

# СХЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ВОЛН СДВИГА НА СИСТЕМЕ ОТВЕРСТИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

*А.М. Назаренко, Б.Е. Панченко*

Сумский государственный университет, Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины

Предложен параллельный алгоритм численного решения стационарных задач теории упругости на примере взаимодействия SH-волн с системой отверстий произвольного поперечного сечения. С помощью интегрального представления амплитуды перемещения отраженного волнового поля краевая задача сведена к системе интегральных уравнений, которая решается численно. Схема параллельных вычислений позволила исследовать ситуации с большим числом отражающих отверстий. Приведены новые численные результаты.

Parallel algorithm of numeral solution of theory of elasticity tasks by example of interaction SH-waves with system of apertures with arbitrary normal cross-section is offered. With the help of integral representation of amplitude of shift of reflected wave field the boundary task was reduced to the system of integral, equation which can be numerically solved. Scheme of parallel computing made it possible to research situations with big number of reflecting apertures. New numeric results are resulted.

## Введение

При оценивании ресурсов конструкций, которые содержат большое число неоднородностей и работают под действием динамических нагрузок, вызывает интерес анализ взаимодействия волн перемещений и напряжений в упругой среде с отверстиями или включениями. Поэтому изучение дифракции упругих волн на системах неоднородностей является актуальным. К тому же такие задачи малоисследованы вследствие необходимости привлечения больших объемов вычислений и значительных ресурсов цифровой памяти. Учитывая это особое значение приобретают эффективные параллельные алгоритмы, в основе которых лежат обоснованные аналитические методы [1].

Среди аналитических методов решения плоских и антиплоских задач теории дифракции следует отметить метод разложения в ряд по собственным функциям (в случае круговых неоднородностей) [2, 3], метод конформных отображений (в случае неоднородностей канонической формы) [4, 5], метод  $R$ -функций (в случае неоднородностей сложной геометрической формы) [6, 7], метод интегральных уравнений (в случае неоднородностей произвольной формы) [8, 9].

Значительный прогресс в теории дифракции достигнут именно благодаря эффективности метода интегральных уравнений [10–12]. Дополнительные преимущества этого метода заключаются в сокращении числа пространственных переменных и возможности применения различных эффективных численных методов решения интегральных уравнений [13, 14]. Кроме того, метод интегральных уравнений обладает большими возможностями при построении параллельных вычислительных схем. В настоящей работе разрабатывается параллельный алгоритм численного решения систем интегральных уравнений, возникающих при исследовании модельной задачи дифракции волн сдвига на системах цилиндрических полостей произвольного поперечного сечения.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим в неограниченной изотропной среде  $m$  бесконечных вдоль оси  $OZ$  полых цилиндров, поперечные сечения которых ограничены замкнутыми (без общих точек) контурами  $L_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  типа Ляпунова. Пусть  $L$  – совокупность указанных контуров и положительное направление выбрано так, что при движении вдоль  $L$  область  $D$  остается слева (рис. 1).

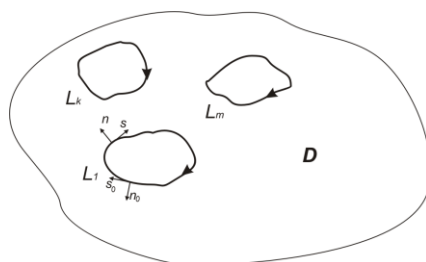


Рис. 1

Предположим, что источники внешнего поля перемещений  $W_0$  размещены в области  $D$ . В качестве такого источника может быть набегающая на цилиндры из бесконечности монохроматическая SH-волна, нормаль к фронту которой составляет угол  $\psi$  с осью  $OX$  ( $\tau = \text{const}$ ),

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_2(x \cos \psi + y \sin \psi)}, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2} \quad (1)$$

или гармонический источник интенсивности  $P$ , сосредоточенный в точке  $M_0(x_0, y_0)$  и порождающий поле перемещений [8]

$$W_0 = -\frac{P}{\mu} \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_2 r), \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (2)$$

Здесь  $c_2$  – скорость волны сдвига,  $\omega$  – частота колебаний,  $\mu$  – модуль сдвига,  $i$  – мнимая единица ( $i^2 = -1$ ),  $H_n^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля первого рода  $n$ -го порядка, зависимость от времени выражается множеством  $e^{-i\omega t}$ .

В результате взаимодействия приходящей волны с отверстиями возникает дифрагированное волновое поле. Обозначим  $W_1$  амплитуду отраженной волны сдвига. Тогда общее поле амплитуд перемещений равно  $W = W_0 + W_1$ . Неизвестная функция  $W_1$  должна удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца в области  $D$  с волновым числом  $\gamma_2$ :

$$\Delta W_1 + \gamma_2^2 W_1 = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3)$$

а также условием излучения на бесконечности типа Зоммерфельда [14].

На границе отверстий  $L$  нас будут интересовать касательные напряжения  $\sigma_{sz} = \tau_s e^{-i\omega t}$ ,  $\sigma_{nz} = \tau_n e^{-i\omega t}$ . В случае антиплоской деформации

$$\tau_s = \mu \frac{\partial W}{\partial s}, \quad \tau_n = \mu \frac{\partial W}{\partial n}, \quad (4)$$

где  $s$  – положительная касательная,  $n$  – нормаль в точке  $\zeta = \xi + i\eta \in L$  (рис. 1).

Пусть  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$  – точка  $L$ , в которой будем удовлетворять граничным условиям. Так как  $L$  – граница отверстий, то, очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial n_0} (W_0 + W_1)|_L = 0, \quad (5)$$

где  $n_0$  – нормаль к  $L$  в точке  $\zeta_0 \in L$ .

Таким образом, задача дифракции волны сдвига (1) или (2) на системе отверстий в неограниченной изотропной среде сводится к решению краевой задачи (3), (5) при выполнении дополнительных условий излучения на бесконечности.

## 2. Метод решения

Следуя [8], запишем функцию  $W_1(x, y)$ , характеризующую рассеянную отверстиями волну перемещений в области  $D$ , следующим образом:

$$W_1(x, y) = \int_L f(s) G(x, y, \xi, \eta) ds, \quad (6)$$

$$G = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_2 r), \quad r = |z - \zeta|, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L.$$

Здесь  $L$  – совокупность контуров  $L_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  (рис. 1);  $f(s)$  – неизвестная функция, удовлетворяющая на  $L$  условию Гельдера.

Интегральное представление (6) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3) в области  $D$  и обеспечивает выполнение условий излучения на бесконечности. Остается выполнить граничное условие (5). Для

осуществления предельного перехода в (5) при  $z \rightarrow \zeta_0 \in L$  частные производные  $\frac{\partial W}{\partial s_0}$  и  $\frac{\partial W}{\partial n_0}$  будем понимать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial s_0}|_L &= \left( e^{i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial z} + e^{-i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \\ \frac{\partial W}{\partial n_0}|_L &= -i \left( e^{i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial z} - e^{-i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \\ e^{i\phi_0} &= \frac{d\zeta_0}{ds_0}, \quad \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L. \end{aligned} \quad (7)$$

Воспользуемся также известными соотношениями [8]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma r) &= -\frac{\gamma}{2} e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r), \\ H_1^{(1)}(\gamma r) &= \frac{2}{i\pi\gamma r} + H_1(\gamma r), \quad z - \zeta = re^{i\alpha},\end{aligned}\quad (8)$$

где  $H_1(x)$  – непрерывная функция в точке  $x=0$ .

Привлечение формулы Сохоцкого – Племеля [14] для вычисления предельных значений интегралов типа Коши, возникающих при удовлетворении граничного условия (5) с учетом соотношений (6) – (8), приводит к искомому интегральному уравнению относительно неизвестной функции  $f(s)$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} f(s_0) + \int_L f(s) E(s, s_0) ds &= K_n(s_0), \quad n = 1, 2, \\ E(s, s_0) &= \gamma_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0) \sin(\alpha_0 - \phi_0), \quad \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}, \\ K_1(s_0) &= i\gamma_2 W_0(s_0) \sin(\psi - \alpha_0), \quad K_2(s_0) = -\frac{P}{\mu} \gamma_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_{10}) \sin(\alpha_{10} - \phi_0), \\ \zeta_0 - z_0 &= r_{10} e^{i\alpha_{10}}, \quad z_0 = x_0 + iy_0.\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь функции  $K_1(s_0)$  и  $K_2(s_0)$  отвечают случаям (1) и (2), соответственно.

Представим ядро  $E(s, s_0)$ , учитывая (8), в виде:

$$E(s, s_0) = \frac{2}{\pi i} \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\phi_0}}{\zeta - \zeta_0} \right\} + \gamma_2 H_1(\gamma_2 r_0) \sin(\alpha_0 - \phi_0). \quad (10)$$

Нетрудно убедиться [14], что функция  $E(s, s_0)$  непрерывна на  $L$ . Следовательно, интегральное уравнение (9) является уравнением Фредгольма второго рода, которое как известно, разрешимо и имеет единственное решение в классе функций, непрерывных по Гельдеру.

### 3. Дискретизация задачи

Представим неизвестную плотность  $f(s)$  интегрального уравнения (9) как совокупность функций  $f_j(s_j)$ , определенных на контурах  $L_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Тогда (9) превращается в систему интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода:

$$\frac{1}{2} f_k(s_{k0}) + \sum_{j=1}^m \int_L f_j(s_j) E(s_j, s_{k0}) ds_j = K_n(s_{k0}), \quad k = \overline{1, m}, \quad n = 1, 2. \quad (11)$$

Здесь дуговые координаты  $s_j$  и  $s_{k0}$  относятся к точкам  $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j \in L_j$  и  $\zeta_{k0} = \xi_{k0} + i\eta_{k0} \in L_k$  соответственно.

Численная реализация интегральных уравнений (11) проводилась методом механических квадратур [14]. Вводилась параметризация контура  $L_j$  с помощью соотношений

$$\zeta_j = \zeta_j(\beta), \quad \zeta_{j0} = \zeta_{j0}(\beta_0), \quad 0 \leq \beta, \beta_0 < 2\pi, \quad (12)$$

причем  $\zeta_j(0) = \zeta_j(2\pi)$ . Интегральное уравнение, соответствующее контуру  $L_k$ , удовлетворялось в узлах вида  $\beta_l = \pi(2l-1)/n_k$  ( $l = \overline{1, n_k}$ ) и сводилось к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции  $f_j(\beta)$  в узлах вида  $\beta_p = \pi(2p-1)/n_j$  ( $p = \overline{1, n_j}$ ), где  $n_j$  – число точек разбиения контура  $L_j$ . Внеинтегральные значения  $f_k(\beta_l)$  выражались с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа через искомые значения  $f_k(\beta_p)$ . Для них получены следующие выражения [8]:

$$f_k(\beta_l) = \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} (-1)^{n_k+p} f_k(\beta_p) \cos ec \frac{\beta_l - \beta_p}{2}, \quad (13)$$

если  $n_k$  – нечетно, и

$$f_k(\beta_l) = \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} (-1)^{n_k+p} f_k(\beta_p) ctg \frac{\beta_l - \beta_p}{2}, \quad (14)$$

если  $n_k$  – четно.

Таким образом, при численной реализации системы интегральных уравнений (8) задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_m$  неизвестными.

#### 4. Схема вычислений

Пусть система интегральных уравнений сведена к системе линейных алгебраических уравнений, все элементы матрицы которой являются результатом дискретизации контуров. Очевидно, размер матрицы пропорционален числу отверстий. Для исследования описанного метода при большом числе отверстий, а также для получения высокоточных результатов с погрешностью вычислений до  $10^{-6}$  и проверки сходимости решений при большом числе точек коллокации потребуются существенные вычислительные ресурсы. Применим распараллеливание алгоритма. Из (11) следует, что каждый элемент матрицы определяется координатами узлов дискретизации.

Как показано на рис. 2, данный метод в вычислительном смысле сводится к обходу каждого контура по точкам коллокации внеинтегральной переменной  $\zeta_{k0}$  и одновременному обходу каждого контура по аналогичным либо иным узлам переменной интегрирования  $\zeta_k$ .

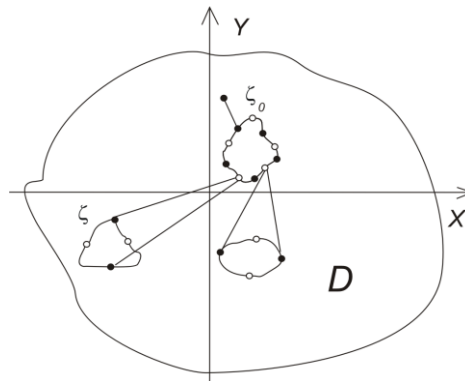


Рис. 2

Важной особенностью алгоритма такого обхода является то, что результирующая матрица строится в соответствии с отношением „многие ко многим” и формально является результатом Декартова произведения этих множеств [15].

Это означает, что все элементы матрицы формально независимы один от другого, что не строго доказывает возможность применения параллельного вычисления.

Таким образом, переменная  $\zeta_{k0}$  формирует строки матрицы СЛАУ, а переменная  $\zeta_k$  – ее столбцы. Диагональные элементы матрицы соответствуют коэффициентам системы, вычисленным в общих узлах для  $\zeta_{k0}$  и  $\zeta_k$  отверстий. Иные коэффициенты вычисляются так, что значения  $\zeta_{k0}$  принадлежат множеству точек коллокации с одних контуров, а значения переменных интегрирования  $\zeta_k$  – с других.

Распараллеливание вычислительного алгоритма может быть осуществлено для основных четырех процессов – варьирование группами исходных данных, вычисление коэффициентов системы линейных уравнений, численное решение СЛАУ и вычисление искомых характеристик дифрагированного поля по полученным после решения СЛАУ функциям. Наиболее емким с точки зрения временных затрат и ресурсов памяти являются второй и третий процессы. Для параллельного формирования матрицы СЛАУ вычислительный алгоритм сведется к двум основным процедурам. Первая формирует массив параметрических координат контуров всех отверстий, который является своеобразной базой данных для формирования клонов. При этом для обеспечения равномерной загрузки хоста кластерной системы исходный массив дробится пропорционально числу используемых процессоров.

Так как для данной методики решения краевой задачи основная операция при вычислении каждого элемента матрицы – это определение разностного аргумента цилиндрических функций Ханкеля, заданного на множестве значений параметрических координат отверстий, а также вычисление самих этих функций и коэффициентов при них, то на следующем шаге на каждом клоне хоста запускаются цикловые процедуры определения указанных коэффициентов. При этом синхронизация каждого процесса не требуется, так как итоговая матрица собирается по факту завершения последнего.

Вычислительный процесс решения СЛАУ также распараллеливается согласно [16]. Параллельное вычисление итоговых искомых характеристик осуществляется путем подстановки массивов значений неизвестных функций  $f_k(\beta_p)$  в представление (6) аналогично процедурам формирования матрицы СЛАУ.

#### 5. Численные результаты

С целью исследования сходимости построенного алгоритма рассмотрим случай нормального падения ( $\psi=\pi/2$ ) волны сдвига (1) на систему эллиптических отверстий, расположенных вдоль одной линии на одинаковом расстоянии  $d$  один от другого (рис. 3).

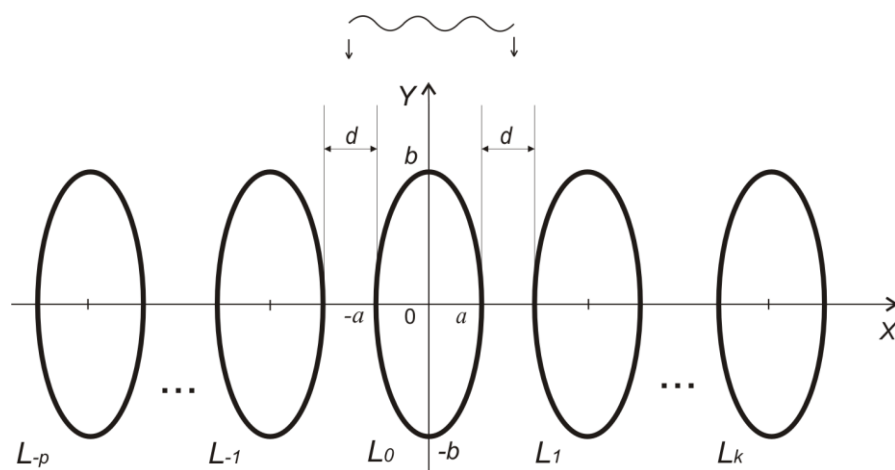


Рис. 3

Предполагаем, что основной эллипс  $L_0$  задается уравнением

$$\xi(\beta) = a \sin \beta, \quad \eta(\beta) = -b \cos \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (15)$$

В этом случае рассматриваемая дифракционная задача обладает свойством симметрии, что позволяет осуществлять первичное самотестирование получаемых результатов.

В ходе численной реализации вычислялись безразмерные контурные напряжения  $\sigma_\beta = \tau_s / \mu$ . Точность вычислений проверялась путем сравнения результатов при различных значениях  $N$ . Проводилось также сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [5, 8] для случая одиночного отверстия.

Применение метода параллельных вычислений, проведенного на кластере «Инпарком-256», позволило исследовать сходимость до  $10^{-6}$  порядка. Обнаружено, что сходимость решения интегрального уравнения практически не зависит от числа отражателей. При наличии 100 отверстий общее время решения системы линейных уравнений для матрицы размерностью порядка  $10^6$  (для одного варианта) с использованием 256 процессоров составляло около 2 часов. Решение аналогичной задачи процедурным методом для 10 отражателей (использование типовых вычислительных средств с точностью до  $10^{-3}$  – 500 точек коллокации) осуществлялось несколько суток. При симметричном нагружении наблюдается эффект насыщения решетки уже при 9–10 отверстиях (при дальнейшем увеличении числа отверстий контурные напряжения практически не меняются).

В работе проводились вычисления контурных напряжений  $\sigma_\beta$  вдоль контуров центрального  $L_0$  и крайнего  $L_k$  отверстий (рис. 3) в случае решетки, состоящей из нечетного числа отверстий ( $p=k$ ). Отсчет угла  $\beta$  ведется от нуля (тенивая точка) до  $\pi$  (лобовая точка) для центрального отверстия (учитывается симметрия в случае нормального распределения волны сдвига (1)) и от 0 до  $2\pi$  – для крайнего отверстия (в силу симметрии распределения напряжений на контурах  $L_k$  и  $L_{-k}$  одинаковы).

Анализ показывает, что существует принципиальное отличие в распределении  $\sigma_\beta$  при набегающей SH-волны (1) на решетку, состоящую из вытянутых вдоль оси  $Ox$  эллипсов ( $b/a < 1$ ), от случая решетки, вытянутой навстречу волне ( $b/a > 1$ ). Если в первом случае ( $b/a < 1$ ) распределение  $\sigma_\beta$  является монокстремальным [5, 8] (максимальное значение – в точках соскальзывания  $\beta = \pi/2$  и  $\beta = 3\pi/2$ ), то во втором случае, начиная с некоторого значения  $b/a > 1$ , появляется несколько локальных максимумов. Поэтому в работе рассматривается случай эллипсов, вытянутых навстречу набегающей волне, при этом выбирается значение  $b/a = 2.5$ .

На рис. 4 показаны распределения  $\sigma_\beta$  вдоль контура центрального отверстия  $L_0$  в случае решетки, состоящей из трех (кривая 1), пяти (кривая 2) и семи (кривая 3) эллипсов, при значениях безразмерного волнового числа  $\gamma_2 a$ , равных 1.7 (а) и 2.5 (б). Если в теневой ( $\beta = 0$ ) и лобовой ( $\beta = \pi$ ) точках  $\sigma_\beta = 0$ , то в зоне соскальзывания с увеличением  $\gamma_2 a$  число локальных максимумов  $\sigma_\beta$  также увеличивается, причем растет и максимальное значение  $\sigma_\beta$ .

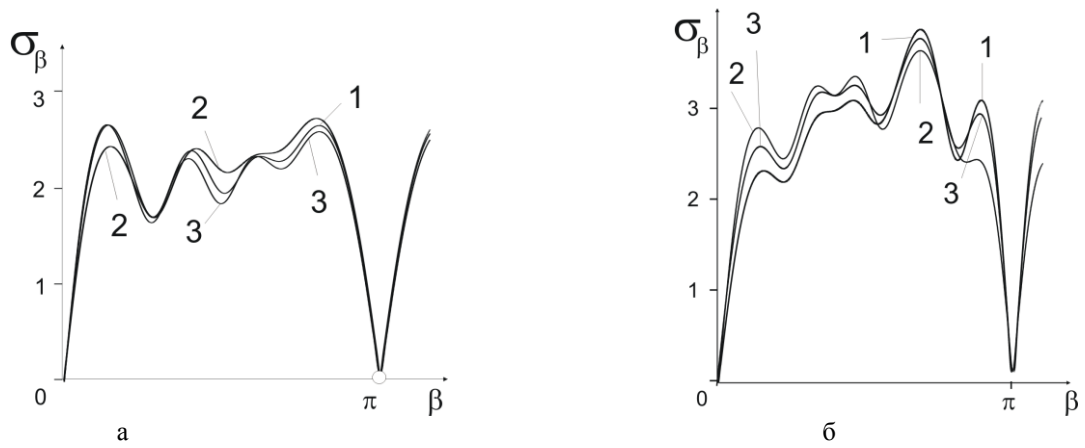


Рис. 4.  $\gamma_2 a = 1.7 - a$ ;  $\gamma_2 a = 2.5 - б$

На рис. 5 показано аналогичное распределение  $\sigma_\beta$  вдоль контура крайнего отверстия. Здесь наблюдаются локальные минимумы в теневой ( $\beta = 0$ ) и лобовой ( $\beta = \pi$ ) точках. Число локальных максимумов в зоне соскальзывания с увеличением  $\gamma_2 a$  также увеличивается. Максимальное значение  $\sigma_\beta$  растет с увеличением  $\gamma_2 a$ .

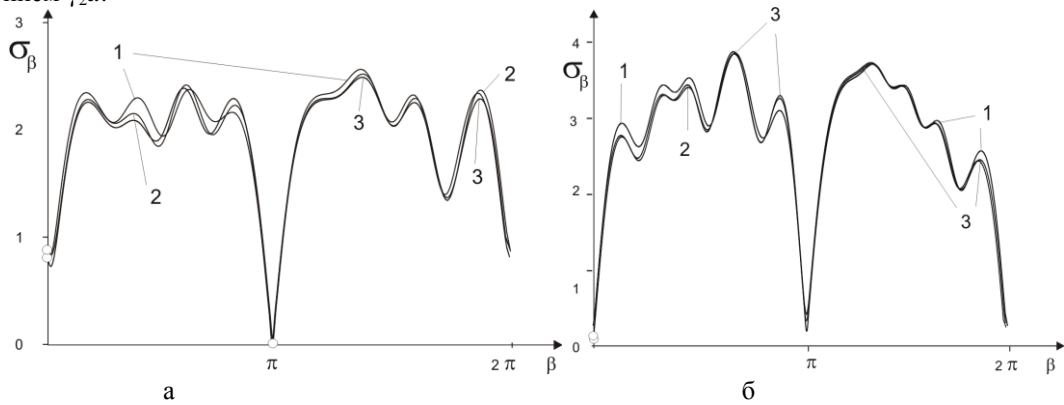


Рис. 5.  $\gamma_2 a = 1.7 - a$ ;  $\gamma_2 a = 2.5 - б$

Рис. 6, 7 иллюстрируют отклонение максимальных значений  $\sigma_\beta$  на контуре центрального (рис. 6) и крайнего (рис. 7) отверстий от максимального значения  $\sigma_\beta^{(0)}$  на контуре одиночного включения в зависимости от параметра решетки  $d$  (рис. 3) при  $b/a=2.5$ ,  $\gamma_2 a=5.0$  в случае симметричного нагружения SH-волной (1). Для этого по аналогии с [12] на данных рисунках представлены величины  $\sigma_\beta^* = \max \sigma_\beta - \max \sigma_\beta^{(0)}$ . Здесь рассмотрены случаи трех и семи (рис. 6 а, б) отверстий в решетке. Как и следовало ожидать, растягивание решетки приводит к уменьшению значений  $\sigma_\beta^*$  и стабилизации пульсаций этих значений на нулевом уровне при достаточно больших  $d$ . Причем с увеличением волнового числа  $\gamma_2 a$  стабилизация пульсаций разности  $\sigma_\beta^*$  достигается при бóльших значениях параметра решетки  $d$ .

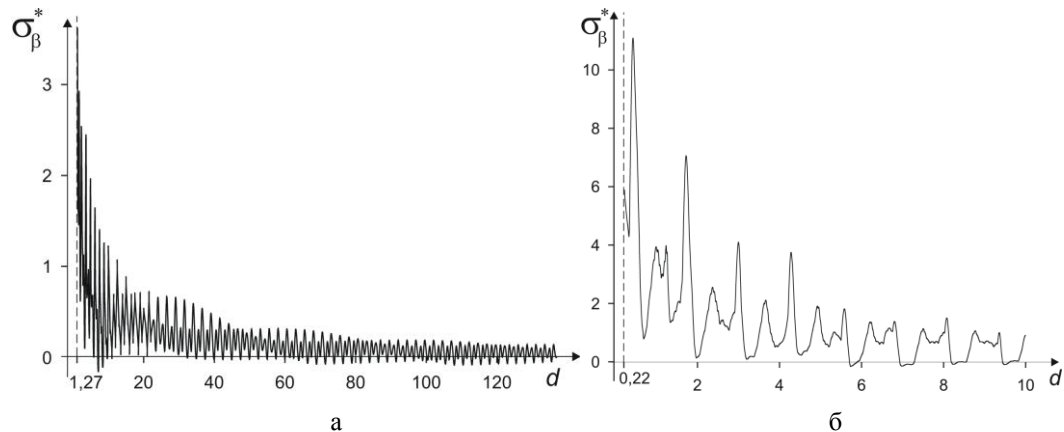


Рис. 6.  $m=3 - a$ ;  $m=7 - б$

Известно [2], что для установившихся колебаний при сколь угодно больших значениях расстояния между объектами, вблизи объектов все же наблюдается незначительное влияние решетки. Графики, показаны на рис. 6, 7, иллюстрируют слабые пульсации значений  $\sigma_{\beta}^*$  вблизи нуля. Этим подтверждается достоверность используемого алгоритма.

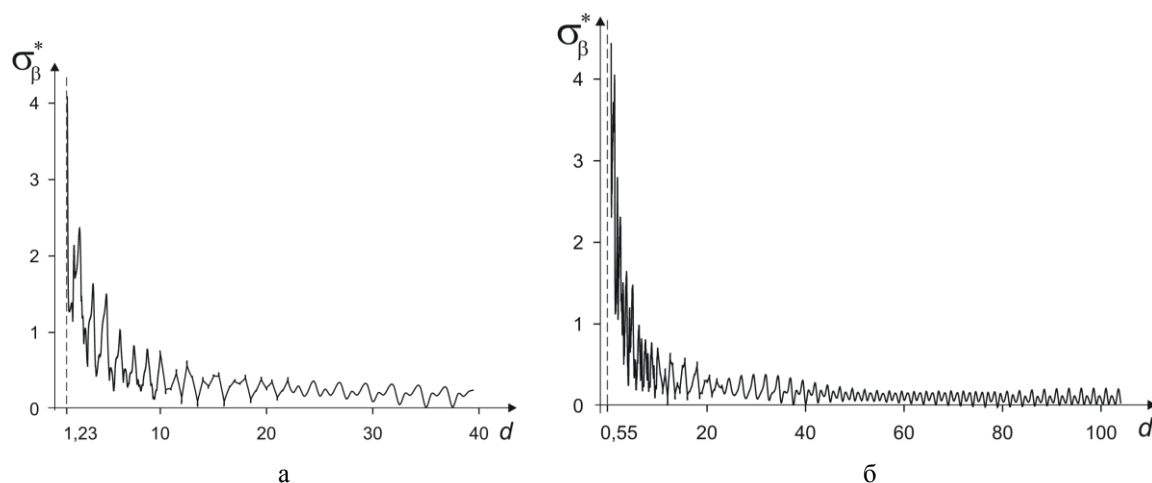


Рис. 7.  $m=3$  – а;  $m=7$  – б

## Выводы

Для задачи дифракции сдвиговых волн на системе отверстий некруговой формы параллельные алгоритмы позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля. Это очень важно, так как получение точных величин резонансных максимумов контурных напряжений, а также точных координат дислокации резонансных максимумов, позволит избежать разрушений конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок. Все это требует использования увеличенного числа вариантов исходных данных. Сочетание же метода интегральных уравнений, позволяющего на единицу снизить размерность задачи, а также значительная экономия времени вычислений за счет распараллеливания вычислительных процедур, приводит к существенному увеличению эффективности предложенного алгоритма.

1. Вертгайм И.И., Терпигуров В.Н. Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ.: Учебное пособие. – Пермь, 2007. – 84 с.
2. Гузь А.Н., Головач В.Т. О решении основных граничных задач теории установившихся колебаний для бесконечной плоскости с круговыми отверстиями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 2. – С. 58 – 64.
3. Pao Y.H., Mow C.C. The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration. – New York: Crane Rassak Co, 1973. – 689 p.
4. Datta S.K. Diffraction of SH-waves by an elliptic cylinder // Int. J. Solid Struct. – 1974. – **10**, № 1. – P. 123 – 133.
5. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 307 с.
6. Рвачев В.Л. Теория R-функций. – Киев: Наук. думка, 1982. – 556 с.
7. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Сизова Н.Д. Исследование дифракции упругих волн на пластинах, ослабленных двумя отверстиями произвольной формы // ДАН. Математическая физика. – 1996. – **349**, № 2. – С. 175 – 179.
8. Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Дифракция волн сдвига на цилиндрических неоднородностях произвольного поперечного сечения // Динамика и прочность машин. Респ. межвед. научно-техн. сб. – 1991. – Вып. 52. – С. 38 – 45.
9. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119 – 127.
10. Назаренко А.М. Дифракция волн сдвига на цилиндрических включениях и полостях в упругом полупространстве // Проблемы прочности. – 1990. – № 11. – С. 90 – 94.
11. Feng Y.D., Wang Y.S., Zhang Z.M. Time domain BEM analysis of cylinder embedded in soil with frictional slip at the interface // Soil Dyn. Earthquake Eng. – 2003. – **23**, №4. – P. 303-311.
12. Кюркчан А.Г., Скородумова Е.А. Решение трехмерной задачи дифракции волн на группе объектов // Акустический журнал. – 2007. – **53**, № 1. – С. 5 – 14.
13. Габдулхаев Б.Г. К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 2. – С. 23 – 39.
14. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.
15. Курош А.Г. Общая алгебра. – М.: 1979. – 159 с.
16. Химич А.М., Полянок В.В. Эффективность двумерных блочно-циклических параллельных алгоритмов // Проблемы програмування. – 2008. – № 3. – С. 145 – 149.