УДК 621.3.01

В.М. Боев

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ КАБЕЛЯ С ДВУХСЛОЙНЫМ ЭКРАНОМ

Наведено розрахунок електромагнітного поля коаксіального кабелю з двошаровим екраном. Для опису питомої електропровідності і магнітної проникності використані розривні функції, що дало можливості розв'язувати задачу для всього простору, що містить кабель, як однозв'язної області.

Приведен расчет электромагнитного поля коаксиального кабеля с двухслойным экраном. Для описания удельной электропроводности и магнитной проницаемости использованы разрывные функции, что дало возможности решать задачу для всего пространства, содержащего кабель, как односвязной области.

В работе [1] задача расчета электромагнитного поля в тороидальной области сведена к расчету поля в цилиндрической области, содержащей проводник с током и охватывающий его ферромагнитный экран. В первом приближении это может быть полем силового кабеля. Обычно металлическая оплетка силовых кабелей выполняется из неферромагнитного электропроводящего материала. Поэтому в формулах, полученных в [1], достаточно заменить магнитную проницаемость стали μ_c на μ_0, чтобы описать поле такого кабеля. Однако, существует необходимость более эффективного экранирования электромагнитного поля силовых кабелей, особенно в трехфазных кабельных линиях, что может быть достигнуто применением комбинированного экрана, состоящего из электропроводного и ферромагнитного слоев [2]. На рис. 1 представлен проводник радиуса r_1 с током IW, электропроводный экран (радиусы r_2 и r_3, удельная электропроводность γ_1) и ферромагнитный экран (радиусы r_3 и r_4, удельная электропроводность γ_2, магнитная проницаемость μ_c).

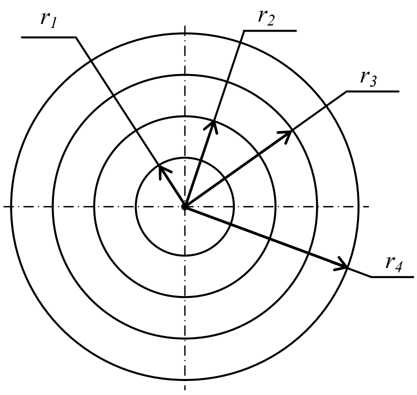

Рис. 1

Уравнения Максвелла для такой задачи имеют вид:

$$rot\overline{H}=\overline{j}+\gamma(r)\overline{E};\;\; rot\overline{E}=-\frac{\partial\overline{B}}{\partial t};\;\; \overline{H}=\frac{1}{\mu}\overline{B}\,.$$

В цилиндрической системе координат $\left(\overline{r_0},\ \overline{\varphi_0},\ \overline{z_0}\right)$ учтем, что вектор напряженности электрического поля имеет только z-составляющую, а векторы магнитного поля – только φ-составляющую, и запишем эти уравнения в комплексной форме (полагая электромагнитный процесс гармоническим):

$$\frac{1}{r}\frac{d\dot{H}}{dr}+\frac{d^2\dot{H}}{dr^2}=j+\gamma(r)\dot{E}=\frac{\dot{I}W}{\pi r_1^2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{|r-r_1|}{r-r_1}\right)+$$
$$+\frac{\gamma_1}{2}\left(\frac{|r-r_2|}{r-r_2}-\frac{|r-r_3|}{r-r_3}\right)\dot{E}+\frac{\gamma_2}{2}\left(\frac{|r-r_3|}{r-r_3}-\frac{|r-r_4|}{r-r_4}\right)\dot{E};$$

$$\frac{d\dot{E}}{dZ}=i\omega\dot{B};$$

$$\dot{H}=\frac{\dot{B}}{\mu}=\left[\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_c}-\frac{1}{\mu_0}\right)\left(\frac{|r-r_3|}{r-r_3}-\frac{|r-r_4|}{r-r_4}\right)\right]\dot{B}.$$

Здесь мы использовали разрывные функции для описания плотности тока j, удельной электропроводности $\gamma(r)$ и магнитной проницаемости $1/\mu$ всего пространства, содержащего наше устройство.

Подставляя $\dot{B}$ и $\dot{H}$ в первое уравнение, получим дифференциальное уравнение для напряженности электрического поля $\dot{E}$:

$$\frac{1}{i\omega}\left(\frac{d^2\dot{E}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\dot{E}}{dr}\right)\left[\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_c}-\frac{1}{\mu_0}\right)\left(\frac{|r-r_3|}{r-r_3}-\frac{|r-r_4|}{r-r_4}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{i\omega}\left(\frac{1}{\mu_c}-\frac{1}{\mu_0}\right)\left[\delta(r-r_3)-\delta(r-r_4)\right]\frac{d\dot{E}}{dr}=$$
$$=\frac{\dot{I}W}{\pi r_1^2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{|r-r_1|}{r-r_1}\right)+\frac{\gamma_1}{2}\left(\frac{|r-r_2|}{r-r_2}-\frac{|r-r_3|}{r-r_3}\right)\dot{E}+ \tag{1}$$
$$+\frac{\gamma_2}{2}\left(\frac{|r-r_3|}{r-r_3}-\frac{|r-r_4|}{r-r_4}\right)\dot{E}.$$

Разобьем дифференциальное уравнение (1) по слоям:

1) $r<r_1$; $\dfrac{1}{i\omega\mu_0}\left(\dfrac{d^2\dot{E}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\dot{E}}{dr}\right)=\dfrac{\dot{I}W}{\pi r_1^2}$;

2) $r_1<r<r_2$; $r>r_4$; $\dfrac{d^2\dot{E}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\dot{E}}{dr}=0$;

3) $r_2<r<r_3$; $\dfrac{1}{i\omega\mu_0}\left(\dfrac{d^2\dot{E}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\dot{E}}{dr}\right)-\gamma_1\dot{E}=0$;

4) $r_3<r<r_4$; $\dfrac{1}{i\omega\mu_c}\left(\dfrac{d^2\dot{E}}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d\dot{E}}{dr}\right)-\gamma_2\dot{E}=0$.

Решение уравнения 2) имеет вид:

$$\dot{E}=A_1\ln r+A_2\,.$$

Для области $r > r_3$ следует учесть, что при $r = r_0$ напряженность поля $E = 0$. Тогда общий вид решения для этой области определяется формулой

$$\dot{E} = A_1 \ln \frac{r}{r_0}.$$

Например, для трехфазной кабельной линии расстояние $r = r_0$ можно выбрать равным половине расстояния между соседними проводами (учитывая, что в каждый конкретный момент времени ток течет по одной фазе в прямом направлении, по другой (или двум другим) в обратном, следовательно, в средней точке между фазами $E \approx 0$).

Решение уравнения 1) также не представляет затруднений и имеет вид

$$\dot{E} = \frac{\dot{I}Wi\omega\mu_0}{4\pi r_1} \cdot r^2 + A_1 \ln r + A_2.$$

Из граничного условия для $r = 0$ следует, что $A_1 = 0$, тогда общий вид решения будет следующим:

$$\dot{E} = \frac{\dot{I}Wi\omega\mu_0}{4\pi r_1} \cdot r^2 + A_2.$$

Уравнения 3), 4) – это уравнения Бесселя, решение которых известно

$$\dot{E} = A_1 I_0(ar) + A_2 K_0(ar),$$

где $a = \sqrt{i\omega\mu_c\gamma}$; $I_0(ar)$, $K_0(ar)$ – модифицированные функции Бесселя.

Тогда общий вид решения дифференциального уравнения (1) может быть записан с использованием разрывных функций следующим образом:

$$\dot{E} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|r - r_1|}{r - r_1}\right) \cdot \left(\frac{\dot{I}Wi\omega\mu_0}{4\pi r_1^2} \cdot r^2 + A_1\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{|r - r_1|}{r - r_1} - \frac{|r - r_2|}{r - r_2}\right) \cdot (A_2 \ln r + A_3) +$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{|r - r_2|}{r - r_2} - \frac{|r - r_3|}{r - r_3}\right) \times [A_4 I_0(\alpha_1 r) + A_5 K_0(\alpha_1 r)] + \quad (2)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{|r - r_3|}{r - r_3} - \frac{|r - r_4|}{r - r_4}\right) \cdot [A_6 I_0(\alpha_2 r) + A_7 K_0(\alpha_2 r)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|r - r_4|}{r - r_4}\right) A_6 \ln \frac{r}{r_0}.$$

Подставляя (2) в дифференциальное уравнение (1) и приравнивая множители при одинаковых разрывных функциях, получим систему алгебраических уравнений:

1) $\delta(r - r_1)$; $\frac{1}{i\omega r_1\mu_0}\left(\frac{\dot{I}Wi\omega\mu_0}{4\pi r_1^2} \cdot r_1^2 + A_1\right) -$
$$-(A_2 \ln r_1 + A_3)\frac{1}{i\omega r_1\mu_0} + \frac{\dot{I}Wi\omega\mu_0}{4\pi r_1^2} \cdot r_1 \cdot \frac{1}{i\omega\mu_0} - \frac{A_2}{r_1} \cdot \frac{1}{i\omega\mu_0} = 0.$$

2) $\delta'(r - r_1)$; $\frac{1}{i\omega\mu_0}\left(\frac{\dot{I}Wi\omega\mu_0}{4\pi r_1^2} \cdot r_1^2 + A_1\right) = \frac{1}{i\omega\mu_0}(A_2 \ln r_1 + A_3)$,

т.е. $A_3 + A_2 \ln r_1 - A_1 = \frac{\dot{I}Wi\omega\mu_0}{4\pi}$.

3) $\delta(r - r_2)$; $\frac{1}{i\omega r_2\mu_0}[A_2 \ln r_2 + A_3 - A_4 I_0(\alpha_1 r_2) - A_5 K_0(\alpha_1 r_2)] +$
$$+ \frac{1}{i\omega\mu_0} \cdot \left[\frac{A_2}{r_2} - A_4\alpha_1 I_1(\alpha_1 r_2) + A_5\alpha_1 K_1(\alpha_1 r_2)\right] = 0.$$

4) $\delta'(r - r_2)$; $A_3 + A_2 \ln r_2 = A_4 I_0(\alpha_1 r_2) + A_5 K_0(\alpha_1 r_2)$.

5) $\delta(r - r_3)$; $\frac{1}{i\omega r_3}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_c}\right)[A_4 I_0(\alpha_1 r_3) + A_5 K_0(\alpha_1 r_3) -$
$$- A_6 I_0(\alpha_2 r_3) - A_7 K_0(\alpha_2 r_3)] - \frac{1}{i\omega}\left(\frac{1}{\mu_c} - \frac{1}{\mu_0}\right) \times$$
$$\times \frac{1}{2}[A_4\alpha_1 I_1(\alpha_1 r_3) - A_5\alpha_1 K_1(\alpha_1 r_3) +$$
$$+ A_6\alpha_2 I_1(\alpha_2 r_3) - A_7\alpha_2 K_1(\alpha_2 r_3)] + \frac{1}{i\omega}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_c}\right) \times$$
$$\times [A_4\alpha_1 I_1(\alpha_1 r_3) - A_5\alpha_1 K_1(\alpha_1 r_3) -$$
$$- A_6\alpha_2 I_1(\alpha_2 r_3) + A_7\alpha_2 K_1(\alpha_2 r_3)] = 0.$$

6) $\delta'(r - r_3)$; $\frac{1}{i\omega}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_c}\right)[A_4 I_0(\alpha_1 r_3) + A_5 K_0(\alpha_1 r_3) -$
$$- A_6 I_0(\alpha_2 r_3) - A_7 K_0(\alpha_2 r_3)] = 0.$$

7) $\delta(r - r_4)$; $\frac{1}{i\omega r_4}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_c}\right) \times$
$$\times \left[A_6 I_0(\alpha_2 r_4) + A_7 K_0(\alpha_2 r_4) - A_8 \ln \frac{r_4}{r_0}\right] +$$
$$+ \frac{1}{i\omega}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_c} - \frac{1}{\mu_0}\right) \times$$
$$\times \frac{1}{2}\left[A_6\alpha_2 I_1(\alpha_2 r_4) - A_7\alpha_2 K_1(\alpha_2 r_4) + \frac{A_8}{r_4}\right] +$$
$$+ \frac{1}{i\omega}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_c}\right) \times$$
$$\times \left[A_6\alpha_2 I_1(\alpha_2 r_4) - A_7\alpha_2 K_1(\alpha_2 r_4) - A_8 \frac{1}{r_4}\right] = 0.$$

8) $\delta'(r - r_4)$; $\frac{1}{i\omega}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_c}\right) \times$
$$\times \left[A_6 I_0(\alpha_2 r_4) + A_7 K_0(\alpha_2 r_4) - A_8 \ln \frac{r_4}{r_0}\right] = 0.$$

Из уравнений 1) – 8) находим:

1 $A_1 = A_3 - \frac{\dot{I}Wi\omega\mu_0}{4\pi} \cdot (1 - 2\ln r_1)$;

2 $A_2 = \frac{\dot{I}Wi\omega\mu_0}{2\pi}$;

3 $A_3 = A_4 \dot{I}_0(\alpha_1 r_2) + A_5 K_0(\alpha_1 r_2) - A_2 \ln r_2$;

4 $A_4 = \frac{\dot{I}Wi\omega\mu_0}{2\pi r_2\alpha_1 \dot{I}_1(\alpha_1 r_2)} + A_5 \frac{K_1(\alpha_1 r_2)}{\dot{I}_1(\alpha_1 r_2)}$;

$$
\begin{aligned}
&A_5\left[K_0(\alpha_1 r_3)+\dot I_0(\alpha_1 r_3)\frac{K_1(\alpha_1 r_2)}{\dot I_1(\alpha_1 r_2)}\right]+\\
&+\dot I_0(\alpha_1 r_3)\frac{\dot I Wi\omega\mu_0}{2\pi r_2\alpha_1\dot I_1(\alpha_1 r_2)}=A_6\dot I_0(\alpha_2 r_3)+A_7K_0(\alpha_2 r_3);
\end{aligned}\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_0}\alpha_1\left[A_4\dot I_1(\alpha_1 r_3)-A_5K_1(\alpha_1 r_3)\right]=\\
&=\frac{1}{\mu_c}\alpha_2\left[A_6\dot I_1(\alpha_2 r_3)-A_7K_1(\alpha_2 r_3)\right];
\end{aligned}\tag{6}
$$

$$
A_6\dot I_0(\alpha_2 r_4)+A_7K_0(\alpha_2 r_4)=A_8\ln\frac{r_4}{r_0};\tag{7}
$$

$$
\frac{1}{\mu_c}\left[A_6\alpha_2\dot I_1(\alpha_2 r_4)-A_7\alpha_2K_1(\alpha_2 r_4)\right]=\frac{A_8}{\mu_0}\frac{1}{r_4};\tag{8}
$$

$$
A_8=r_4\left[A_6\alpha_2\dot I_1(\alpha_2 r_4)-A_7\alpha_2K_1(\alpha_2 r_4)\right]\frac{\mu_0}{\mu_c};\tag{7'}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_6\left[\dot I_0(\alpha_2 r_4)-\frac{r_4\alpha_2\mu_0}{\mu_c}\dot I_1(\alpha_2 r_4)\ln\frac{r_4}{r_0}\right]+\\
&+A_7\left[K_0(\alpha_2 r_4)+\frac{r_4\alpha_2\mu_0}{\mu_c}K_1(\alpha_2 r_4)\ln\frac{r_4}{r_0}\right]=0;
\end{aligned}\tag{8'}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_5\left[K_0(\alpha_1 r_3)+I_0(\alpha_1 r_3)\frac{K_1(\alpha_1 r_2)}{I_1(\alpha_1 r_2)}\right]+\frac{I_0(\alpha_1 r_3)}{I_1(\alpha_1 r_2)}\frac{\dot I Wi\omega\mu_0}{2\pi r_2\alpha_1}=\\
&=A_6\left[I_0(\alpha_2 r_3)-K_0(\alpha_2 r_3)\frac{I_0(\alpha_2 r_4)-\frac{\mu_0}{\mu_c}r_4\alpha_2\dot I_1(\alpha_2 r_4)\ln\frac{r_4}{r_0}}{K_0(\alpha_2 r_4)+\frac{\mu_0}{\mu_c}r_4\alpha_2K_1(\alpha_2 r_4)\ln\frac{r_4}{r_0}}\right];
\end{aligned}\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1}{\mu_0}\left[\frac{\dot I Wi\omega\mu_0 I_1(\alpha_1 r_3)}{2\pi r_2\alpha_1 I_1(\alpha_1 r_2)}+A_5\left(\frac{K_1(\alpha_1 r_2)}{I_1(\alpha_1 r_2)}\dot I_1(\alpha_1 r_3)-K_1(\alpha_1 r_3)\right)\right]=\\
&=A_6\frac{\alpha_2}{\mu_{\tilde n}}\left[I_1(\alpha_2 r_3)+K_1(\alpha_2 r_3)\frac{I_0(\alpha_2 r_4)-\frac{\mu_0}{\mu_c}r_4\alpha_2\dot I_1(\alpha_2 r_4)\ln\frac{r_4}{r_0}}{K_0(\alpha_2 r_4)+\frac{\mu_0}{\mu_c}r_4\alpha_2K_1(\alpha_2 r_4)\ln\frac{r_4}{r_0}}\right];
\end{aligned}\tag{10}
$$

Подставляя числовые значения в эту систему уравнений, находим постоянные коэффициенты $A_1 - A_8$, а значит и решение (2). При этом следует иметь в виду, что модифицированные бесселевы функции I_0, I_1, K_0, K_1 от аргументов, у которых мнимая единица i стоит под корнем, определяются через функции Кельвина [3].

$$\alpha_1=\sqrt{i\omega\mu_0\gamma_1}=\sqrt{\omega\mu_0\gamma_1}\sqrt{i}=\alpha_1'\sqrt{i}\;;$$

$$\alpha_2=\sqrt{i\omega\mu_c\gamma_2}=\sqrt{\omega\mu_c\gamma_2}\sqrt{i}=\alpha_2'\sqrt{i}\;;$$

$$I_0\left(\alpha' r\sqrt{i}\right)=ber\alpha' r+ibei\alpha' r\;;$$

$$iI_1\left(\alpha' r\sqrt{i}\right)=ber_1\alpha' r+ibei_1\alpha' r\;;$$

$$K_0\left(\alpha' r\sqrt{i}\right)=ker\alpha' r+ikei\alpha' r\;;$$

$$i^{-1}K_1\left(\alpha' r\sqrt{i}\right)=ker_1\alpha' r+ikei_1\alpha' r\;.$$

Индукция магнитного поля определяется по формуле $\dot B=\dfrac{1}{i\omega}\cdot\dfrac{d\dot E}{dr}$. Например, перед электропроводящим слоем она равна $\dot B=\dfrac{A_2}{i\omega r_2}$, а непосредственно за ферромагнитным $\dot B=\dfrac{A_6}{i\omega r_4}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боев В.М. Разрывные функции в электротехнике. Расчет электромагнитного поля в тороидальной области // Вісник НТУ "ХПІ". – 2001. – №16. – С. 7-10.
2. Титко А.И. Электромагнитное экранирование незамкнутыми структурами в электрических машинах. – К.: Наукова думка, 1994. – 304 с.
3. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Пер. с англ. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

REFERENCES: ***1.*** Boev V.M. Discontinuous functions in electrical engineering. Calculation of the electromagnetic field in a toroidal region. *Visnyk NTU "KhPI" – Bulletin of NTU "KhPI"*, 2001, no.16, pp. 7-10. ***2.*** Titko A.I. *Elektromagnitnoe ekranirovanie nezamknutymi strukturami v elektricheskikh mashinakh* [Electromagnetic shielding of open structures in electrical machines]. Kyiv., Naukova Dumka Publ., 1994. 304 p. ***3.*** Dwight G.B. *Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly* [Tables of integrals and other mathematical formulas]. Moscow., Nauka Publ., 1977. 224 p.

Поступила (received) 24.06.2014

Боев Вячеслав Михайлович, д.т.н., проф.,
Национальный технический университет
"Харьковский политехнический институт",
61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21,
тел/phone +38 057 7076961

V.M. Boev
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
21, Frunze Str., Kharkiv, 61002, Ukraine

Electromagnetic field of a cable with a two-layer shield.

The paper presents electromagnetic field calculations for a coaxial cable with a double-layer shield. To describe the conductivity and permeability, discontinuous functions are applied, which makes it possible to solve the problem regarding the whole space containing the cable as a simply connected domain.

Key words – **electromagnetic field, coaxial cable, discontinuous functions.**