КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 31 № 4 2015

УДК 521.96

В. Я. Чолій

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська 60, Київ, 03601 МСП
Головна астрономічна обсерваторія Національної академії наук України
вул. Академіка Заболотного 27, Київ, 03680 МСП
e-mail: charlie@mao.kiev.ua

Оцінка точності та прогноз параметрів обертання Землі методом сингулярного спектрального аналізу

Представлено результати моделювання, оцінку точності та прогноз рядів координат полюса та всесвітнього часу (UT1 – UTC) методом сингулярного спектрального аналізу. Відмінні характеристики точності прогнозування дозволяють рекомендувати метод для використання в геодинамічних задачах.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ И ПРОГНОЗ ПАРАМЕТРОВ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ МЕТОДОМ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА, Чолий В. Я. — Представлены результаты моделирования, оценка точности и прогноз рядов координат полюса и всемирного времени (UT1 – UTC) методом сингулярного спектрального анализа. Отличные характеристики точности прогнозирования позволяют рекомендовать метод для использования в геодинамических задачах.

PRECISION ESTIMATION AND FORECASTING OF THE EARTH ORIENTATION PARAMETERS WITH THE SINGULAR SPECTRUM ANALYSIS METHOD, by Choliy V. Ya. — Modeling results, precision estimations and forecasting of the pole coordinates and Universal time (UT1 – UTC) series with the Singular Spectrum Analysis method are presented. Excellent forecasting capabilities of the method allow us to recommend SSA for the use in geodynamic applications.

Вступ. Опрацювання спостережень геодинамічних супутників чи віддалених радіоджерел для розв’язання геодинамічних задач регулярно приводить до необхідності прогнозування випадкових функцій чи полів (параметрів обертання Землі, метеорологічних параметрів, глобального вмісту електронів тощо). Найчастіше така необхідність виникає для параметрів обертання Землі, точні значення яких бувають потрібні вже у процесі первинного опрацювання спостережень, а відомими стають з затримкою в години чи доби. Задача прогнозування, однак, має значення не тільки для геодинаміки. Можна говорити про десятки та сотні робіт, що стосуються прогнозування тих чи інших величин у науці та техніці.

Іншою, не менш важливою задачею, є оцінка величини шумів, наявних у рядах виміряних величин.

Одним з найновіших методів аналізу (та прогнозу) часових рядів і полів є метод сингулярного спектрального аналізу (SSA = Singular Spectrum Analysis), що базується на методі головних компонентів (PCA = Principal Component Analysis), який, у свою чергу, використовує спектральний розклад кореляційної матриці в суму сингулярних (SVD = Singular Value Decomposition) як математичну основу.

Теорію методу SSA викладено в роботах [4, 5], яких ми будемо дотримуватися, зберігаючи позначення величин та ставлячи перед собою завдання оцінити, наскільки якісним може бути прогноз координат полюса, зроблений цим методом. Метод є непараметричним і для отримання достовірного результату не потребує ніякої додаткової інформації про ряд чи його властивості.

Метод розкладення матриці за сингулярними числами (SVD) з точки зору обчислень детально аналізується у відомій роботі [3]. Використання методу до аналізу часових рядів та полів стало можливим завдяки теоремі Екхарта — Янга [2], яка стверджує, що розклад матриці у суму матриць рангу один є найкращою апроксимацією початкової матриці в смислі найменших квадратів. Одною з останніх відомих нам робіт, де використання SVD для наукових задач розглядається детально, є робота [6].

Метод. Зупинимося коротко на головних положеннях методу. Нехай $X_N = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ — ряд не обов'язково рівновіддалених точок; N — довжина ряду. Виберемо деяке число L: $1 < L < N$ (довжина вікна) і знайдемо $K \quad N \quad L \quad 1$. Побудуємо траєкторну матрицю:

$$\mathbf{X} = (x_{ij}) \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K\ 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_L & x_{L\ 1} & \dots & x_N \end{matrix} \quad = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_K],$$

$$\mathbf{X}_i \quad (x_i, x_{i\ 1}, \dots, x_{i\ L\ 1})^{\mathrm{T}}.$$

Траєкторна матриця є ханкелевою: елементи на антидіагоналях рівні. Матриця, транспонована до траєкторної, теж буде траєкторною для того ж ряду. Між рядом та його траєкторною матрицею таким чином встановлюється взаємно однозначна відповідність: середнє значення елементів матриці вздовж антидіагоналі рівне значенню ряду.

Побудуємо матрицю $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ і знайдемо всі її власні числа та власні вектори, ортогоналізуючи матрицю. Власні числа будуть дійсними, через те що $\mathbf{S}$ — симетрична. Відсортуємо їх у порядку зменшення:

$$_1 \quad _2 \quad \cdots \quad _d \quad 0 \quad _{d\;1} \cdots \quad _L . \tag{1}$$

Знайти власні числа симетричної матриці можна, наприклад, методом Якобі, який дозволить знайти також і всі власні вектори. Похибки обчислень можуть привести до від'ємних , але такі власні числа матимуть дуже малі модулі і не зможуть серйозно вплинути на результат.

Позначимо через $\mathbf{U}_i$ систему ортонормованих власних векторів. Вектор $\mathbf{U}_i$ відповідає $_i$. Нехай тепер $d = \mathrm{rank}(\mathbf{X}) = \max(i, \; _i > 0)$ і є кількістю додатних власних чисел. Зазвичай $d = L$. Нехай також:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_i / \sqrt{\;_i}, \quad i = 1, d.$$

Тоді розклад траєкторної матриці за сингулярними числами (SVD) буде мати такий вигляд:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \ldots + \mathbf{X}_d,$$

де

$$\mathbf{X}_i = \sqrt{\;_i}\,\mathbf{U}_i\mathbf{V}_i^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

Усі матриці $\mathbf{X}_i$ мають ранг одиниця. Трійки $\sqrt{\;_i}$, $\mathbf{U}_i$, $\mathbf{V}_i$ називаються власними трійками. Звернемо увагу на те, що кожна з матриць $\mathbf{X}_i$ є траєкторною матрицею якогось іншого ряду, який можна з цієї матриці відновити. (Тобто, віднайти такий ряд, який дав би саме таку траєкторну матрицю).

Якщо відновлені ряди демонструють спільні риси, то їхні матриці можна об’єднати в групи за ознакою схожості. Формалізацію цього поняття буде зроблено далі по тексту. Нехай таких груп m:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} \quad \ldots \quad \mathbf{X}_{I_m}.$$

Однак ханкелевість групової траєкторної матриці може не виконуватись строго. Тому при відновленні ряду $G = (g_1, g_2, \ldots, g_N)$ з матриці $\mathbf{Y} = (y_{ij})$ проводять її діагональне усереднення (ханкелізацію):

$$g_k \quad \begin{array}{ll} \dfrac{1}{k\;\;1}\displaystyle\sum_{m\;1}^{k\;1} y_{m,k\;\;m\;\;r}, & 1 \quad k \quad L, \\ \dfrac{1}{L}\displaystyle\sum_{m\;1}^{L} y_{m,k\;\;m\;\;r}, & L \quad k \quad K, \\ \dfrac{1}{N\quad k}\displaystyle\sum_{m\;k\;K\;2}^{N\;K\;1} y_{m,k\;\;m\;\;r}, & K \quad k \quad N. \end{array}$$

Цей складний за зовнішнім виглядом вираз відповідає усередненню матричних елементів вздовж антидіагоналі $i + j = k + 1$. Тобто, $g_1 =$

$= y_{11}$ при $k = 1$, $g_2 = (y_{21} \quad y_{12})/2$ при $k = 2$ і т. п. Якщо таке діагональне усереднення провести для кожної з матриць $\mathbf{X}_{I_k}$, матимемо d послідовностей g. Початковий ряд буде їхньою сумою.

Вибір параметрів. Найскладніше питання — як розділити $\mathbf{X}$ на групи, і який зміст вкладається у поняття «група». Нехай спочатку у виразі (3) кількість груп буде рівною d. Тобто, групування немає.

Проведемо діагональні усереднення для кожної з d матриць $\mathbf{X}_i$. Це дасть d рядів $g^{(i)}$, $i = 1, \ldots, d$. Знайдемо тепер коваріації для всіх можливих комбінацій $g^{(i)}$ та $g^{(j)}$ і згрупуємо воєдино ті $g^{(i)}$, що мають великі (відносно інших) взаємні коваріації. У статистиці якраз висока кореляція є формальним критерієм подібності.

Така постановка питання про групування має далекі наслідки, адже досить легко показати, що детерміновані (наприклад, гармонійні) та суто випадкові сигнали практично не мають шансів утворити великі кореляції, і тому мають опинитися в різних групах. Таким чином, сигнал можна розбити на групу (групи) детермінованих та групу (групи) випадкових сигналів, аналізуючи лише взаємні кореляції.

Що стосується вибору параметра L, то він суттєво залежить від очікуваного результату. Так, якщо йдеться про відновлення гармонійних компонентів ряду, то L має бути не меншим, ніж період найбільшого коливання, наявного в даних. Однак для задачі прогнозу ця величина може бути значно меншою, що суттєво зменшує кількість обчислень.

Прогноз. Дано: $\mathbf{X}_N = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — ряд довжиною $N > 2$, L — довжина вікна $(1 < L < N)$; $\mathbf{L}^r \quad \mathbf{R}^L$, $r < L$ — деякий лінійний простір. Крім того, орт $e_L = (0, 0, \ldots, 1) \quad \mathbf{R}^L, \quad \mathbf{L}^r$; M — число точок прогнозу.

Послідовність міркувань, що дозволяють отримати рекурентний прогноз, така:

1. $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \ldots : \mathbf{X}_K)$, $K \quad N \quad L \quad 1$ — траєкторна матриця для ряду $\mathbf{X}_N$;

2. $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_r$ — ортонормований базис $\mathbf{L}_r$;

3. $\hat{\mathbf{X}} \quad (\hat{\mathbf{X}}_1 : \hat{\mathbf{X}}_2 : \ldots : \hat{\mathbf{X}}_K) \quad \overset{r}{\underset{i\ 1}{}} \mathbf{P}_i \mathbf{P}_i^T \mathbf{X}$ — ортогональна проекція векторів $\hat{\mathbf{X}}_i$ на $\mathbf{L}_r$;

4. $\tilde{\mathbf{X}} \quad (\tilde{\mathbf{X}}_1 : \tilde{\mathbf{X}}_2 : \ldots : \tilde{\mathbf{X}}_K)$ — результат ханкелізації матриці $\hat{\mathbf{X}}$. Тепер $\tilde{\mathbf{X}}$ є траєкторною матрицею деякого ряду $\tilde{\mathbf{X}}_N = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N)$;

5. $\mathbf{Y} \quad \mathbf{R}^L$ позначимо через $\mathbf{Y}$ вектор, що складається з останніх $L - 1$ складових вектора $\mathbf{Y}$, а через $\mathbf{Y}$ — вектор, що складається з перших $L - 1$ його складових;

6. $^2 \quad {}_1^2 \quad {}_2^2 \ \ldots \ {}_r^2$, де ${}_i$ — остання складова вектора $\mathbf{P}_i$.

Можна показати, що остання складова будь-якого вектора $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_L)^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{L}_r$ є лінійною комбінацією його перших складових:

$$y_L \quad a_1 y_{L\ 1} \quad a_2 y_{L\ 2} \ \ldots \ a_{L\ 1} y_1,$$

а вектор коефіцієнтів визначається з формули

$$\mathcal{R} \quad (a_{L \ 1}, a_{L \ 2}, \ldots, a_2, a_1)^{\mathrm{T}} \quad \frac{1}{1 \quad ^2} \sum_{i \ 1}^{r} \ _i\mathbf{P}_i \ ,$$

і не залежить від вибору базису. Рекурентно прогнозований ряд $G_{N \ M} = (g_1, g_2, \ldots, g_{N \ M})$ отримуємо, рекурентно продовживши початковий ряд:

$$g_i \quad \begin{cases} \widetilde{x}_i, & i \quad 1, N, \\ \sum\limits_{j \ 1}^{L \ 1} a_j g_{i \ j}, & i \quad N \quad 1, N \quad M. \end{cases}$$

Усе сказане для рекурентного прогнозу можна записати в операторному вигляді, ввівши оператор

$$\mathcal{R}\mathbf{Y} \quad \begin{matrix} \mathbf{Y} \\ \mathcal{R}^T \mathbf{Y} \end{matrix} \ .$$

Поклавши

$$\mathbf{Z}_i \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{X}}_i, & i \quad 1, \ldots, K, \\ \mathcal{R}\mathbf{Z}_{i \ 1}, & i \quad K \quad 1, \ldots, K \quad M, \end{cases}$$

утворюємо матрицю $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots, \mathbf{Z}_{K \ M})$, яка буде траєкторною для прогнозованого ряду.

Для векторного прогнозу ситуація аналогічна, за виключенням того, що на останньому етапі будується матриця

$$\mathbf{V} \ (\mathbf{V} \ )^{\mathrm{T}} \quad (1 \quad ^2)\mathcal{R}\mathcal{R}^{\mathrm{T}},$$

де

$$\mathbf{V} \quad (\mathbf{P}_1 \ : \mathbf{P}_2 \ : \ldots : \mathbf{P}_r \ ),$$

що, очевидно, має розмір $(L \quad 1) \quad (L \quad 1)$. Введемо оператор

$$\mathcal{P}\mathbf{Y} \quad \begin{matrix} \mathbf{Y} \\ \mathcal{R}^T \mathbf{Y} \end{matrix} \ ,$$

і знайдемо вектори

$$\mathbf{Z}_i \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{X}}_i, & i \quad 1, \ldots, K, \\ \mathcal{P}\mathbf{Z}_{i \ 1}, & i \quad K \quad 1, \ldots, K \quad M \quad L \quad 1. \end{cases}$$

Тепер складаємо матрицю

$$\mathbf{Z} \quad (\mathbf{Z}_1 : \mathbf{Z}_2 : \ldots : \mathbf{Z}_{K \ M \ L \ 1}),$$

яка є траєкторною для прогнозованого ряду до N+M+K-ї точки.

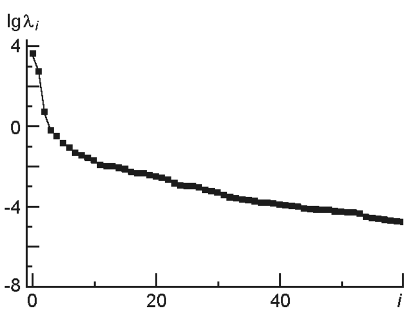
Аналіз та прогноз параметрів обертання Землі. Матеріалом для аналізу послужив офіційний ряд параметрів обертання Землі, відомий як розв’язок C04 [http://tai.bipm.org/iers/data]. Він регулярно оновлюється IERS і містить для інтервалу часу від 01 січня 1962 р. добові дані для координат полюса, поправки $UT1 - UTC$ та кутів нутації   , разом з поправками до кутів dX, dY для врахування прецесії-нутації за новими рекомендаціями IERS (в так званій системі нерухомого початку). Для аналізу було відібрано 6-річний відтинок ряду починаючи з 01 січня 2001 р. На такому інтервалі вкладається як ціла кількість річних, так і ціла кількість чандлерових періодів.

Початкова рекомендація вибрати L 435, що дорівнює чандлеровому періоду, виявляється дещо незручною через тривалий час обчислень. Чисельні експерименти, що грунтуються на поступовому зменшенні величини L, дозволяють стверджувати, що вона також надлишкова. Тому, виходячи з того, що задача визначення параметрів річного та чандлерового періоду не ставилась, було вибрано компромісне значення $L = 90$ (три місяці), що виявилось дуже вдалим.

На рис. 1 показано величини логарифмів власних чисел траєкторної матриці, відсортованих у порядку їхнього зменшення (спектр власних чисел), для X-координати полюса, а на рис. 2 — частина кореляційної матриці для складових, на які розкладено X-координату полюса. Аналогічні рисунки для Y-координати полюса принципово не відрізняються, і тому не приводяться. Тут і надалі на всіх рисунках абсциса — це послідовний номер i точки ряду; нульова точка відповідає 01 січня 2001 р., крок складає одну добу. На рис. 2 абсциса та ордината є номером окремого виділеного ряду $g^{(i)}$. Значення кореляцій подано через градації сірого — від чорного (кореляція дорівнює одиниці) до білого (відсутність кореляцій).

З кореляційної матриці можна зробити висновок, що лише дві перші складові, що корелюють лише між собою, можна відділити у окрему групу, віднісши усі інші складові до другої групи. На рис. 3, *а* показано ряд x_i (позначено квадратиками у точках екстремумів) та окремо перші дві складові. Сума двох перших складових *1* і *2*, накладена на ряд (рис. 3, *б*), не має видимих відхилень від ряду x_i (криві для ряду та суми зливаються). Сума *3* усіх інших головних складових має вигляд шумової доріжки із нульовим середнім.

Таке очевидне розділення ряду на дві групи головних компонентів дозволяє оцінити величину шуму. Перша група — це «корисна» частина сигналу, друга — шуми. Дисперсія шумової частини (групи), на наш погляд, є оцінкою точності значень ряду у випадковому відношенні.



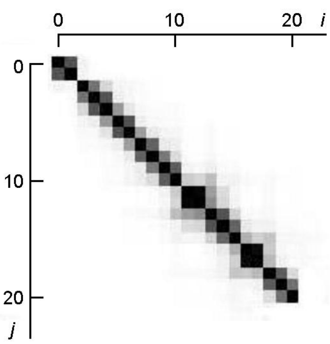


Рис. 1. Спектр власних чисел X-координати полюса (i — послідовний номер точки)

Рис. 2. Частина кореляційної матриці головних складових для X-координати полюса

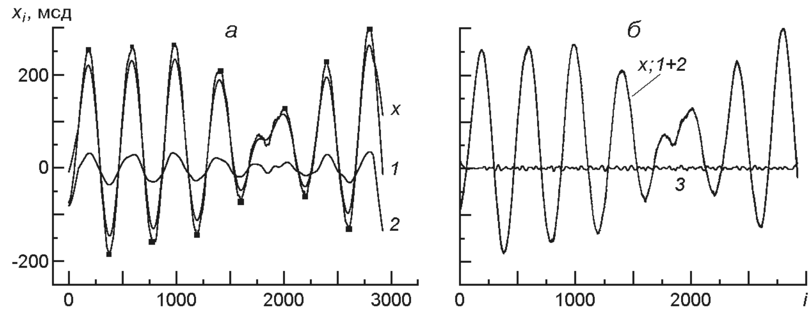
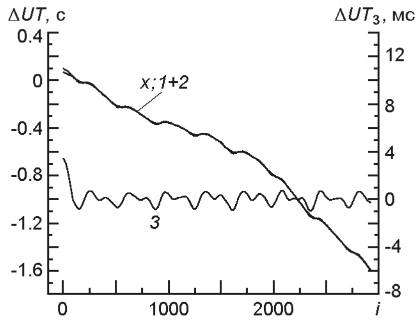


Рис. 3: *а* — ряд *x* та дві перші головні складові *1, 2*; *б* — ряд *x*, сума двох перших складових (*1+2*) та сума усіх інших складових (*3*)



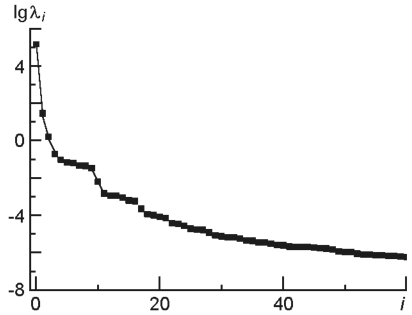


Рис. 4. Ряд *UT* = *UT*1 – *UTC* з накладеною сумою перших двох головних компонентів (гладка лінія) та третя складова (шкала справа)

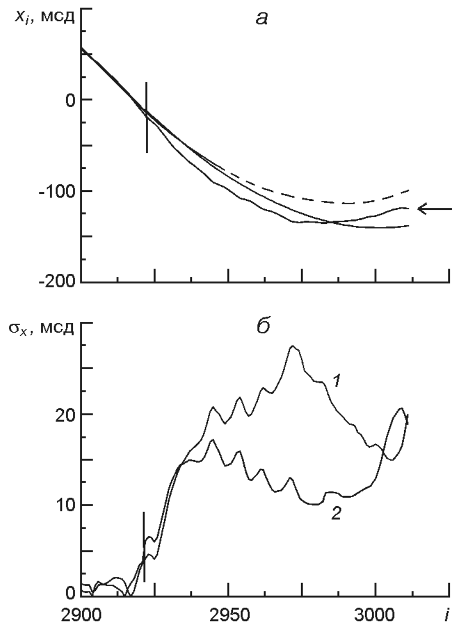
Рис. 5. Спектр власних чисел ряду *UT*1 – *UTC*

На рис. 4 та 5 показано ряд *UT*1 – *UTC* та його спектр власних чисел. Ряд *UT*1 – *UTC* є частиною того ж стандартного розв'язку С04, з якого брались координати полюса. «Корисна» частина ряду теж описується двома головними компонентами.

Для рядів координат полюса та *UT*1 – *UTC* середнє квадратичне відхилення шумових груп складає:

$$_{x} = 2.78 \text{ мсд}, \quad _{y} = 2.83 \text{ мсд}, \quad _{UT} = 0.971 \text{ мс}.$$

Якість прогнозу можна оцінити з аналізу рис. 6 для координат полюса та рис. 7 для *UT*1 – *UTC*. На рис. 6, *а* та рис. 7, *а* показано кінцевий шматок ряду (помічений стрілкою) та прогнози, виконані рекурентним (суцільна лінія) та векторним способами (штрихова лінія). На рис. 6, *б* та рис. 7, *б* показано усереднену похибку отриманих прогнозних значень. На всіх рисунках кінець ряду і початок прогнозів має місце в точці 2922 (показана вертикальною рискою). Усереднену криву похибки прогнозу отримано шляхом повторення процедури аналіз-прогноз на даних розв'язку С04 упродовж року, зсуваючись щоразу на одну точку. На нашу думку, точність отриманих прогнозних величин цілком задовільна для попереднього прогнозу параметрів обертання Землі, і їх можна використовувати як набір початкових значень під час опрацювання спостережень супутників.



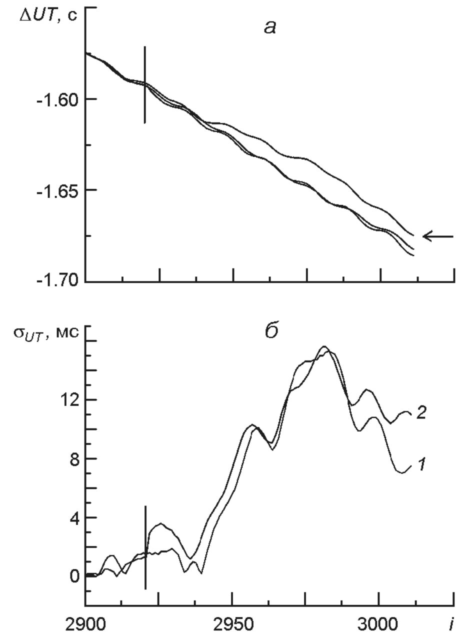


Рис. 6. Прогнозні значення (*а*) та усереднена похибка прогнозу (*б*) для *x*-координати полюса: крива *1* — векторний спосіб, *2* — рекурентний спосіб

Рис. 7. Те ж для *UT*1 – *UTC*

Висновки. Метод сингулярного спектрального аналізу можна успішно використовувати для аналізу точності та прогнозу параметрів обертання Землі в геодинамічних програмах. При цьому слід зауважити, що хоч метод може використовуватися для спектрального аналізу, область його використання значно ширша. Оригінальність методу полягає в тому, що віднайдені головні компоненти зовсім не обов'язково є чистими гармонійними коливаннями, навіть якщо в ряді вони насправді є. Більше того, відновлювати параметри річного, чандлерового та інших коливань для прогнозу і не потрібно. Головною складовою буде хвильова форма (waveform), що відтворює періодичну частину ряду. Це можна вважати перевагою SSA, наприклад, над фур'є-аналізом. Гармонійне модульоване (амплітудно чи частотно) коливання можна відновити за допомогою SSA в вигляді одної головної складової, тоді як перетворення Фур'є дасть набір гармонік, розібратись в якому може бути непросто.

Другою важливою особливістю SSA слід вважати його здатність оцінювати шумову складову ряду чи каталогу. Зазвичай для порівняння каталогів використовується перетворення Гельмерта [1]. При цьому оцінки точності у випадковому відношенні отримуються в результаті спільної обробки кількох наборів даних. Тобто, оцінки точності залежать від того, які дані беруть участь у порівнянні і яку модель систематичних похибок було використано. В SSA ряд аналізується окремо від інших рядів, і тому отримані оцінки точності можуть вважатися «абсолютними» і не залежними від інших рядів. Єдиним вузьким місцем є складність правильного вибору ширини вікна, що завжди було непростим для спектрального аналізу.

Отримані в роботі оцінки точності ряду С04 добре узгоджуються з офіційними величинами IERS. Точність прогнозів теж цілком задовільна для вибраної довжини вікна, що дозволяє рекомендувати метод для використання у геодинамічних програмах.

1. *Choliy V. Ya.* On the extension of Helmert transform // Adv. Astron. and Space Phys.—2014.—**4**.—P. 3—19.

2. *Eckart C., Young G. A.* Principal axis transformation for non-Hermitian matrices // Bull. Amer. Math. Soc.—1939.—**45**.—P. 118—121.

3. *Golub G., van Loen G.* Matrix computations. — Baltimore: John Hopkins Press, 2013.—780 p.

4. *Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A.* Analysis of time series structure. — New York: Chapman, 2001.—310 p.

5. *Golyandina N., Zhigljavsky A.* Singular spectrum analysis for time series. — Berlin: Springer, 2013.—125 p.

6. *Henry E. R., Hofrichter J.* Singular value decomposition; application to analysis of experimental data // Essential Numerical Computer Methods / Ed. by M. Johnson. — Oxford: Elsevir, 2013.—P. 81—140.

Стаття надійшла до редакції 29.05.14