном случае предполагается изотропным. Перейдем к безразмерным переменным  $\rho, \tau$  (2). Кинетическое уравнение (76) приобретает вид

$$\frac{f}{t} \cos \frac{f}{r} - \sin \frac{f}{r} \frac{1}{2} \sin \frac{f}{r} \frac{(r)(t)}{16 r^2}. \quad (77)$$

Умножив кинетическое уравнение (77) на  $1, P_2(\cos \theta)$  и проинтегрировав полученные соотношения по величине  $\theta$ , получим систему трех дифференциальных уравнений для гармоник функции распределения КЛ. Первые два уравнения полученной системы определены формулами (54), (55), а третье уравнение имеет вид

$$\frac{g_2}{5} - 3g_2 \frac{2}{5} \frac{g_1}{5} - \frac{2}{5} g_1 \frac{3}{5} \frac{g_3}{5} - \frac{12}{5} g_3 = 0. \quad (78)$$

Данное уравнение отличается от аналогичного уравнения (56) только коэффициентом при второй гармонике (второе слагаемое в левой части уравнения). Два уравнения для сферических гармоник, полученные на основе кинетического уравнения (77), описывающего рассеяние частиц на малые углы, совпадают с уравнениями (54), (55), полученными на основе кинетического уравнения Больцмана (3). Следовательно, независимо от интеграла столкновений этих кинетических уравнений, получаем то же самое уравнение диффузии КЛ и телеграфное уравнение. Отметим, что модифицированные телеграфные уравнения, вывод которых был проведен на основе кинетических уравнений (3) и (77), различаются [17, 21].

Пренебрегая в уравнении (78) третьей гармоникой и производной по времени от второй гармоники, получаем приближенное соотношение

$$3g_2 - \frac{2}{5}g_1 - \frac{2}{5}g_1 = 0. \quad (79)$$

Уравнение (79) отличается от аналогичного уравнения (69) только множителем 3 перед величиной  $g_2$ . Исходя из системы уравнений (54), (55), (79), получаем следующее уравнение переноса КЛ:

$$\frac{g_0}{2} - \frac{g_0}{3^2} - \frac{1}{45^2} g_0 - \frac{4}{45^2} g_0 = \frac{g_0}{45^2} \quad (80)$$

Уравнение переноса (80), полученное исходя из кинетического уравнения (77), отличается от уравнения (70), вывод которого проведен на основе кинетического уравнения (3), только коэффициентами перед последними слагаемыми в левой и правой частях уравнений.

Решение уравнения переноса (80) имеет вид

$$g_0(k) = \frac{\exp(-k/2)}{4^3} \int_0^k dk \sin k \exp\left(\frac{2}{45}k^2\right) \operatorname{ch} \frac{2}{45} \sqrt{k} - \frac{k^2}{\sqrt{k}} \frac{45/4}{45} \operatorname{sh} \frac{2}{45} \sqrt{k}, \quad (81)$$

где

$$k_1(k) = k^4 - \frac{585}{4}k^2 - \frac{45}{4}. \quad (82)$$

Если время, прошедшее после инъекции частиц, значительно превышает обратную частоту столкновений, то решение уравнения переноса КЛ (81) совпадает с решением уравнения диффузии.

На рис. 8 представлена зависимость концентрации КЛ от времени в точке  $\theta = 3$ . Кривая 1 иллюстрирует решение уравнения переноса КЛ (75), соответствующее кинетическому уравнению (3). Кривая 2 представляет решение уравнения переноса КЛ (81), полученное в случае многократного рассеяния частиц на малые углы. Отметим, что в случае рассеяния КЛ на малые углы временной профиль интенсивности частиц характеризуется более резким максимумом, а начало возраста-

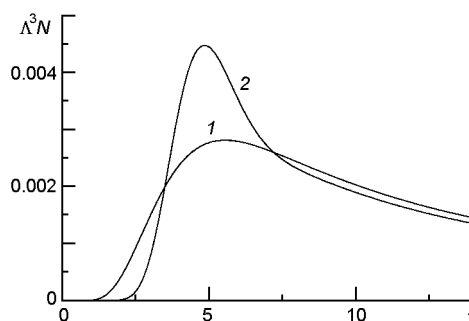


Рис. 8. Зависимость концентрации частиц от времени в точке  $\theta = 3$ . Кривая 1 соответствует решению уравнения переноса КЛ (74), кривая 2 — решению (81)

ния интенсивности КЛ в данной точке пространства имеет место позднее (рис. 8).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрено распространение СКЛ в межпланетной среде на основе кинетических уравнений. Получено аналитическое решение кинетического уравнения для концентрации СКЛ при их мгновенной инжекции точечным источником частиц. Показано, что функция распределения КЛ может быть представлена как сумма функций распределения нерассеянных и рассеянных частиц. Проанализировано пространственно-временное распределение частиц с различной кратностью рассеяния. Показано, что если время, прошедшее после инжекции частиц, значительно превышает время их распространения от источника до данной точки пространства и обратную частоту столкновений, то их концентрация определяется решением уравнения диффузии.

На основе кинетического уравнения получена система дифференциальных уравнений для сферических гармоник функции распределения КЛ. Выведено телеграфное уравнение и уравнение переноса КЛ, учитывающее наличие второй гармоники углового распределения частиц. Получены решения этих уравнений. Показано, что кинетическим уравнениям Больцмана и Фоккера — Планка соответствуют те же самые телеграфные уравнения. Продемонстрированы отличия уравнений переноса КЛ, соответствующих разному характеру рассеяния частиц. Показано, что при рассеянии частиц на малые углы интенсивность СКЛ в данной точке пространства начинает возрастать позже и имеет более резкий максимум.

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М. Наука, 1979. 832 с.
2. Гальперин Б. А., Топтыгин И. Н., Фрадкин А. А. Рассеяние частиц магнитными неоднородностями в сильном магнитном поле. *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1971. 60. № 3. С. 972.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М., Наука, 1981. 800 с.
4. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М. Наука, 1976. 407 с.
5. Топтыгин И. Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. М. Наука, 1983. 304 с.
6. Шахов Б. А., Федоров Ю. И., Кызыюров Ю. В., Носов С. Ф. Описание распространения солнечных космических лучей на основе аналитического решения кинетического уравнения. *Изв. РАН, сер. физ.* 1995. 59, № 4. С. 48.
7. Шишов В. И. О распространении высокоэнергичных солнечных протонов в межпланетном магнитном поле. *Геомагнетизм и аэронавигация.* 1966. 6. С. 223.
8. Axford W. I. Anisotropic diffusion of solar cosmic rays. *Planet. Space Sci.* 1965. 13, N 12. P. 1301.

9. Bieber J. W., Clem J., Evenson P., et al. Giant ground level enhancement of relativistic solar protons on 2005 January 20. *Astrophys. J.* 2013. 771. 52 (13 p.).
10. Dorman L. I., Katz M. E. Cosmic ray kinetics in space. *Space Sci. Rev.* 1977. 70. P. 529—575.
11. Duggal S. P. Relativistic solar cosmic rays. *Rev. Geophys. Space Phys.* 1979. 17. N 5. P. 1021—1058.
12. Earl J. A. Diffusion of charged particles in a random magnetic field. *Astrophys. J.* 1973. 180. P. 227.
13. Earl J. A. New description of charged particle propagation in random magnetic field. *Astrophys. J.* 1994. 425. P. 331.
14. Effenberger F., Litvinenko Y. The diffusion approximation versus the telegraph equation for modeling solar energetic particle transport with adiabatic focusing. I. Isotropic pitch angle scattering. *Astrophys. J.* 2014. 783. P. 15.
15. Fedorov Yu. I., Kyzurov Yu. V., Nosov S. F., Shakhov B. A. Solution of the Boltzmann equation for nondiffusive solar cosmic ray propagation. *Ann. Geophysicae.* 1996. 14. P. 1016.
16. Fedorov Yu. I., Shakhov B. A. Solar cosmic rays in homogeneous magnetic field. *Proc. 23rd Intern. Cosmic Ray Conf.* — Calgary, 1993. Vol. 3. P. 215—218.
17. Fedorov Yu. I., Shakhov B. A. Description of non-diffusive cosmic ray propagation in a homogeneous regular magnetic field. *Astron. and Astrophys.* 2003. 402. P. 805.
18. Fedorov Yu. I., Shakhov B. A., Stehlik M. Non-diffusive transport of cosmic rays in homogeneous regular magnetic fields. *Astron. and Astrophys.* 1995. 302, N2. P. 623—634.
19. Fedorov Yu. I., Stehlik M., Kudela K., Kassavicova J. Non-diffusive particle pulse transport: Application to an anisotropic solar GLE. *Solar Phys.* 2002. 208, N2. P. 325—334.
20. Fisk L. A., Axford W. I. Anisotropies of solar cosmic rays. *Solar Phys.* 1969. 7. P. 486.
21. Gombosi T. J., Jokipii J. R., Kota J. et al. The telegraph equation in charged particle transport. *Astrophys. J.* 1993. 403. P. 377.
22. Gopolswamy N., Xie H., Yashiro S. et al. Properties of ground level enhancement events and associated solar eruptions during solar cycle 23. *Space Sci. Rev.* 2012. 71. P. 23.
23. Kagashvili E. Kh., Zank G. P., Lu J. Y., Droge W. Transport of energetic charged particles. 2. Small-angle scattering. *J. Plasma Phys.* 2004. 70, part. 5. P. 505—532.
24. Kota J. Coherent pulses in the diffusive transport of charged particles. *Astrophys. J.* 1994. 427, N2. P. 1035—1040.
25. Malkov M. A., Sagdeev R. Z. Cosmic ray transport with magnetic focusing and the «telegraph» model. *Astrophys. J.* 2015. 808. P. 157.
26. Miroshnichenko L. I. Solar cosmic rays. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., Netherlands, 2001. 480 p.
27. Miroshnichenko L. I., Perez-Peraza J. A. Astrophysical aspects in the studies of solar cosmic rays. *Int. J. Modern Phys. A.* 2008. 23, N 1. P. 1.
28. Saiz A., Ruffolo D., Bieber J. W., Evenson P. Modeling relativistic solar particles in the inner solar system during an extreme event. *Proc. 32-nd Intern. Cosmic Ray Conf.*, Beijing 2011. 10. P. 210.
29. Shakhov B. A., Stehlik M. The Fokker-Planck equation in the second order pitch angle approximation and its exact solution. *J. Quant. Spectr. Radiative Transfer.* 2003. 78. P. 31—39.
30. Shea M. A., Smart D. F. Space weather and the ground-level solar proton events of the 23rd solar cycle. *Space Sci. Rev.* 2012. 71. P. 161.

31. Webb G. M., Pantazopoulou M., Zank G. P. Multiple scattering and the BGK Boltzmann equation. *J. Phys. A Math. Gen.* 2000. 33. P. 3137—3160.
32. Zank G. P., Lu J. Y., Rise W. K. M., Webb G. M. Transport of energetic charged particles in a random magnetic field. Part 1. Large angle scattering. *J. Plasma Phys.* 2000. 64. P. 507.

Статья поступила в редакцию 07.11.2017

*Ю. І. Федоров, Б. А. Шахов*

Головна астрономічна обсерваторія Національної академії наук України,  
Київ, Україна

#### ОПИС ПОШИРЕННЯ СОНЯЧНИХ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ У МІЖПЛАНЕТНОМУ СЕРЕДОВИЩІ НА ОСНОВІ КІНЕТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Поширення сонячних космічних променів у міжпланетному просторі розглянуто на основі кінетичного рівняння. Одержано вираз для концентрації космічних променів за миттєвої інжекції частинок точковим джерелом. На основі кінетичного рівняння одержано систему диференціальних рівнянь для гармонік функції розподілу космічних променів. Виведено рівняння переносу космічних променів, яке враховує наявність другої гармоніки кутового розподілу частинок. Отримано розв'язок цього рівняння.

**Ключові слова:** космічні промені, кінетичне рівняння, дифузія.

*Yu. I. Fedorov, B. A. Shakhov*

Main Astronomical Observatory of the National Academy of Sciences of Ukraine,  
Kyiv, Ukraine

#### DESCRIPTION OF SOLAR COSMIC RAY PROPAGATION IN THE INTERPLANETARY MEDIUM ON THE BASE OF KINETIC EQUATION

The propagation of solar cosmic rays in the interplanetary space is considered based on the kinetic equation. The expression for cosmic ray density under instantaneous particle injection by point-like source is obtained. The set of differential equations for harmonics of cosmic ray distribution function is obtained starting from kinetic equation. The cosmic ray transport equation, taking into account the presence of the second harmonic of particle angular distribution, is derived and the solution of this equation is obtained.

**Key words:** cosmic rays, kinetic equation, diffusion.