

## МЕТОД ПРОГРАМНОГО ПРОЕКТУВАННЯ НАЙЩІЛЬНІШИХ РЕШІТЧАСТИХ УКЛАДОК

*В.І. Чупринка, О.В. Чебанюк*

Київський національний університет технологій і дизайну,  
01011, Київ-11, вул. Немировича-Данченка, 2, тел. (044) 256 84 65,  
bagire@i.ua

Запропонована математична модель та метод визначення найщільнішої укладки для двох видів плоских геометричних об'єктів, що мають довільну конфігурацію зовнішніх контурів. Визначений критерій існування щільних решітчастих укладок для двох видів плоских геометричних об'єктів.

The math model and the method of defining the thickest packing for two kinds of flat geometrical objects, which have any outside contours configuration, is proposed in this work. The criteria of defining the thickest packing for two kinds of flat geometrical objects is defined.

### Вступ

Ефективність спроектованої розкрійної схеми визначає відсоток використання матеріалу. Важливим показником, який впливає на відсоток використання матеріалу, є величина міжшаблонних відходів. Це величина, яка дозволяє оцінити відходи, що утворюються за рахунок того, що плоскі геометричні об'єкти, розташовані на розкрійній схемі поряд, не завжди щільно прилягають один до одного у всіх границях контурів об'єктів (ділянки сірого кольору на рис. 1).

Для оцінки міжшаблонних відходів розкрійних схемах решітчастого розміщення плоских геометричних об'єктів визначаються не заповнені ділянки схеми, у паралелограмах, які побудовані на векторах решітки.

Традиційно розкрійні схеми будуються для плоских геометричних об'єктів, що мають однакову конфігурацію зовнішніх контурів. Але, сумішивши плоскі геометричні об'єкти, які мають різні конфігурації зовнішніх контурів, можна визначити такі варіанти їх положення на матеріалі при яких відсоток укладки буде вищий, ніж при суміщенні однотипних деталей.

Відомі методи, наприклад [1], визначають найщільнішу укладку шляхом перебору множини допустимих решіток, та вибору серед них тієї, яка забезпечує мінімальну площу паралелограма, який побудований на її векторах. Такі алгоритми мають велику обчислювальну складність та не дають гарантії, що знайдений розв'язок є найкращим.

Тому розробка методу аналітичного визначення найщільнішої укладки для плоских геометричних об'єктів, що мають різні конфігурації зовнішніх контурів є актуальною задачею. Практичний аспект – це вибір схеми, яка дозволяє мінімізувати величину міжлекальних відходів при проектуванні нової моделі певного виробу.

У роботі запропонований метод пошуку найщільнішої укладки для двох видів плоских геометричних об'єктів, що мають довільну (однакову або різну) конфігурацію зовнішніх контурів. Представлений метод базується на математичній моделі визначення взаємного положення плоских геометричних об'єктів на площині.

### Решітчасті укладки

Розглянемо на площині два типи об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ , що мають довільну (однакову або різну) конфігурацію зовнішніх контурів (рис. 1).

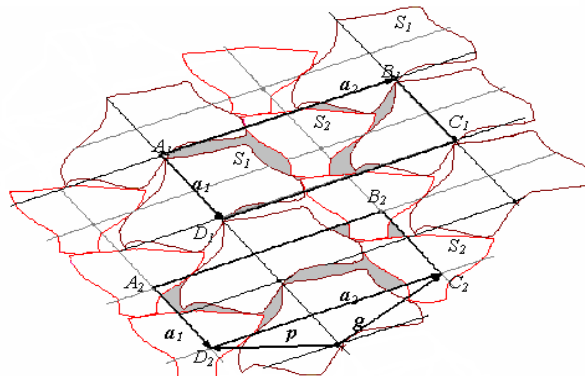


Рис. 1. Щільна укладка для двох видів плоских геометричних об'єктів

Позначимо  $intS=S-S^\wedge$ , де  $S^\wedge$  – границя об'єкта  $S$ . Якщо виконуються умови:

$$intS_1 \cap intS_2=0 \text{ та } S_1 \cap S_2 \neq 0, \quad (1)$$

то об'єкти  $S_1$  та  $S_2$  називаються щільно розміщеними.

Щільно розміщені об'єкти не мають спільних внутрішніх точок, але обов'язково мають спільні граничні точки.

Система об'єктів  $S_i, i=1, \dots, p$ , утворює на площині укладку, якщо для кожної пари об'єктів із цієї системи виконуються умови їх взаємного неперетину:

$$intS_n \cap intS_m=0, \quad n, m=1, \dots, p, \quad (2)$$

та для будь-якої пари об'єктів  $S_i$  та  $S_q, i=1, \dots, p$  знайдеться хоча б один об'єкт, де  $q, i \in \{1, \dots, p\}, p \neq i$ , який дотикається до об'єкта  $S_i$ .

Позначимо  $S+a$  об'єкт, який можна отримати переміщенням кожної точки об'єкта  $S$  на вектор  $a$  та назовемо його трансляцією об'єкта  $S$ .

Множину векторів вигляду

$$r=na_1+ma_2, \text{ де } n, m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm k, \dots, \quad (3)$$

де  $a_1(a_{1x}, a_{1y}), a_2(a_{2x}, a_{2y})$  – лінійно-незалежні вектори, назовемо решіткою з базисом  $a_1, a_2$  та позначимо  $A=A(a_1, a_2)$ .

Множину векторів виду  $r_1=na_1+ma_2$  та  $r_2=na_1+ma_2+g$ , де  $n, m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm k, \dots$ , (4)

де  $a_1, a_2$  – лінійно-незалежні вектори, назовемо подвійною решіткою з базисом  $a_1, a_2$  і вектором зсуву решітки  $g$  та позначимо  $W=W(a_1, a_2, g)$ . Абсолютна величина визначника, який складений із базових векторів подвійної решітки, називається визначником решітки та позначається  $\det W$ .

Розглянемо систему об'єктів  $\bigcup_{n,m} S_1^{nm}$  та  $\bigcup_{n,m} S_2^{nm}$ , де  $n, m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm k, \dots$ , які складаються із трансляції  $S_1^{nm}=S_1+na_1+ma_2$  та  $S_2^{nm}=S_2+na_1+ma_2+g$ , об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  на вектори подвійної решітки  $W=W(a_1, a_2, g)$ . Якщо ця система є укладкою, то така укладка називається укладкою об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ , виконаної за подвійною решіткою  $W=W(a_1, a_2, g)$ . Подвійна решітка  $W=W(a_1, a_2, g)$  у цьому випадку є допустимою для укладки об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ . Вона представляє собою дві однакові одинарні решітки  $A_1=A(a_1, a_2)$  та  $A_2=A(a_1+g, a_2+g)$ , які зміщені одна щодо іншої на вектор зсуву решітки  $g$ . У вузлах решітки  $A_1$  розміщаються об'єкти  $S_1$ , а у вузлах решітки  $A_2$  – об'єкти  $S_2$ .

Абсолютна величина визначника, який складений із векторів решітки, називається визначником решітки  $W$  та позначається  $\det W$ , де

$$\det W = |[\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2]| = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} \\ a_{2x} & a_{2y} \end{vmatrix} = |a_{1x}a_{2y} - a_{2x}a_{1y}|. \quad (5)$$

Щільність  $\delta_s(W)$  решітчастої укладки можна характеризувати за допомогою співвідношення:

$$\delta_s(W) = (|S_1| + |S_2|) / \det W, \quad (6)$$

де  $|S_1|$  та  $|S_2|$  – відповідно площі плоского геометричного об'єкта  $S_1$  та  $S_2$ ,  $\det W$  – визначник решітки  $W=W(a_1, a_2, g)$ , за якою виконана укладка. З наведеного співвідношення видно, що щільність  $\delta_s(W)$  решітчастої укладки тим вища, чим менша площа паралелограма, сторонами якого є базові вектори решітки  $a_1$  та  $a_2$ .

### Постановка задачі аналітичного визначення найщільнішої укладки

*Математична постановка задачі.*

Є два плоскі геометричні об'єкти  $S_1$  та  $S_2$ , які мають різну або однакову конфігурацію зовнішніх контурів, що розташовані на схемі під кутами  $\alpha$  та  $\beta$ . Позначимо таке розташування  $S_1(\alpha)$  і  $S_2(\beta)$ .

Серед множини всіх можливих подвійних решітчастих укладок  $W=W(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g})$  для плоских геометричних об'єктів  $S_1(\alpha)$  і  $S_2(\beta)$  із щільністю укладки  $\delta_s(W)$  знайти таку  $W^*=W(\vec{a}_1^*, \vec{a}_2^*, \vec{g}^*)$ , в якій щільність  $\delta_s(W^*)$  подвійної укладки багатокутників  $S_1(\alpha)$  та  $S_2(\beta)$  (рис. 2), виконаної за цією решіткою задовольняла би співвідношенню:

$$\delta_s(W^*) = \max_w \delta_s(W) = \max_w \frac{|S_1| + |S_2|}{S_{ABCD}} = \max_w \frac{|S_1| + |S_2|}{\det W} = \max_w \frac{|S_1| + |S_2|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \max_w \frac{|S_1| + |S_2|}{|a_{1x}a_{2y} - a_{1y}a_{2x}|}. \quad (7)$$

У даному випадку  $\vec{a}_1 = \overline{AD} = \{a_{1x}, a_{1y}\}$ ,  $\vec{a}_2 = \overline{AB} = \{a_{2x}, a_{2y}\}$ ,  $\vec{g} = \overline{AE} = \{g_x, g_y\}$ ,  $|S_1|$  та  $|S_2|$  – площі плоских геометричних об'єктів.

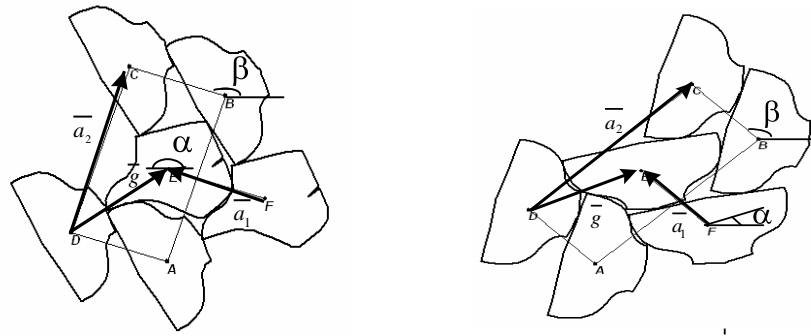


Рис. 2. Приклади щільних укладок

*Технологічна постановка задачі.*

Серед множини щільних укладок для двох плоских геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$ , що мають довільну конфігурацію зовнішніх контурів, обрати таку, яка задовольняє співвідношенню (7), врахувавши технологічні вимоги та обмеження. Такі вимоги можуть накладатися головним напрямком анізотропії плоских геометричних об'єктів чи матеріалу або необхідною величиною міжшаблонного містка. Тоді множина всіх можливих решіток визначається з урахуванням тільки тих варіантів положень плоских геометричних об'єктів, які допускаються технологічними обмеженнями.

**Математична модель задачі проектування найщільнішої решітчастої укладки**

У задачі побудови найщільнішої решітчастої укладки можна виділити наступні структурні компоненти:

- аналітичне представлення інформації про зовнішні контури розміщуваних плоских геометричних об'єктів;
- параметри, що визначають положення плоских геометричних об'єктів на площині;
- аналітичний опис умов взаємного неперетину плоских геометричних об'єктів в укладці;
- аналітичний опис системи суміщення плоских геометричних об'єктів в укладці;
- математичний опис множини допустимих розв'язків задачі;
- аналітичне представлення функції цілі.

Далі наведемо опис кожного з виділених компонентів.

**Аналітичний опис зовнішнього контуру плоского геометричного об'єкта та його положення на площині.**

Для представлення плоского геометричного об'єкта на площині слід обрати спосіб, який не накладає обмежень на складність конфігурації зовнішнього контуру об'єкта та дозволяє однозначно відобразити його положення на площині. Цим вимогам задовольняє метод кусково-лінійної апроксимації. Тоді плоский геометричний об'єкт  $S$  представляється на площині, замкнений багатокутником  $S_m$ , вершини якого сполучаються відрізками. Для однозначного визначення зовнішнього контуру багатокутника  $S_m$  достатньо знати координати вершин  $A_i(X_i, Y_i)$ , де  $i = 1, 2, \dots, n$  та  $X_1 = X_n, Y_1 = Y_n$  (рис. 3).

Тоді координати будь-якої точки  $Q(xq, yq)$  на стороні  $A_i A_{i+1}$  зовнішнього контуру апроксимуючого багатокутника можна представити наступним чином [3]:

$$\begin{cases} xq = (X_{i+1} - X_i)t_i + X_i \\ yq = (Y_{i+1} - Y_i)t_i + Y_i \end{cases}, \text{ де } i=1, 2, \dots, n-1 \text{ та } t_i \in [0,1]. \quad (8)$$

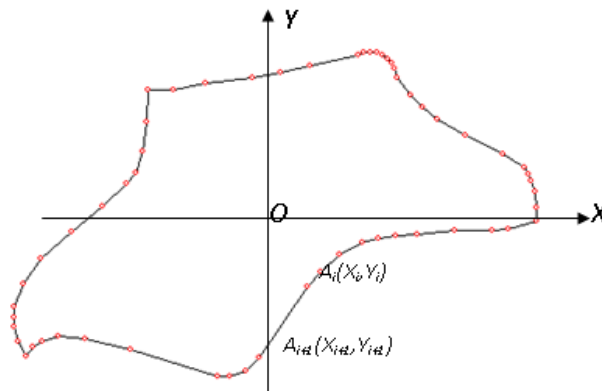


Рис. 3. Представлення деталі за допомогою кусково-лінійної апроксимації на площині

**Параметри, які визначають положення плоских геометричних об'єктів на площині.** Для однозначного відображення положення плоского геометричного об'єкта  $S$  на площині необхідно знати тип деталі, координати полюсу плоского геометричного об'єкта  $(X_{pk}, Y_{pk})$  в системі координат  $XOY$ , що пов'язана з площиною, та кут повороту плоского геометричного об'єкта щодо його вихідного положення  $\theta_k$  (рис. 4).

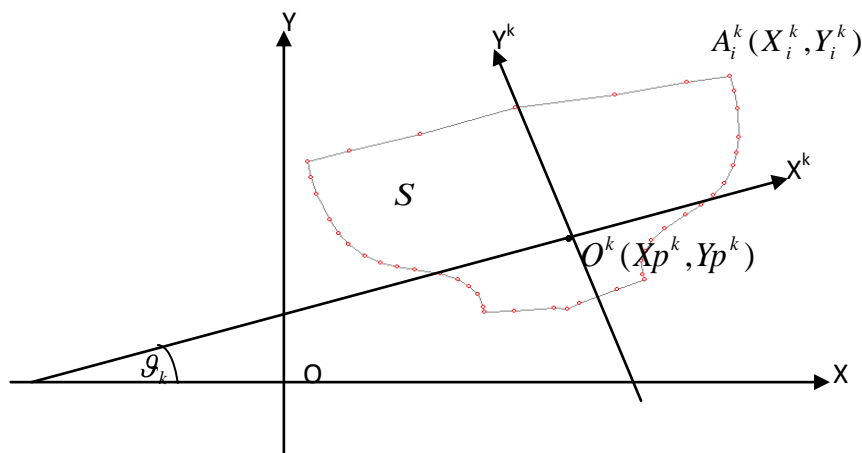


Рис. 4. Параметри, що однозначно визначають положення плоского геометричного об'єкта  $S$  на площині

Тоді координати будь-якої вершини  $A_{ik}(i=1, 2, \dots, n)$  апроксимуючого багатокутника для плоского геометричного об'єкта  $S$  в системі координат  $XOY$ , що пов'язана із площиною, визначатимуться таким чином :

$$\begin{cases} X_i^k = X_i \cos \theta_k - Y_i \sin \theta_k + X_{pk}^k, \\ Y_i^k = X_i \sin \theta_k + Y_i \cos \theta_k + Y_{pk}^k. \end{cases} \quad (9)$$

Координати будь-якої точки  $Q_k(xq^k, yq^k)$  на стороні  $A_i A_{i+1}$  зовнішнього контуру апроксимуючого багатокутника в системі координат  $XOY$ , що пов'язана із площиною  $XOY$ , можна представити таким чином:

$$\begin{cases} xq^k = (X_{i+1}^k - X_i^k)t_i + X_i^k, \\ yq^k = (Y_{i+1}^k - Y_i^k)t_i + Y_i^k, \end{cases} \text{ де } i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ та } t_i \in [0, 1]. \quad (10)$$

Тобто, за допомогою виразів (9 – 10), можна однозначно аналітично описати зовнішній контур плоского геометричного об'єкта в щільній укладці на площині.

**Аналітичний опис умов взаємного неперетину плоских геометричних об'єктів.** Нехай  $S_1$  та  $S_2$  – два об'єкти, які зберігають постійну взаємну орієнтацію. Позначимо  $O_1$  та  $O_2$  полюси об'єктів, які вибрані в довільних точках даних об'єктів. Тоді  $X_1 O_1 Y_1$  та  $X_2 O_2 Y_2$  – системи координат, які жорстко зв'язані з об'єктами  $S_1$  та  $S_2$  відповідно. Без обмеження відповідні координатні осі можна вважати направленими однаково. Припустимо, що об'єкт  $S_1$  нерухомо закріплений на площині, а об'єкт  $S_2$  – рухомий. Розглянемо множину можливих щільних положень об'єкта  $S_2$  щодо об'єкта  $S_1$ . Кожне таке положення характеризується вектором  $r_{12} = O_1 O_2$ . Вектор-функція, що ставить у відповідність щільному положенню об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  значення вектора  $r_{12}$  за умови, що об'єкт  $S_1$  нерухомий, називається годографом вектор-функції  $\Gamma_{12}$  щільного розміщення (рис. 5) об'єкта  $S_2$  щодо об'єкта  $S_1$  [2].

Нехай  $\theta$  – кут, який утворює вектор  $r_{12}$  з віссю  $O_1 X_1$ . Тоді вектор-функція щільного розміщення об'єкта  $S_2$  щодо об'єкта  $S_1$  може бути задана у вигляді  $r = r_{12}(\theta)$ , де  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Позначимо  $\Phi_{12}$  область, яка обмежена годографом  $\Gamma_{12}$ . Значимо найбільш важливі властивості годографа  $\Gamma_{12}$  вектор-функції щільного розміщення та області  $\Phi_{12}$ , яка обмежена ним (рис. 5):

- якщо полюс  $O_2$  об'єкта  $S_2$  розміщений на границі області  $\Phi_{12}$ , то об'єкти  $S_1$  та  $S_2$  мають спільні граничні точки, тобто є щільно розміщеними (рис. 5, а);
- якщо полюс  $O_2$  об'єкта  $S_2$  розміщений зовні області  $\Phi_{12}$ , об'єкти  $S_1$  та  $S_2$  не мають спільних внутрішніх точок, тобто не перетинаються (рис. 5, б);
- якщо полюс  $O_2$  об'єкта  $S_2$  розміщений всередині області  $\Phi_{12}$ , то об'єкти  $S_1$  та  $S_2$  мають спільні внутрішні точки, тобто перетинаються (рис. 5, в).

Крім того, годограф вектор-функції щільного розміщення (ГВФЦР) об'єкта  $S_2$  щодо об'єкта  $S_1$  представляє собою замкнуту лінію та ГВФЦР для багатокутників є також багатокутник з числом вершин не більшим, ніж сума кількості вершин багатокутників, для яких був побудований ГВФЦР.

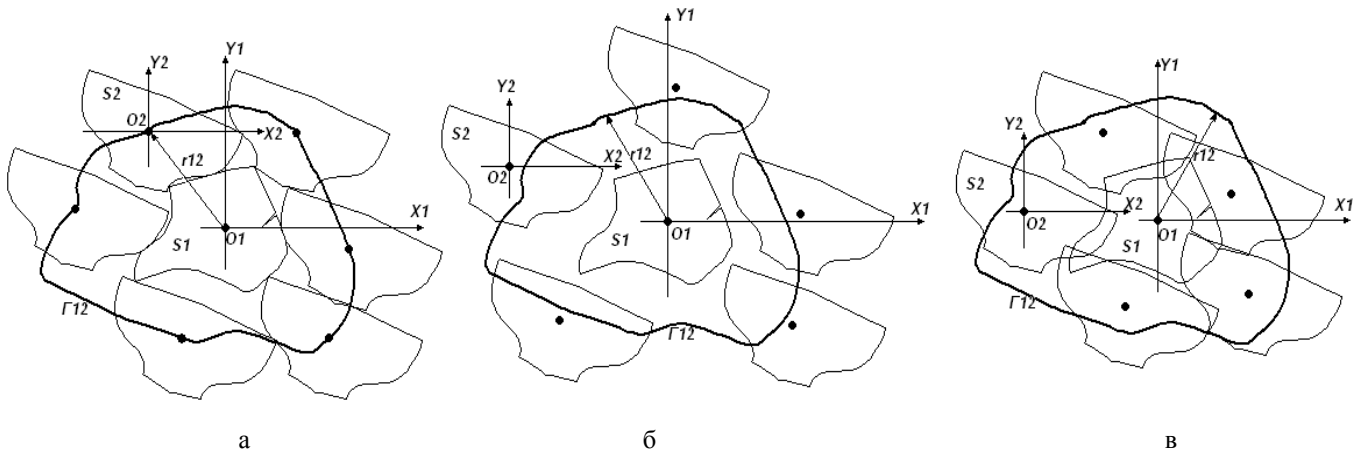


Рис. 5. Визначення взаємного положення двох деталей за допомогою ГВФЦР

Так як плоскі геометричні об'єкти  $S_1$  та  $S_2$  апроксимуються багатокутниками  $S_{m1}$  та  $S_{m2}$ , то ГВФЦР для плоских геометричних об'єктів буде багатокутник  $G$  з координатами вершин  $G_i(Xg_i, Yg_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_g$ . Тоді координати будь-якої точки на ГВФЦР можна представити наступним чином:

$$\begin{cases} xg = (Xg_{i+1} - Xg_i)\tau_i - Xg_i \\ yg = (Yg_{i+1} - Yg_i)\tau_i - Yg_i \end{cases}, \text{ де } i = 1, 2, \dots, n_g \text{ та } \tau_i \in [0, 1]. \quad (11)$$

Тобто, використовуючи апарат ГВФЦР, є можливість контролювати взаємне розміщення плоских геометричних об'єктів в укладці. Якщо полюси плоских геометричних об'єктів будуть знаходитися на ГВФЦР, то плоскі геометричні об'єкти будуть дотикатись. Крім того апарат ГВФЦР дозволяє аналітично представити умови взаємного неперетину плоских геометричних об'єктів, що розміщуються на площині.

**Математичний опис множини допустимих розв'язків задачі проектування найщільнішої решітчастої укладки.** Розглянемо множини допустимих розв'язків для задачі побудови найщільнішої решітчастої укладки плоских геометричних об'єктів виду  $S_1$  та  $S_2$  (плоскі геометричні об'єкти  $S_1$  повернуті до рядка на кут  $\alpha$  та плоскі геометричні об'єкти  $S_2$  повернуті до рядка на кут  $\beta$  щодо їх основного положення).

Сформуємо умову розв'язку задачі. Для цього побудуємо ГВФЦР  $r = r_{11}(\theta)$  для плоского геометричного об'єкту  $S_1$  самого з собою та ГВФЦР  $r = r_{22}(\theta)$  для плоского геометричного об'єкта  $S_2$  самого з собою.

Знайдемо  $\min_{r_{11}}$ ,  $\min_{r_{22}}$ ,  $\max_{r_{11}}$ ,  $\max_{r_{22}}$  для яких виконуються наступні нерівності [4]:

$$\min_{r_{11}} \leq |r_{11}(\theta)| \leq \max_{r_{11}} \quad \text{та} \quad \min_{r_{22}} \leq |r_{22}(\theta)| \leq \max_{r_{22}}.$$

Якщо

$$(\min_{r_{11}} \leq |r_{11}(\theta)| \leq \max_{r_{11}}) \cap (\min_{r_{22}} \leq |r_{22}(\theta)| \leq \max_{r_{22}}) \in \emptyset, \quad (12)$$

Побудуємо ряд щільних укладок для деталей  $S_1$  та  $S_2$  (рис. 6).

Пряма, що проходить через точки  $O_i$  та  $O_{i+1}$  розділяє площину на дві півплощини. Позначимо  $p$  – як множину векторів що сполучають полюси деталей першого типу та будь-яку точку на годографі  $G_{12}$ , координати якої задовольняють умові:  $Ax + By + c > 0$ , де  $A = Y_{a1}$ ,  $B = -X_{a1}$ ,  $C = 0$ ;  $q$  – як множину векторів, що сполучають полюси деталей першого типу, які також знаходяться у середньому рядку, та задовольняють умові  $Ax + By + c < 0$ . Тобто, множина векторів  $p$  та  $q$  знаходяться по різні боки від прямої, що сполучає полюси деталей першого типу в середньому рядку укладки.

Позначимо криві, на яких можуть знаходитися кінці векторів  $p^i$  та  $q^i$ ,  $Pu$  та  $Pd$  (рис. 6). Ці криві періодичні, з періодом рівним довжині вектора  $a^i_1$ , тобто  $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5=B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4=B_4B_5=O_1O_2=O_2O_3=O_3O_4=|a^i_1|$ . Тому для області допустимих значень для векторів  $p^i$  та  $q^i$  достатньо обмежитись одним періодом.

Область допустимих значень для векторів  $a^i$ ,  $p^i$  та  $q^i$  однозначно визначає множину допустимих подвійних решіток  $W^i=W(a^i_1, a^i_2, g^i)$ , де  $i=1, 2, \dots, q$ , тобто область допустимих розв'язків задачі укладки плоских геометричних об'єктів виду  $S_1$  та  $S_2$ .

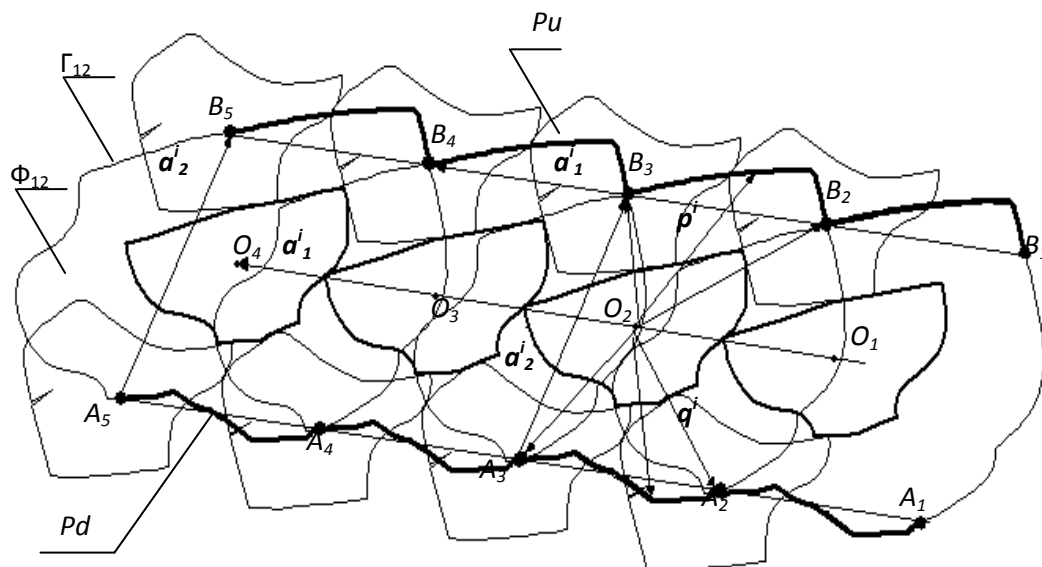


Рис. 6. Області значень векторів  $p^i$  та  $q^i$  для задачі укладки

**Аналітичне представлення функції цілі для задачі проектування найщільнішої решітчастої укладки.** Так як математичною моделлю задачі проектування найщільнішої решітчастої укладки є подвійна решітка, то щільність  $\delta_s(W)$  решітчастої укладки можна характеризувати за допомогою співвідношення (6). Площі  $|S_1|$  та  $|S_2|$  плоских геометричних об'єктів  $S_1$  та  $S_2$  у цьому співвідношенні величини постійні, тому щільність  $\delta_s(W)$  решітчастої укладки буде визначатись детермінантом решітки, значення якого дорівнює площі паралелограма, сторонами якого є вектори решітки  $a_1$  та  $a_2$ . Тоді з виразу (6) очевидно, що щільність  $\delta_s(W)$  решітчастої укладки буде тим вища, чим менша площа цього паралелограма (5). Тобто цільовою функцією буде детермінант  $\det W$  подвійної решітки  $W$ .

Так як ми отримали аналітичний вигляд ГВФЦР  $\Gamma_{11}$  та  $\Gamma_{12}$ , та векторів  $a_1=f_1(r_{11}(\theta))$  та  $a_2=f_2(r_{12}(\theta))$ , то знайдемо аналітичні вирази для векторів решітки  $a_1$  та  $a_2$ . Використовуючи параметричне представлення рівняння прямої, ГВФЦР  $\Gamma_{11}$  та  $\Gamma_{12}$  описуються наступним чином:

$$\Gamma_{11}: \begin{cases} xg^{11} = (Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11})t_i - Xg_i^{11} \\ yg^{11} = (Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11})t_i - Yg_i^{11} \end{cases}, \text{ де } i=1, 2, \dots, n_g^{11} \text{ та } t_i \in [0, 1], \quad (13)$$

$$\Gamma_{12}: \begin{cases} xg^{12} = (Xg_{j+1}^{12} - Xg_j^{12})\tau_j - Xg_j^{12} \\ yg^{12} = (Yg_{j+1}^{12} - Yg_j^{12})\tau_j - Yg_j^{12} \end{cases}, \text{ де } j=1, 2, \dots, n_g^{12} \text{ та } \tau_j \in [0, 1]. \quad (14)$$

Тоді, множину векторів  $a_1$ , що сполучають дві точки графа  $\Gamma_{11}$  можна представити наступним чином:

$$a_1: \begin{cases} x_{a1} = (Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11})\tau_i - Xg_i^{11} \\ y_{a1} = (Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11})\tau_i - Yg_i^{11} \end{cases}, \text{ де } i=1, 2, \dots, n_g^{11} \text{ та } \tau_i \in [0, 1]. \quad (15)$$

При визначенні найщільнішої укладки для кожного варіанта вектора  $a_1$  визначаються всі можливі варіанти векторів  $p$  та  $g$ , які теж можна представити у вигляді:

$$p: \begin{cases} x_p = (Xg_{j+1}^{12} - Xg_j^{12})\tau_j - Xg_j^{12} \\ y_p = (Yg_{j+1}^{12} - Yg_j^{12})\tau_j - Yg_j^{12} \end{cases}, \text{ де } j=1, 2, \dots, n_g^{12} \text{ та } \tau_j \in [0, 1], \quad (16)$$

$$q: \begin{cases} x_q = (Xg_{k+1}^{12} - Xg_k^{12})\tau_k - Xg_k^{12} \\ y_q = (Yg_{k+1}^{12} - Yg_k^{12})\tau_k - Yg_k^{12} \end{cases}, \text{ де } k=1, 2, \dots, n_g^{12} \text{ та } \tau_k \in [0, 1]. \quad (17)$$

Різниця цих векторів визначає вектор  $a_2$ . Звідси, функція цілі матиме наступний вигляд:

$$\det W = |[a_1 \times a_2]| = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} \\ a_{2x} & a_{2y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} \\ x_p - x_g & y_p - y_g \end{vmatrix} =$$

$$= |a_{1x}(y_p - y_g) - (x_p - x_g)a_{1y}| = |a_{1x}y_p - a_{1x}y_g - x_p a_{1y} + x_g a_{1y}| = F(t_i, \tau_j, \tau_k, i, j, k) =$$

$$= |A_{ij}t_i\tau_j + B_{ik}t_i\tau_k + (C_{ij} + D_{ik})t_i + E_{ij}\tau_j + F_{ik}\tau_k + L_{ijk}|, \quad (18)$$

де

$$A_{ij} = (Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11})(Yg_{j+1}^{12} - Yg_j^{12}) - (Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11})(Xg_{j+1}^{12} - Xg_j^{12}),$$

$$B_{ik} = (Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11})(Xg_{k+1}^{12} - Xg_k^{12}) - (Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11})(Yg_{k+1}^{12} - Yg_k^{12}),$$

$$C_{ij} = Xg_j^{12}(Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11}) - Yg_j^{12}(Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11}),$$

$$D_{ik} = Yg_k^{12}(Xg_{i+1}^{11} - Xg_i^{11}) - Xg_k^{12}(Yg_{i+1}^{11} - Yg_i^{11}), \quad (19)$$

$$E_{ij} = Yg_i^{11}(Xg_{j+1}^{12} - Xg_j^{12}) - Xg_i^{11}(Yg_{j+1}^{12} - Yg_j^{12}),$$

$$F_{ij} = Xg_i^{11}(Yg_{k+1}^{12} - Yg_k^{12}) - Yg_i^{11}(Xg_{k+1}^{12} - Xg_k^{12}),$$

$$L_{ijk} = Xg_i^{11}Yg_j^{12} + Yg_i^{11}Xg_k^{12} - Xg_i^{11}Yg_k^{12} - Yg_i^{11}Xg_j^{12}.$$

Як видно з рівнянь (18–19) функція цілі  $\det W$  є лінійна функція від кожної із трьох змінних  $t_i \in [0,1]$ ,  $\tau_j \in [0,1]$ ,  $\tau_k \in [0,1]$  при фіксованих інших двох інших змінних та трьох дискретних параметрів  $i, j, k$  ( $i = 1, 2, \dots, n_g^{11}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_g^{12}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_g^{12}$ ) та має вигляд:

$$\det W = F(t_i, \tau_j, \tau_k, i, j, k) = |A_{ij}t_i\tau_j + B_{ik}t_i\tau_k + (C_{ij} + D_{ik})t_i + E_{ij}\tau_j + F_{ik}\tau_k + L_{ijk}|. \quad (20)$$

Тоді локальний екстремум цієї функції може бути тільки на граничних значеннях змінних, тобто

$$t_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}; \quad \tau_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}; \quad \tau_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}. \quad (21)$$

Таким чином, нам не потрібно перебирати всі значення для змінних  $t_i \in [0,1]$ ,  $\tau_j \in [0,1]$ ,  $\tau_k \in [0,1]$ , а тільки ті випадки, де досягається локальний екстремум для функції цілі (20), серед яких вибираємо мінімальне значення як розв'язок оптимізаційної задачі побудови найщільніших укладок. Проведені дослідження функції цілі дозволили вказати теоретично обґрунтований метод пошуку екстремуму функції цілі в області допустимих значень. Мінімізуючи функцію цілі (площу паралелограма  $A_1D_1C_1D_1$  ( $A_2D_2C_2D_2$ )), мінімізуємо міжлекальні відходи (рис. 1).

## Висновки

Запропоновані математична модель та метод визначення найщільнішої укладки для двох видів деталей, що мають довільну, тобто однакову або різну конфігурацію зовнішніх контурів. Аналіз функції цілі дозволив представити ефективний теоретично обґрунтований метод пошуку екстремуму функції цілі в області допустимих значень. Отриманий критерій існування щільних решітчастих укладок для двох видів плоских геометричних об'єктів з однаковою або різною конфігурацією зовнішнього контуру. Обґрунтовано, що найщільнішу укладку можна визначити, розглядаючи тільки випадки, коли кінці вектора  $\overline{a_2}$  знаходяться на вершинах годографа. Запропонований метод не має недоліків раніше використовуваних методів визначення щільності укладок, які дозволяли одержати найщільнішу укладку тільки шляхом перебору всієї множини можливих решіток. Ще одним недоліком, усунутим у розробленому методі є те, що в попередньо розроблених методах кількість решіток визначалася умовами, які дозволяли отримати тільки певну кількість з усієї множини решіток. Оптимальна решітка визначалася з тієї підмножини. Умови формування функції цілі у представленому в роботі алгоритмі дозволяють визначити найщільнішу укладку з усієї множини допустимих решіток.

1. Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – Киев: Наук. думка, 1976. – 242 с.
2. Стоян Ю.Г. Размещение геометрических объектов. – Киев: Наук. думка. – 1975. – 175 с.
3. Чебанюк О.В., Чупринка В.І. Методика автоматичної п обудови розкрійних схем для двох видів плоских геометричних об'єктів // Проблеми програмування. – 2008. – № 2–3. – С. 730–734.
4. Чупринка В.І., Чебанюк О.В. Алгоритм побудови щільних укладок для двох видів плоских геометричних об'єктів // Вісник КНУТД. – 2007. – № 6. – С. 107–112.