УДК 519.21

МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ С ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНЫМИ ОСТАТКАМИ

А.А. МАТВЕЕВ, К.П. ШАДУРСКИС

Анализируются временные ряды для построения прогнозируемых значений с помощью теории цепей Маркова. Главная задача — нахождение оценок переходных вероятностей марковской цепи на основании наблюдаемых данных временного ряда. Доказывается, что нахождение таких вероятностей, отвечающих всем требованиям, сводится к задаче квадратичного программирования на симплексе. Строятся состоятельные и несмещенные оценки переходных вероятностей с использованием решения задачи квадратичного программирования в среде MATLAB. Полученные оценки проверены экспериментально методом Монте-Карло.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач современной эконометрии является развитие методов анализа временных рядов $\{x_t,\ t \in \mathbf{Z}\}$ с помощью авторегрессионных моделей без априорных предположений о форме зависимости условного математического ожидания фазовой координаты от ее прошлых значений (см., например, [1, 2]). Основная причина отказа от традиционных линейных моделей — негауссовский характер случайных величин, описывающих поведение реальных моделей. Напомним, что предположение о нормальности распределения временного ряда позволяет вычислять условное математическое ожидание фазовой переменной в виде линейного функционала ее прошлых значений $\{x_s,\ s < t\}$.

Отсутствие информации о законе распределения не позволяет вычислить упомянутое условное математическое ожидание аналитически в виде некоторой функции с неизвестными параметрами и свести проблему к оценке по методу наименьших квадратов, как это принято в линейной гауссовской теории. Поэтому при отсутствии информации о законе распределения во многих прикладных задачах регрессионного анализа временного ряда $\{x_t, t \in \mathbf{N}\}$ уже в простейшем случае приходится иметь дело с оценкой неизвестной функции $f(x)$ в нелинейном разностном уравнении первого порядка [1,3–5]

$$x_t = f(x_{t-1}) + h_t\,, \tag{1}$$

где h_t — некоррелированные остатки, в среднем равные нулю.

Описанная проблема анализа временных рядов получила название *непараметрического оценивания авторегрессии* [6]. Если обозначить $\mathbf{Z}^t$ минимальную сигма-алгебру, относительно которой измеримы случайные величины $\{h_s,\ s \le t\}$, то искомую функцию можно определить с помощью условного математического ожидания $f(x_{t-1}) := \mathbf{E}\{x_t / \mathbf{F}^{t-1}\}$. Используя последовательность сигма-алгебр $\{\mathbf{F}^t,\ t \in \mathbf{Z}\}$ и условную дисперсию $\sigma_t^2 :=$ $:= \mathbf{E}\{h_t^2 / \mathbf{F}^{t-1}\}$, остатки h_t в уравнении (1) можно представить в форме произведения белого шума $\{\xi_t,\ t \in \mathbf{Z}\}$ (последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией) и условного среднеквадратичного отклонения $h_t := \sigma_t \xi_t$ [7]. Ясно, что определенная выше последовательность сигма-алгебр в этом случае является минимальной для $\{\xi_t,\ t \in \mathbf{Z}\}$. Условная дисперсия σ_t^2 может быть случайной $\mathbf{F}^{t-1}$-измеримой величиной, зависеть от $\{\xi_s, s \le t-1\}$ и также подлежит оценке. Это свойство дисперсии остатков называется *условной гетероскедастичностью* и моделируется линейными разностными уравнениями с коэффициентами, линейно зависящими от белого шума ($\mathrm{GARCH}(p,q)$-*процессы*) [7]. Для отыскания функции $f(x)$ область значений дискретизируют (разбивают на интервалы достаточно малой длины δ) и затем на каждом интервале используют либо метод наименьших квадратов либо минимизируют специально построенный функционал в виде интеграла с ядрами различной формы (*ядерное оценивание* [2, 6]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Предположим, что наблюдается случайный процесс вида

$$x_{n+1} = f(x_n) + \sigma_n \xi_{n+1}, \tag{2}$$

где ξ_n — случайная ошибка наблюдений $\mathbf{E}\{\xi_n\} = 0$; $f(x_n)$ — нелинейная функция от элементов цепи x_n.

Уравнение (2) можно интерпретировать так, что случайная последовательность $\{x_n\}$ зависит от своей «истории».

Обозначим $\mathbf{F}^t$ минимальную сигма-алгебру, относительно которой измеримы случайные величины остатков. Тогда искомую функцию можно определить с помощью условного математического ожидания $f(x_{t-1}) :=$ $:= \mathbf{E}\{x_t / \mathbf{F}^{t-1}\}$. Это означает, что условное математическое ожидание случайной величины x_n имеет вид

$$\mathbf{E}\{x_{n+1} \mid \mathbf{F}^n\} = \mathbf{E}\{x_{n+1} \mid x_n\} = \sum_y p(x, y) y = f(x_n), \tag{3}$$

что и определяет нелинейность функциональной зависимости x_{n+1} от x_n. Цель наших исследований — описание динамики цепи $\{x_n\}$, т.е. нахождение функциональной зависимости $f(x_n)$, задаваемой уравнением (3).

Для отыскания функции $f(x)$ область значений дискретизируют и затем на каждом интервале используют либо метод наименьших квадратов, либо минимизируют специально построенный функционал в виде интеграла с ядрами различной формы. Рассмотрим модель дискретизации фазового пространства и представление его в форме конечного числа непересекающихся областей $\{S_k,\ k=1,\dots,r\}$, которые можно рассматривать как состояния некоторой цепи Маркова.

Для простой марковской цепи условную вероятность того, что в момент $m+1$ система находится в состоянии j, если в момент m она находилась в состоянии i, обозначим $p_{ij}(m)$.

$$P\{X_{m+1}=j\,|\,X_m=i\}=p_{ij}(m).$$

Далее рассмотрим однородную цепь Маркова, т. е. $p_{ij}(m)=p_{ij}$.

Марковская цепь полностью определяется множеством моментов дискретизации T_x и множеством пространства состояний S, распределением начальных состояний $p_i=P\{X_0=i\}$ и матрицей вероятностей перехода $P=(p_{ij})$ с условием нормировки

$$\sum_j p_{ij}=1,\ \ i=1,2,\dots,r\,,\ \ 0\le p_{ij}\le 1\,.$$

Поскольку распределение вероятностей начального состояния X_0 и матрица переходных вероятностей P полностью определяют вероятностное поведение марковской цепи, то при заданных X_0 и P возникает задача установления распределения вероятностей для каждого X_m и, возможно, предельного распределения значений случайной величины x_n при $n\to\infty$, если такое распределение существует. Если цепь Маркова неприводимая и апериодическая, а следовательно, и эргодическая, то существует единственная вектор-строка $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_r)$ — вектор стационарных вероятностей такой, что

$$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)}=\pi_j,\quad i,j=1,2,\dots,r,$$

где $p_{ij}^{(m)}$ представляет собой (i,j)-й элемент матрицы $p_{ij}(m)$, т. е. переход из состояния i марковской цепи x_n в состояние j за m шагов $p_{ij}^{(m)}=$ $=P(X_m=j\,|\,X_0=i)$, $0\le\pi_j\le 1$

$$\sum_j \pi_j=1,\ \ j=1,2,\dots,r\,,\ \ \pi=\pi P\,.$$

ОЦЕНИВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПО МИКРОДАННЫМ

Рассмотрим оценки переходных вероятностей, когда имеется выборка микроданных и последовательность повторяющихся наблюдений за состоянием эргодической марковской цепи. Пусть в момент времени $t = 0$ в состоянии i находится $n_i(0)$ микрообъектов и пусть в процессе наблюдений фиксируется последовательное изменение состояний микрообъектов в моменты времени $t = 1, 2, ..., T$. Вероятность упорядоченного набора состояний однородной марковской цепи задается таким образом:

$$P(x_0, x_0, ..., x_T) = P(x_0) \prod_{t=1}^{T} P(x_t \,|\, x_{t-1}) . \tag{4}$$

Пусть $n_{ij}(t)$ обозначено число микрообъектов, для которых $x_{t-1} = i$, $x_t = j$, и пусть

$$n_{ij} = \sum_t n_{ij}(t) .$$

Как известно [8], формула (4) определяет функцию правдоподобия, которая служит для вычисления оценок переходных вероятностей и для проверки различных гипотез о принимаемых ими значениях. К сожалению, столь детальная информация часто недоступна или обходится слишком дорого, поэтому приходится работать с агрегированными данными. Так, например, при переписи населения определяется только распределение числа индивидуальных объектов по всевозможным состояниям за каждый год переписи, но остается неизвестной траектория движения отдельного объекта. Однако в экономических задачах, например, при оценивании изменения процентной ставки, иногда возможно проследить изменение составляющих компонентов усредененной процентной ставки (индексы потребительской корзины, биржевые индексы и т.д.), что позволяет смоделировать и оценить характеристики марковской цепи по микроданным.

По формуле (4) вероятность фиксированной совокупности наборов состояний n микрообъектов можно определить как

$$P(x_0, x_1, \ldots, x_T \,|\, \mathbf{n}) \propto P(x_0) \prod_{i,\, j} p_{ij}^{n_{ij}}, \tag{5}$$

где $\propto$ — знак пропорциональности; $\mathbf{n}(t)' = (n_1(t), n_2(t), \ldots, n_r(t))$ — вектор, элементы которого равны числу микрообъектов в различных состояниях в момент времени t. (Здесь и далее символ $()'$ означает транспонирование).

Совокупность данных n_{ij} образует множество достаточных статистик [3]. Распределение вероятностей $n_{ij}(t)$ можно получить, рассматривая $n_i(t-1) = \sum_j n_{ij}(t)$ наблюдений значений величин, распределенных по полиномиальному закону с вероятностями p_{ij}. Можно доказать, что состоятельная, но смещенная оценка максимального правдоподобия

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}. \tag{6}$$

Как показано в работе [3], с увеличением объема выборки смещение стремится к нулю, и оценка максимального правдоподобия, определяемая уравнением (6), асимптотически нормальна.

ОЦЕНИВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПО МАКРОДАННЫМ

Построим оценки переходных вероятностей для случая, когда вместо информации о траекториях движения отдельных микрообъектов $n_{ij}(t)$ имеется только агрегированная информация в виде относительных частот состояний в каждый из моментов времени t.

Если вместо выборочных значений $n_{ij}(t)$ имеются только агрегированные данные $n_j(t) = \sum_i n_{ij}(t)$, то для того, чтобы использовать наблюдаемые относительные частоты при оценке вероятностей перехода, необходимо соотношение

$$P(x_{t-1} = i,\ x_t = j) = P(x_{t-1} = i)\, P(x_t = j \mid x_{t-1} = i). \tag{7}$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(x_t = j) = \sum_i P(x_{t-1} = i)\, P(x_t = j \mid x_{t-1} = i)$$

или

$$q_j(t) = \sum_i q_i(t-1)\, p_{ij}, \tag{8}$$

где $q_j(t)$ и $q_j(t-1)$ — безусловные вероятности $P(x_t = j)$ и $P(x_{t-1} = i)$ соответственно. Если безусловные вероятности $q_j(t)$ и $q_j(t-1)$ в (8) заменить фактическими значениями наблюдаемых частот $y_j(t)$ и $y_j(t-1)$, то не найдется таких оценок вероятностей перехода, которые с вероятностью, равной единице, удовлетворяли бы соотношению (8).

Таким образом, если признать, что истинное значение относительной частоты и ее оценка $y_j(t)$ не совпадают, то, обозначив $u_j(t)$ величину ошибки в правой части уравнения (8), можно записать, что выборочные наблюдения удовлетворяют стохастическому уравнению

$$y_j(t) = \sum_i y_i(t-1)\, p_{ij} + u_j(t), \tag{9}$$

которое можно рассматривать как линейную статистическую модель для оценивания переходных вероятностей.

ОЦЕНИВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Развивая метод, предложенный в работе [8], для оценивания переходных вероятностей по выборочным значениям частот с помощью уравнения (9) запишем его в векторной форме

$$\mathbf{y}_j = X_j \mathbf{p}_j + \mathbf{u}_j, \tag{10}$$

где $\mathbf{y}_j = \{y_j(t)\}$ — это $(T \times 1)$-вектор выборочных значений; $\mathbf{p}'_j = = (p_{1j}, p_{2j}, \ldots, p_{rj})$ — $(r \times 1)$-вектор неизвестных параметров (оцениваемых переходных вероятностей; $\mathbf{u}_j$ — $(T \times 1)$-вектор случайных ошибок и, наконец, X_j — следующая $(T \times r)$-матрица.

$$X_j = \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \ldots & y_r(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(t-1) & y_2(t-1) & \ldots & y_r(t-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(T-1) & y_2(T-1) & \ldots & y_r(T-1) \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Ранг матрицы X_j равен r. Вектор ошибок $\mathbf{u}_j$ запишем как

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_j) = 0,$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_j \mathbf{u}'_i) = \sigma_j \omega_{jj},$$

где ω_{jj} — положительно-определенная диагональная $(T \times T)$-матрица.

Уравнения (9) и (10) представляют собой часть расширенной системы уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} \tag{12}$$

или

$$\mathbf{y} = X\mathbf{p} + \mathbf{u}, \tag{13}$$

где X — блочно-диагональная матрица, в которой $X_1 = X_2 = \ldots = X_r$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = 0,$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \Sigma,$$

где Σ — недиагональная вырожденная матрица размера $(Tr \times Tr)$.

В случае линейной статистической модели в форме (12) или (13) при $T > r$ в работе [8] предложено для оценки переходных вероятностей применять обычный метод наименьших квадратов. Другими словами, задача оценивания рассматривается как задача определения такой оценки $\hat{\mathbf{p}}$, которая минимизирует положительно-определенную квадратичную форму

$$\varphi = \mathbf{u}'\mathbf{u} = (\mathbf{y} - X\mathbf{p})'(\mathbf{y} - X\mathbf{p}) . \quad (14)$$

Решая эту задачу, находим, что

$$\hat{\mathbf{p}} = (X'X)^{-1} X'\mathbf{y} \quad (15)$$

при условии, что $X'X$ является невырожденной, а это действительно так.

В силу положительной определенности (а также симметричности) матрицы $X'X$ для вектора $\hat{\mathbf{p}}$ выполняются как необходимые, так и достаточные условия минимума функционала (14).

Несмотря на то, что уравнения системы (12) связаны помехой, в силу условия $X_1 = X_2 = \ldots = X_r$ эти r уравнений могут оцениваться как вместе, так и порознь с одними и теми же результатами [3]. Таким образом, в соответствии с (15) обычная оценка метода наименьших квадратов $\hat{\mathbf{p}}_j$ (подвектора $\hat{\mathbf{p}}$) запишется так:

$$\hat{\mathbf{p}}_j = (X'_j X_j)^{-1} X'_j \mathbf{y}_j , \quad j = 1,2,\ldots,r . \quad (16)$$

Возникает вопрос, удовлетворяют ли полученные оценки условиям неотрицательности и нормировки, а именно

$$0 \le p_{ij} \le 1 , \quad (17)$$

$$\sum_j p_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,r . \quad (18)$$

Нетрудно доказать [8], что оценка переходных вероятностей по методу наименьших квадратов автоматически удовлетворяет условию нормировки. Этого, к сожалению, нельзя сказать про условие неотрицательности. Т.е. применение обычного метода наименьших квадратов (без учета ограничений) может привести к тому, что полученные вероятности будут отрицательными (или превышать единицу).

УСЛОВИЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ

Итак, чтобы полученные оценки (16) могли быть оценками переходных вероятностей, должны быть выполнены условия (17), (18). Однако при использовании обычного метода наименьших квадратов без учета ограничений оценки переходных вероятностей могут быть отрицательными, а, следовательно, некоторые из них могут быть больше единицы. Докажем это.

Запишем оценки, полученные методом наименьших квадратов без учета ограничений (15), в виде следующей системы уравнений:

$$(X'X)\tilde{\mathbf{p}} = X'\mathbf{y} . \quad (19)$$

В этой системе

$$X'X=\begin{bmatrix} X_1'X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2'X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_r'X_r \end{bmatrix}$$

представляет собой $(r^2\times r^2)$-матрицу, а $X_2'X_2$ — $(r\times r)$-матрицу, составленную из неотрицательных элементов, и

$$X'\mathbf{y}=\begin{bmatrix} X_1'\mathbf{y}_1 \\ X_2'\mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ X_r'\mathbf{y}_r \end{bmatrix}$$

есть $(r^2\times 1)$-вектор из неотрицательных элементов. Таким образом, правая часть и матрица системы (19) неотрицательны. Для того чтобы исследовать неотрицательность решений системы (19), положим

$$(X'X)\,\tilde{\mathbf{p}}=d'(I-A)\,d\,\tilde{\mathbf{p}},$$

где d — невырожденная диагональная матрица из положительных элементов.

Тогда (19) можно переписать в виде

$$(I-A)\,d\,\tilde{\mathbf{p}}=\left[d'\right]^{-1}X'\mathbf{y}\ge 0$$

или

$$(I-A)\,\tilde{w}=c\ge 0\,.$$

Если $\mathbf{A}$ — неотрицательная блочно-диагональная матрица, у которой $0\le a_{ij}\le 1,\ \sum\limits_{i=1}^{r}a_{ij}<1,\ \sum\limits_{j=1}^{r}a_{ij}<1$ для всех i,j, то справедлива следующая теорема.

Теорема. $(I-A)\,\tilde{w}=B\tilde{w}=c\ge 0$ имеет неотрицательное решение $\tilde{w}$ тогда и только тогда, когда

$$b_{11}>0;\quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}>0;\ldots;\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}>0\,. \tag{20}$$

Это так называемое условие Хоукинса – Саймона [3], которое эквивалентно утверждению: вектор $\mathbf{c}$ должен содержаться в выпуклом конусе, натянутом на вектор-столбцы матрицы $\mathbf{B}$ или $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$. В силу того что $X'X$ — положительно-определенная матрица с неотрицательными элементами, для нее условия (20) выполнены, однако требования, накладываемые в теореме 1 на элементы матрицы $\mathbf{A}$, не выполняются. Отсюда следует, что в общем случае оценки по методу наименьших квадратов без учета ограничений могут получиться отрицательными или больше единицы. В таком случае предлагается пользоваться оценками, которые принадлежат границе множества допустимых значений параметров и на множестве точек границы доставляют минимальное значение в квадратичной форме (14). Эта идея сформулирована в работе [8]. Основываясь на ней, найдем оценку, минимизирующую квадратичную форму (14) при ограничениях

$$G\mathbf{p} = \boldsymbol{\eta}_r, \tag{21}$$

$$\mathbf{p} \geq 0 \tag{22}$$

с целью написания MATLAB-процедуры для решения задачи квадратичного программирования. Так как форма φ в уравнении (14) является квадратичной, а ограничения (21) и (22) линейны, то эта задача относится к типичным задачам квадратичного программирования. Опираясь на теорему Куна – Таккера [3] для задач нелинейного программирования и на принцип двойственности для квадратичного программирования, задачу (14), (21),(22) можно свести к задаче в следующей линейной постановке: найти $\tilde{\mathbf{p}}^c$, максимизирующее

$$(X'\mathbf{y} - X'X\,\tilde{\mathbf{p}}^c)'\mathbf{p} \tag{23}$$

при ограничениях

$$G\mathbf{p} \leq \boldsymbol{\eta}_r, \tag{24}$$

$$-G\mathbf{p} \leq -\boldsymbol{\eta}_r, \tag{25}$$

$$\mathbf{p} \geq 0, \tag{26}$$

где $\tilde{\mathbf{p}}^c$ — оптимальная оценка по методу наименьших квадратов при учете ограничений. В соответствии с принципом двойственности для задач линейного программирования двойственная задача состоит в том, чтобы минимизировать

$$[\boldsymbol{\lambda}_1' \quad \boldsymbol{\lambda}_2'] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_r \\ -\boldsymbol{\eta}_r \end{bmatrix}$$

при ограничениях

$$[G' - G'] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1' \\ \boldsymbol{\lambda}_2' \end{bmatrix} \geq X'\mathbf{y} - X'X\,\tilde{\mathbf{p}}^c$$

и

$$\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 \geq 0,$$

где $\boldsymbol{\lambda}_1$ и $\boldsymbol{\lambda}_2$ — $(r \times 1)$ -векторы двойственных переменных.

Чтобы построить алгоритм решения, заменим в прямой и двойственной задачах $\tilde{\mathbf{p}}^c$ на $\mathbf{p}$ и запишем задачу в следующей комбинированной формулировке, которая позволит получить одновременно решение прямой и двойственной задач: максимизировать

$$(X'\mathbf{y} - X'X\,\mathbf{p})'\mathbf{p} - \boldsymbol{\lambda}_1'\boldsymbol{\eta}_r + \boldsymbol{\lambda}_2'\boldsymbol{\eta}_r = -\boldsymbol{\lambda}_1'\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2'\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{p} \leq 0 \tag{27}$$

при ограничениях

$$G\mathbf{p} = \boldsymbol{\eta}_r, \tag{28}$$

$$G'\boldsymbol{\lambda}_1 - G'\boldsymbol{\lambda}_2 + (X'X)\mathbf{p} - \boldsymbol{\beta} = X'\mathbf{y}, \tag{29}$$

$$\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta} \geq 0, \tag{30}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ и $\boldsymbol{\beta}$ — векторы дополнительных переменных прямой и двойственной задач. Задача (27) – (30) может быть решена с помощью стандартного симплекс-метода для задач квадратичного программирования (табл. 1).

Таблица 1. Симплекс-таблица задачи квадратичного программирования для оценки по методу наименьших квадратов с учетом ограничений

$\mathbf{B}_0$	$\boldsymbol{\lambda}_1$	$\boldsymbol{\lambda}_2$	$\mathbf{p}$	$\boldsymbol{\alpha}_1$	$\boldsymbol{\alpha}_2$	$\boldsymbol{\beta}$
$\boldsymbol{\eta}_r$			G	$\mathbf{I}$		
$-\boldsymbol{\eta}_r$			$-G$		$\mathbf{I}$	
$X'\mathbf{y}$	G'	$-G'$	$X'X$			$-\mathbf{I}$

Воспользуемся пакетом MATLAB (MathWorks Inc.) Для минимизации квадратичной формы, зависящей от большого числа переменных, используем подпрограмму-функцию *quadprog.* Исходные данные занесем в *mat*-файл *qpboxl.mat,* где они имеют вид положительно определенной квадратичной формы. Матрица Гессиана $\mathbf{H}$ является симметричной трехдиагональной. Имеются верхний и нижний пределы ограничений диапазонов переменных.

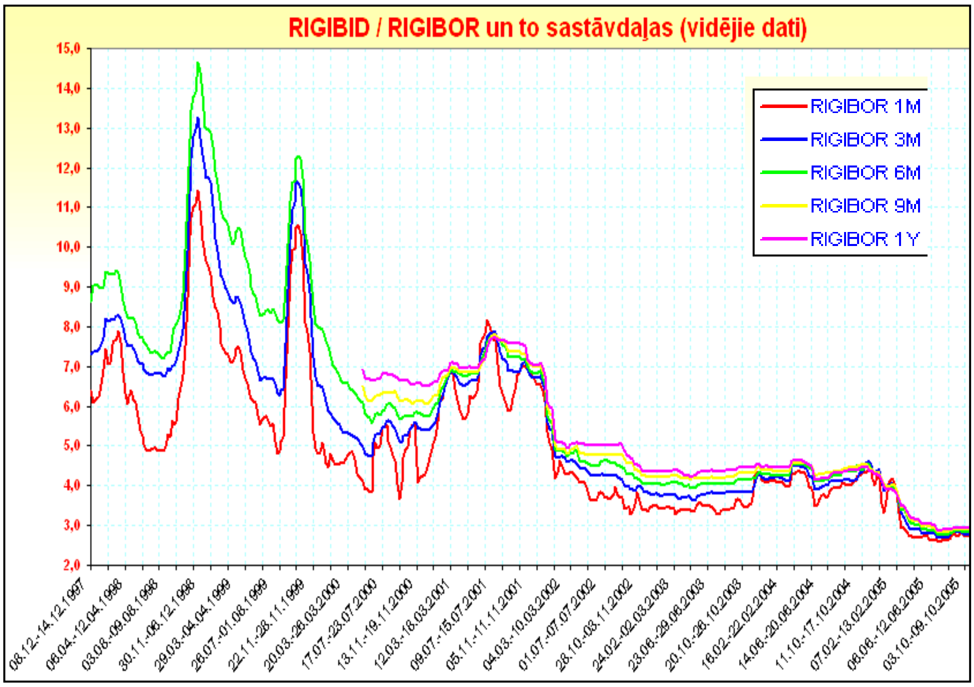
Трудности определения выборочных свойств оценок переходных вероятностей по методу наименьших квадратов при учете ограничений и то обстоятельство, что для оценок других типов имеются лишь асимптотические результаты, позволяют нам перейти к самому общему методу построения оценок переходных вероятностей — методу Монте-Карло.

Для выборочных оценок используем однородную марковскую цепь первого порядка, полученную с помощью анализа временного ряда RIGIBOR 6M (см. рисунок).

Для моделирования матрицы переходных вероятностей необходимо задать число состояний моделируемой цепи Маркова и вектор начальных вероятностей. Не умоляя общности, можем ограничиться числом состояний марковской цепи, равному 4. Построим эргодическую марковскую цепь, т.е. в предположении существования стационарных вероятностей. Для того чтобы полностью определить марковскую цепь при фиксированной матрице вероятностей переходов, нужно задать начальное распределение вероятностей. Если обозначить $\mathbf{y}(0)$ $(1\times\mathbf{r})$-вектор начальных значений частот, а $\mathbf{y}(t)$ $(1\times\mathbf{r})$-вектор вероятностей (агрегированных частот) в момент времени t, то по определению марковской цепи,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0)\mathbf{P}^t,$$

где $\mathbf{P}$ — матрица вероятностей переходов.



Временной ряд составного банковского индекса RIGIBID/RIGIBOR (усредненные данные)

Очевидно, что разные начальные векторы $\mathbf{y}(0)$ приводят к разным траекториям агрегированных данных $\mathbf{y}(t)$. В нашей модели имеются четыре разных начальных состояния микрообъектов. Траектории изменения агрегированных данных, соответствующих каждому из этих начальных состояний, по-разному влияют лишь на скорость сходимости состояний марковской цепи к положению равновесия.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫБОРОЧНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ МАКРОДАННЫХ

1. **Метод наименьших квадратов без учета ограничений**. По выборке, извлекаемой из генеральной совокупности 1000 микрообъектов, для получения оценок переходных вероятностей по методу наименьших квадратов без учета ограничений определялись значения относительных частот в моменты времени с 1-го по 25-й включительно. Во всех случаях нарушалось условие неотрицательности оценок переходных вероятностей. Средние значения и среднеквадратические ошибки оценок для разных выборок при 50-кратном повторении эксперимента приведены в табл. 2.

Для каждой выборки три-четыре раза нарушалось условие неотрицательности оценок. Как и следовало ожидать, с увеличением объема выборки среднеквадратическая ошибка уменьшается. Если сложить все среднеквадратические ошибки оценок разных переходных вероятностей, то для выборок объема 25, 50 и 100 соответствующие агрегированные ошибки равны 2,49; 2,05 и 1,95.

Таблица 2. Средние значения и среднеквадратические ошибки для оценок по методу наименьших квадратов без учета ограничений

Объем выборки	Средние значения				Среднеквадратические ошибки			
25	0,5165	0,5089	0,0180	–0,0434	0,1583	0,2228	0,2134	0,1407
	0,1504	0,3866	0,4466	0,0164	0,1437	0,2170	0,2541	0,1608
	–0,0104	0,1408	0,6067	0,2629	0,1127	0,1272	0,1795	0,1265
	–0,0001	0,0007	0,1586	0,8408	0,0802	0,0973	0,1503	0,1099
100	0,5480	0,4857	–0,0218	–0,0119	0,1115	0,1526	0,1845	0,1268
	0,1724	0,2553	0,4719	0,0004	0,1494	0,2017	0,2295	0,1615
	–0,0350	0,1806	0,6501	0,2043	0,0824	0,1235	0,1137	0,0858
	0,0144	–0,0260	0,1114	0,9002	0,0411	0,0688	0,0655	0,0513

2. **Метод наименьших квадратов при учете ограничений**. Средние значения и среднеквадратические ошибки оценок по методу наименьших квадратов при учете ограничений для 50-кратного повторения эксперимента приведены в табл. 3.

Оказывается, что эти оценки гораздо лучше оценок переходных вероятностей без учета ограничений из табл. 2. Прежде всего, оценки, полученные при учете ограничений, неотрицательны, а их среднеквадратические ошибки меньше среднеквадратических ошибок соответствующих оценок п. 1.

Таблица 3. Средние значения и среднеквадратические ошибки для оценок по методу наименьших квадратов при учете ограничений

Объем выборки	Средние значения				Среднеквадратические ошибки			
25	0,4992	0,4272	0,0723	0,0013	0,1521	0,1513	0,1369	0,0058
	0,1315	0,4593	0,3943	0,0149	0,1011	0,1603	0,1406	0,0291
	0,0160	0,0992	0,6344	0,2504	0,0307	0,0649	0,1324	0,0921
	0,0051	0,0262	0,1361	0,8326	0,0143	0,0407	0,1123	0,1149
100	0,5657	0,3953	0,0390	0,0001	0,0868	0,1147	0,0840	0,0001
	0,1224	0,4754	0,3959	0,0063	0,0712	0,1199	0,0912	0,0145
	0,0043	0,1060	0,6875	0,2022	0,0099	0,0393	0,0629	0,0404
	0,0017	0,0113	0,0929	0,8941	0,0049	0,0232	0,0459	0,0432

Таким образом, используя заданную выборку и методы оценивания параметров цепей Маркова в предположении стационарности процесса (1), мы оцениваем вероятности перехода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Auestad B., Tjøstheim D.* Identification of nonlinear time series: First order characterization and order estimation // Biometrika. — 1990. — **77**. — P. 669–687.

2. *Bierens H.J.* Kernel estimators of regression functions. — Advances in Econometrics: Cambridge University Press, 1987.
3. *Granger C., Teroasvirta T.* Modeling Nonlinear Dynamic Relationships. — Oxford: Oxford University Press, 1992.
4. *Priestley M.B.* Nonlinear and Nonstationary Time Series Analysis. — NY: Academic Press, 1988.
5. *Tjøstheim D.* Nonlinear time series and markov chains // Advanced Applied Probability. — 1990. — **22**. —P. 587–611.
6. *Benedetti J.K.* On the nonparametric estimation of regression functions // Journal of the Royal Statistical Society. — 1977. — Series B. — **39**. — P. 248–253.
7. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity // Journal of Econometrics. — 1986. — **31**. — P. 307–327.
8. *Andreson T., Goodman L.* Statistical Inference About Markov Chain // The Annals of Mathematical Statistics. — 1967. — **38**. — P. 89–110.
9. *Carkova V., Swerdan M.* On mean square stability of linear stochastic difference equations // Theory of Stochastic Processes. — **11**(**27**). — 2005. — P. 6–11.
10. *Лумельский Я.П., Чичагов В.В.* Статистическое оценивание в схеме марковских случайных блужданий // Статистические методы / Пермь: Перм. ун-т, 1986. — С. 36–45.

Поступила 10.08.2006