

В. П. Голуб, Б. П. Маслов, П. В. Фернати

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ИЗОТРОПНЫХ
ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ
НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ.

2. СЛУЧАЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ДЕВИАТОРОВ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина; creep@inmech.kiev.ua*

Abstract. The relationships between heredity and creep kernels are established. The heredity kernels define the scalar properties of isotropic linearly viscoelastic materials under complex stress state. The creep kernels are obtained in conditions of uni-axial tension and pure torsion. The constitutive equations are chosen in the form that corresponds to the hypothesis proportionality of deviators. The problems of analysis of creep strains and stress relaxation of thin-wall tubular samples under combined loading by tension with torsion are solved and approved experimentally.

Key words: linear viscoelasticity, isotropic material, complex stress state, proportionality of deviators, creep kernel, relaxation kernel, thin-wall tubular sample, tension with torsion.

Введение.

В наследственных теориях вязкоупругости механические свойства среды задаются упругими постоянными и ядрами наследственности, включающими ядра ползучести и ядра релаксации [5, 7, 10, 11, 13, 14]. Задача идентификации ядер ползучести и релаксации, установления связи между ядрами и определения параметров ядер составляет одну из основных задач теории вязкоупругости.

При одноосном напряженном состоянии ядра наследственности и параметры ядер определяются непосредственно по результатам аппроксимации данных прямых измерений деформаций или напряжений в процессе ползучести или релаксации функциями, задающими ядра. Детальный анализ методов выбора функций, задающих ядра наследственности, и методов определения параметров ядер линейно- и нелинейно-вязкоупругих материалов при одноосном напряженном состоянии представлен в [2, 3, 5, 6, 11, 15].

Задача идентификации ядер наследственности и определения параметров ядер при сложном напряженном состоянии является более сложной и сводится, как правило, к установлению зависимости между ядрами наследственности при сложном и одноосном напряженном состояниях. Одноосное напряженное состояние реализуется непосредственно в эксперименте и рассматривается как базовое. В качестве базовых экспериментов чаще всего используются испытания образцов на растяжение с замером продольных и поперечных деформаций и на кручение с замером угловых деформаций.

В работе [3] для изотропных линейно-вязкоупругих материалов установлена зависимость между ядрами сдвиговой и объемной ползучести и ядрами продольной и поперечной ползучести, построенными по результатам испытаний на одноосное растяжение. В работах [2, 8] установлена зависимость между ядрами сдвиговой и объемной ползучести при сложном напряженном состоянии и ядрами продольной и сдвиговой ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении.

В данной работе установлена зависимость между ядрами наследственности, задающими скалярные свойства изотропных линейно-вязкоупругих материалов в определяющем уравнении вида теории малых упруго-пластических деформаций, и ядрами продольной, поперечной и сдвиговой ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим ползучесть и релаксацию напряжений изотропных однородных и нестареющих линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. Определяющие уравнения ползучести, задающие зависимость между компонентами тензора деформаций ε_{ij} , тензора напряжений σ_{ij} и временем t , имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(t, \sigma_i)}{\sigma_i(t)} \left(\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t) \right); \\ \varepsilon_i(\sigma_i, t) &= \frac{2(1+\nu)}{3E} \left(\sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau)\sigma_i(\tau)d\tau \right); \\ \varepsilon_v(\sigma_0, t) &= \frac{3(1-2\nu)}{E} \left(\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau)\sigma_0(\tau)d\tau \right),\end{aligned}\quad (1.1)$$

решением которых являются уравнения релаксации

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t) &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(t, \varepsilon_i)}{\varepsilon_i(t)} \left(\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) \right); \\ \sigma_i(\varepsilon_i, t) &= \frac{3E}{2(1+\nu)} \left(\varepsilon_i(t) - \lambda_i \int_0^t R_i(t-\tau)\varepsilon_i(\tau)d\tau \right); \\ \sigma_0(\varepsilon_v, t) &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \left(\varepsilon_v(t) + \lambda_v \int_0^t R_v(t-\tau)\varepsilon_v(\tau)d\tau \right).\end{aligned}\quad (1.2)$$

Здесь $\varepsilon_v(t)$ и $\varepsilon_i(\sigma_i, t)$ – объемная деформация и интенсивность деформаций ползучести; $\sigma_0(t)$ и $\sigma_i(\varepsilon_i, t)$ – среднее напряжение и интенсивность напряжений; $K_i(t-\tau)$ и $K_v(t-\tau)$ – ядра интенсивности ползучести и объемной ползучести; $R_i(t-\tau)$ и $R_v(t-\tau)$ – ядра интенсивности релаксации и объемной релаксации; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; λ_i , λ_v – реологические параметры; δ_{ij} – единичная функция Кронекера.

В (1.1) и (1.2) принято, что

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)}; \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)}; \quad (1.4)$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}); \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_v = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (1.6)$$

где $\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{12}, \dots$ и $\sigma_{11}, \dots, \tau_{12}, \dots$ – компоненты тензора деформаций и тензора напряжений, соответственно; ε_0 – средняя деформация.

Между ядрами ползучести и релаксации в (1.1) и (1.2) существует интегральная связь [5, 11]

$$R(t) - K(t) = \lambda \int_0^t K(t-\tau)R(\tau)d\tau, \quad (1.7)$$

которая позволяет определить значения параметров одного ядра по значениям параметров другого ядра.

Идентификация ядер ползучести $K_i(t)$ и $K_v(t)$ в (1.1) и ядер релаксации $R_i(t)$ и $R_v(t)$ в (1.2) осуществляется на основе *двух групп* базовых экспериментов на ползучесть при постоянных напряжениях.

Первая группа базовых экспериментов включает испытания сплошных цилиндрических образцов на ползучесть при одноосном растяжении с замером продольных и поперечных деформаций. Одномерные модели ползучести, устанавливающие зависимость между напряжениями, деформациями и временем, задаются в этом случае уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{\sigma_{11}(t)}{E} + \frac{\lambda_{11}}{E} \int_0^t K_{11}(t-\tau)\sigma_{11}(\tau)d\tau; \\ \varepsilon_{22}(t) &= -\left(\frac{\nu\sigma_{11}(t)}{E} + \frac{\nu\lambda_{22}}{E} \int_0^t K_{22}(t-\tau)\sigma_{11}(\tau)d\tau \right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

которые при $\sigma_{11} = \text{const}$ сводятся к уравнениям

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau)d\tau \right); \quad \varepsilon_{22}(t) = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(t-\tau)d\tau \right). \quad (1.9)$$

Здесь $\sigma_{11}(t)$ – одноосное растягивающее напряжение; $\varepsilon_{11}(t)$ и $\varepsilon_{22}(t)$ – продольная и поперечная деформации, включающие упругую деформацию и деформацию ползучести; $K_{11}(t)$ и $K_{22}(t)$ – ядра продольной и поперечной ползучести; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; λ_{11} и λ_{22} – реологические параметры.

Вторая группа базовых экспериментов включает испытания сплошных цилиндрических образцов на ползучесть при одноосном растяжении с замером продольных деформаций и испытания тонкостенных трубчатых образцов на ползучесть при чистом кручении с замером угловых деформаций. Одномерные модели ползучести, устанавливающие зависимость между напряжениями, деформациями и временем, задаются в этом случае уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{\sigma_{11}(t)}{E} + \frac{\lambda_{11}}{E} \int_0^t K_{11}(t-\tau)\sigma_{11}(\tau)d\tau; \\ \gamma_{21}(t) &= \frac{\tau_{21}(t)}{G} + \frac{\lambda_{21}}{G} \int_0^t K_{21}(t-\tau)\tau_{21}(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (1.10)$$

которые при $\sigma_{11} = \text{const}$ и $\tau_{21} = \text{const}$ сводятся к уравнениям

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau)d\tau \right); \quad \gamma_{21}(t) = \frac{\tau_{21}}{G} \left(1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau)d\tau \right). \quad (1.11)$$

Здесь $\tau_{21}(t)$ – касательное напряжение кручения; $\gamma_{21}(t)$ – угловая деформация, включающая упругую деформацию и деформацию ползучести; $K_{21}(t)$ – ядро сдвиговой ползучести; G – модуль сдвига; λ_{21} – реологический параметр. Остальные обозначения совпадают с принятыми в (1.7) и (1.8).

Ядра ползучести $K(t)$ и релаксации $R(t)$ в (1.1), (1.2), (1.7) – (1.10) аппроксимируются дробно-экспоненциальными функциями [11]

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}; \quad R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (1.12)$$

где α и β – параметры ядер ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функция Эйлера.

Задача заключается в установлении зависимости между ядрами ползучести $K_i(t)$ и $K_v(t)$ в (1.1) или ядрами релаксации $R_i(t)$ и $R_v(t)$ в (1.2), задающими скалярные свойства линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии в определяющих уравнениях типа уравнений малых упруго-пластических деформаций, и ядрами продольной $K_{11}(t)$, поперечной $K_{22}(t)$ и сдвиговой $K_{21}(t)$ ползучести, задающими наследственные свойства линейно-вязкоупругих материалов при одноосном растяжении и чистом кручении.

§2. Идентификация скалярных ядер наследственности по ядрам продольной и поперечной ползучести.

Ниже установим зависимость между ядрами ползучести и релаксации при сложном напряженном состоянии и ядрами продольной и поперечной ползучести при одноосном растяжении.

2.1. Компоненты и инварианты тензоров напряжений и деформаций. При одноосном растяжении компоненты тензоров напряжений и деформаций записываются в виде

$$\sigma_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(t) \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

где $\sigma_{11}(t)$ – одноосное растягивающее напряжение; $\varepsilon_{11}(t)$ – продольная деформация; $\varepsilon_{22}(t)$, $\varepsilon_{33}(t)$ – поперечные деформации. Компоненты тензора деформаций в (2.1) измеряются в эксперименте.

Для интенсивности напряжений $\sigma_i(t)$ из (1.3), для интенсивности деформаций $\varepsilon_i(t)$ из (1.4), для среднего напряжения $\sigma_0(t)$ из (1.5) и для объемной деформации $\varepsilon_v(t)$ из (1.6) с учетом (2.1), соответственно, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) &= \sigma_{11}(t); & \varepsilon_i(t) &= \frac{2}{3}(\varepsilon_{11}(t) - \varepsilon_{22}(t)); \\ \sigma_0(t) &= \frac{1}{3}\sigma_{11}(t); & \varepsilon_v(t) &= \varepsilon_{11}(t) + 2\varepsilon_{22}(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где принято, что $\varepsilon_{22}(t) = \varepsilon_{33}(t)$.

2.2. Идентификация ядер интенсивности ползучести и релаксации. Зависимость между ядрами интенсивности ползучести $K_i(t)$ и ядрами продольной и поперечной ползучести $K_{11}(t)$ и $K_{22}(t)$ устанавливается, исходя из совместного решения уравнений (1.1) и (1.9).

Из второго уравнения в (1.1) с учетом (1.9), (2.1) и (2.2) при $\sigma_{11}(t) = \text{const}$ и $\sigma_i(t) = \text{const}$ получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{2(1+\nu)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) d\tau \right) = \\ & = \frac{2}{3} \left[\frac{\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right) + \frac{\nu\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(t-\tau) d\tau \right) \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

из которого следует зависимость между соответствующими интегральными операторами в форме

$$(1+\nu) \left(1 + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) d\tau \right) = \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right) + \nu \left(1 + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(t-\tau) d\tau \right). \quad (2.4)$$

Заменяя в (2.4) переменные и пределы интегрирования

$$t - \tau = s; \quad d\tau = -ds; \quad s = t \text{ при } \tau = 0; \quad s = 0 \text{ при } \tau = t, \quad (2.5)$$

дифференцируя далее обе части уравнения (2.4) по t , с учетом (2.5) и используя теорему Ньютона – Лейбница [12], получаем уравнение

$$(1+\nu)\lambda_i K_i(t) = \lambda_{11} K_{11}(t) + \lambda_{22} K_{22}(t), \quad (2.6)$$

из которого следует уравнение

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) + \nu \lambda_{22} K_{22}(t)}{1+\nu}, \quad (2.7)$$

устанавливающее зависимость между ядром интенсивности ползучести и ядрами продольной и поперечной ползучести.

Уравнение (2.7) позволяет рассчитывать дискретные значения ядер интенсивности ползучести $K_i(t)$ при сложном напряженном состоянии в функции времени t . Параметры ядер определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер выбранным для ядра аналитическим выражением.

Параметры ядер интенсивности релаксации напряжений $R_i(t)$ в случае использования резольвентных ядер наследственности совпадают согласно (1.6) с параметрами ядер интенсивности ползучести $K_i(t)$.

2.3. Идентификация ядер объемной ползучести и релаксации. Зависимость между ядрами объемной ползучести $K_v(t)$ и ядрами продольной и поперечной ползучести $K_{11}(t)$ и $K_{22}(t)$ устанавливается также, исходя из совместного решения уравнений (1.1) и (1.9).

Из третьего уравнения в (1.1) с учетом (1.5), (1.9), (2.1) и (2.2) при $\sigma_{11}(t) = \text{const}$ и $\sigma_0(t) = \text{const}$ получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{(1-2\nu)\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right) = \\ & = \left[\frac{\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right) - \frac{2\nu\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(t-\tau) d\tau \right) \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

из которого следует зависимость между соответствующими интегральными операторами в форме

$$(1-2\nu)\left(1+\lambda_\nu\int_0^t K_\nu(t-\tau)d\tau\right)=\left(1+\lambda_{11}\int_0^t K_{11}(t-\tau)d\tau\right)-2\nu\left(1+\lambda_{22}\int_0^t K_{22}(t-\tau)d\tau\right). \quad (2.9)$$

Дифференцируя далее обе части уравнения (2.9) по t , с учетом (2.5) и используя теорему Ньютона – Лейбница [12], получаем уравнение

$$(1-2\nu)\lambda_\nu K_\nu(t)=\lambda_{11}K_{11}(t)-2\nu\lambda_{22}K_{22}(t), \quad (2.10)$$

из которого следует уравнение

$$\lambda_\nu K_\nu(t)=\frac{\lambda_{11}K_{11}(t)-2\nu\lambda_{22}K_{22}(t)}{1-2\nu}, \quad (2.11)$$

устанавливающее зависимость между ядром объемной ползучести и ядрами продольной и поперечной ползучести.

Уравнение (2.10) позволяет рассчитывать дискретные значения ядер объемной ползучести $K_\nu(t)$ при сложном напряженном состоянии в функции времени t . Параметры ядер объемной ползучести и, соответственно, объемной релаксации определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер выбранным для ядра ползучести аналитическим выражением.

§3. Идентификация скалярных ядер наследственности по ядрам продольной и сдвиговой ползучести.

Установим зависимости между ядрами ползучести и релаксации при сложном напряженном состоянии и ядрами продольной и сдвиговой ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении, соответственно.

3.1. Компоненты и инварианты тензоров напряжений и деформаций. При одноосном растяжении компоненты тензоров напряжений и деформаций записываем в виде

$$\sigma_{ij}(t)=\begin{Bmatrix} \sigma_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ij}(t)=\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_{11}(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.1)$$

а при чистом кручении – в виде

$$\sigma_{ij}(t)=\begin{Bmatrix} 0 & \tau_{21}(t) & 0 \\ \tau_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ij}(t)=\begin{Bmatrix} 0 & \varepsilon_{12}(t) & 0 \\ \varepsilon_{21}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.2)$$

Здесь $\sigma_{11}(t)$ – одноосное растягивающее напряжение; $\varepsilon_{11}(t)$ – продольная деформация растяжения; $\tau_{12}(t)$, $\tau_{21}(t)$ – касательные напряжения кручения; $\varepsilon_{12}(t)$, $\varepsilon_{21}(t)$ – сдвиговые деформации кручения; ν – коэффициент Пуассона. В эксперименте измеряются деформация растяжения $\varepsilon_{11}(t)$ и угловая деформация $\gamma_{21}(t)=\gamma_{12}(t)=2\varepsilon_{21}(t)$.

Для интенсивности напряжений $\sigma_i(t)$ из (1.3), для интенсивности деформаций $\varepsilon_i(t)$ из (1.4), для среднего напряжения $\sigma_0(t)$ из (1.5) и для объемной деформации $\varepsilon_\nu(t)$ из (1.6) с учетом (3.1) получаем соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) &= \sigma_{11}(t); & \varepsilon_i(t) &= \frac{2(1+\nu)}{3}\varepsilon_{11}(t); \\ \sigma_0(t) &= \frac{1}{3}\sigma_{11}(t); & \varepsilon_\nu(t) &= (1-2\nu)\varepsilon_{11}(t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

а с учетом (3.2) – соответственно, соотношения

$$\begin{aligned}\sigma_i(t) &= \sqrt{3}\sigma_{21}(t); & \varepsilon_i(t) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_{12}(t); \\ \sigma_0 &= 0; & \varepsilon_v(t) &= 0,\end{aligned}\quad (3.4)$$

где принято, что $\varepsilon_{22}(t) = \varepsilon_{33}(t) = -v\varepsilon_{11}(t)$.

3.2. Идентификация ядер интенсивности ползучести и релаксации. Из соотношений (3.4) следует, что ядро интенсивности ползучести будет зависеть только от ядра сдвиговой ползучести $K_{21}(t)$, поскольку при чистом кручении $\sigma_0 = \varepsilon_v(t) = 0$ и, следовательно, $K_v(t) = 0$. Зависимость между ядрами $K_i(t)$ и $K_{21}(t)$ устанавливается, исходя из совместного решения уравнений (1.1) и (1.11).

Из второго уравнения в (1.1) с учетом (1.11) и (3.4) получаем соотношение

$$\frac{1+v}{E} \left(\sigma_{21}(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \tau_{21}(\tau) d\tau \right) = \frac{1+v}{E} \left(\tau_{21}(t) + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) \sigma_{21}(\tau) d\tau \right), \quad (3.5)$$

из которого следует равенство

$$\lambda_i K_i(t) = \lambda_{21} K_{21}(t) \quad (3.6)$$

и, соответственно, можно принять, что

$$\lambda_i = \lambda_{21} \text{ и } K_i(t) = K_{21}(t). \quad (3.7)$$

В (3.5) принято, что $\gamma_{21}(t) = 2\varepsilon_{21}(t)$; $G = E / 2(1+v)$.

Из соотношений (3.6) и (3.7) следует, что параметры ядер интенсивности ползучести и, соответственно, интенсивности релаксации совпадают с параметрами ядер сдвиговой ползучести, определяемыми в эксперименте на чистое кручение.

3.3. Идентификация ядер объемной ползучести и релаксации. Зависимость между ядрами объемной ползучести $K_v(t)$ и ядрами продольной и сдвиговой ползучести $K_{11}(t)$ и $K_{21}(t)$ устанавливается, исходя из совместного решения уравнений (1.1) и (1.11).

Из первого уравнения в (1.1) для деформаций продольной ползучести $\varepsilon_{11}(t)$ при $\sigma_{11} = \text{const}$ с учетом (3.1), (3.2) и (3.3) получаем соотношение

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{2(1+v)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) d\tau \right) + \frac{(1-2v)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right), \quad (3.8)$$

а с учетом первого уравнения в (1.11) и (3.7) – соотношение

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right) &= \frac{2(1+v)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) d\tau \right) + \\ &+ \frac{(1-2v)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right),\end{aligned}\quad (3.9)$$

из которого следует зависимость между интегральными операторами в форме

$$\begin{aligned}\frac{1-2v}{3} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right) &= \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right) - \\ &- \frac{2(1+v)}{3} \left(1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) d\tau \right).\end{aligned}\quad (3.10)$$

Дифференцируя далее обе части уравнения (3.10) по t с учетом (2.5) и также используя теорему Ньютона – Лейбница [12], получаем уравнение

$$\frac{1-2\nu}{3} \lambda_\nu K_\nu(t) = \lambda_{\nu_1} K_{\nu_1}(t) - \frac{2(1+\nu)}{3} \lambda_{\nu_2} K_{\nu_2}(t), \quad (3.11)$$

из которого следует равенство

$$\lambda_\nu K_\nu(t) = \frac{3\lambda_{\nu_1} K_{\nu_1}(t) - 2(1+\nu)\lambda_{\nu_2} K_{\nu_2}(t)}{1-2\nu}, \quad (3.12)$$

устанавливающее зависимость между ядром объемной ползучести и ядрами продольной и сдвиговой ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении.

Уравнение (3.12) позволяет рассчитывать дискретные значения ядер объемной ползучести $K_\nu(t)$ при сложном напряженном состоянии в функции времени t . Параметры ядер объемной ползучести и, соответственно, объемной релаксации определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядра объемной ползучести выбранным для ядра аналитическим выражением.

§4. Расчет деформаций ползучести и релаксации напряжений.

Методы идентификации ядер наследственности линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии, изложенные в §§2 и 3, апробируются экспериментально на задачах расчета деформаций ползучести и релаксации напряжений тонкостенных трубчатых образцов при комбинированном нагружении растяжением с кручением.

4.1. Материал образцов. Упругие постоянные. Параметры ядер наследственности. В качестве объекта исследования выбраны тонкостенные трубчатые образцы из полиэтилена высокой плотности ПЭВП с наружным диаметром 51 мм и толщиной стенки 5 мм. Образцы были испытаны на ползучесть и на релаксацию при одноосном растяжении, чистом кручении и комбинированном нагружении растяжением с кручением. Экспериментальные данные заимствованы из [4].

Область линейности вязкоупругих свойств полиэтилена ПЭВП при сложном напряженном состоянии обосновывается, исходя из соблюдения условия однородности процесса ползучести в обобщенной системе координат « $\varepsilon_i - t$ ».

Принимается, что материал является линейно-вязкоупругим, если функция интенсивности деформаций ползучести $J_i(t)$

$$J_{i,1}(t_j) = \frac{\varepsilon_{i,1}(t_j; \sigma_{i,1})}{\sigma_{i,1}} = J_{i,2} = \frac{\varepsilon_{i,2}(t_j; \sigma_{i,2})}{\sigma_{i,2}} = \dots = J_{i,q} = \frac{\varepsilon_{i,q}(t_j; \sigma_{i,q})}{\sigma_{i,q}} \quad (4.1)$$

инвариантна по отношению к уровню интенсивности напряжений $\sigma_{i,q}$ для нескольких моментов времени t_j , а расчетное значение квантиля статистики $t_{\alpha,k}$

$$t_{\alpha,k} = \frac{\sqrt{n}}{s_j(t_j)} \delta \frac{1}{m} \sum_{q=1}^m J_{i,q}(t_j) = \frac{\sqrt{n}}{s_j(t_j)} \delta \bar{J}_i(t_j) > t_{\alpha,k}^*, \quad (4.2)$$

больше его критического значения $t_{\alpha,k}^*$. Здесь $J_{i,q}(t_j)$ – значения функции интенсивности деформаций ползучести в момент времени $t_j (j = \overline{1, \ell})$; $\bar{J}_i(t_j)$ – выборочное среднее значение функции $J_{i,q}(t_j)$; n – объем выборки (число функций интенсивности деформаций ползучести); δ – максимальная погрешность между значениями $J_{i,q}(t_j)$ и $\bar{J}_i(t_j)$; $m = n - 1$.

В соответствии с условиями (4.1) и (4.2) область линейности вязкоупругих свойств полиэтилена высокой плотности ПЭВП ограничивается величиной $\sigma_i = 6,43$ МПа и, соответственно, напряжениями $\sigma_{11} = 5,0$ МПа и $\tau_{21} = 2,34$ МПа.

В табл. 1 приведены значения упругих постоянных, а в табл. 2 – значения параметров ядер наследственности полиэтилена ПЭВП. Значения упругих постоянных заимствованы из [4].

Таблица 1

Материал	E , МПа	G , МПа	B , МПа	ν
Полиэтилен ПЭВП	867,0	321,0	963,3	0,35

Таблица 2

Базовый эксперимент: одноосная продольная и поперечная ползучесть											
$K_{11}(t)$, час ⁻¹			$K_{22}(t)$, час ⁻¹			$K_i(t); R_i(t)$, час ⁻¹			$K_v(t); R_v(t)$, час ⁻¹		
α_{11}	β_{11}	λ_{11}	α_{22}	β_{22}	λ_{22}	α_i	β_i	λ_i	α_v	β_v	λ_v
-0,6460	-0,1398	1,9439	-0,5158	-1,0137	3,1427	-0,6191	0,2764	2,1493	-0,6988	0,1229	1,6334
Базовый эксперимент: одноосная продольная ползучесть и сдвиговая ползучесть											
$K_{11}(t)$, час ⁻¹			$K_{21}(t)$, час ⁻¹			$K_i(t); R_i(t)$, час ⁻¹			$K_v(t); R_v(t)$, час ⁻¹		
α_{11}	β_{11}	λ_{11}	α_{21}	β_{21}	λ_{21}	α_i	β_i	λ_i	α_v	β_v	λ_v
-0,6460	-0,1398	1,9439	-0,4700	-1,2467	2,0197	-0,4706	1,2402	2,0155	-0,6334	0,2971	9,1396

Значения параметров ядер наследственности определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер ползучести дробно-экспоненциальными функциями (1.12) по методике, изложенной в [1, 8]. Размерность коэффициентов β и λ – час^{-(1+ α)}, а коэффициент α – безразмерный.

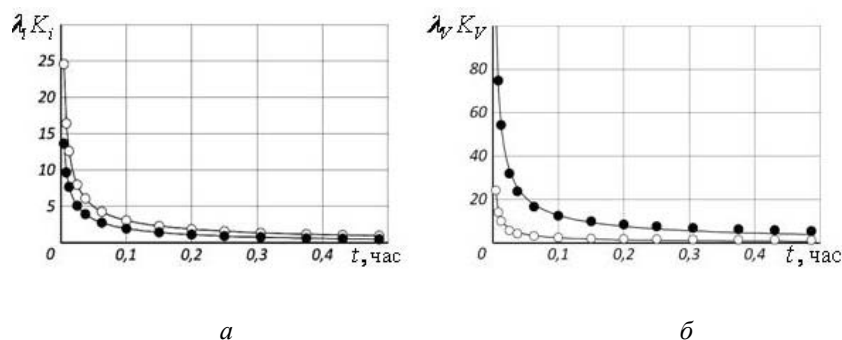


Рис. 1

Дискретные значения ядер интенсивности деформаций ползучести $K_i(t)$ и объемной ползучести $K_v(t)$ полиэтилена ПЭВП в линейной области деформирования, рассчитанные по уравнениям (2.7) и (2.11) и по уравнениям (3.7) и (3.12), нанесены точками на рис. 1, а и б, соответственно (○ – расчеты по уравнениям (2.7) и (3.7); ● – расчеты по уравнениям (2.11) и (3.12)). Линиями нанесены результаты аппроксимации дискретных значений ядер дробно-экспоненциальными функциями (1.12).

4.2. Интенсивность деформаций ползучести. Объемная ползучесть. Методы идентификации ядер наследственности, изложенные в разделах 2 и 3, апробируются, прежде всего, на задачах расчета интенсивности деформаций ползучести $\varepsilon_i(t)$ и де-

формаций объемной ползучести $\varepsilon_v(t)$. Зависимости ε_i от t и ε_v от t задают физические свойства вязкоупругой среды в определяющих уравнениях (1.1).

Для интенсивности деформаций ползучести $\varepsilon_i(t)$ при двухосном комбинированном нагружении растяжением с кручением и $\sigma_i = \text{const}$ из (1.1) с учетом (1.3) и (1.12) получаем уравнение

$$\varepsilon_i(t) = \frac{2(1+\nu)}{3E} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}, \quad (4.3)$$

а для объемной деформации $\varepsilon_v(t)$ с учетом (1.5) и (1.12) – уравнение

$$\varepsilon_v(t) = \frac{1-2\nu}{E} \left\{ \sigma_{11} \left[1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right] \right\}, \quad (4.4)$$

где принято $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}$; $\sigma_0 = \sigma_{11}/3$ (здесь σ_{11} – осевое растягивающее напряжение; τ_{21} – напряжение кручения).

Результаты расчетов интенсивности деформаций ползучести $\varepsilon_i(t)$ и деформаций объемной ползучести $\varepsilon_v(t)$ тонкостенных трубчатых образцов из полиэтилена высокой плотности ПЭВП при совместном нагружении одноосным растяжением и кручением, выполненных по уравнениям (4.3) и (4.4) с использованием приведенных в табл. 1 и 2 значений упругих постоянных и реологических параметров, сопоставлены на рис. 2 с экспериментальными данными. Результаты расчетов нанесены линиями, а экспериментальные данные – точками.

Интенсивность деформаций ползучести $\varepsilon_i(t)$ (рис. 2, а) и деформаций объемной ползучести $\varepsilon_v(t)$ (рис. 2, б) рассчитаны для значений интенсивности напряжений $\sigma_i = 2,28$ МПа и среднего напряжения $\sigma_0 = 0,59$ МПа ($\sigma_{11} = 1,77$; $\tau_{21} = 0,83$ МПа) (кривые 1; ○) и для значений $\sigma_i = 4,56$ МПа и $\sigma_0 = 1,18$ МПа ($\sigma_{11} = 3,54$; $\tau_{21} = 1,66$ МПа) – (кривые 2; ●).

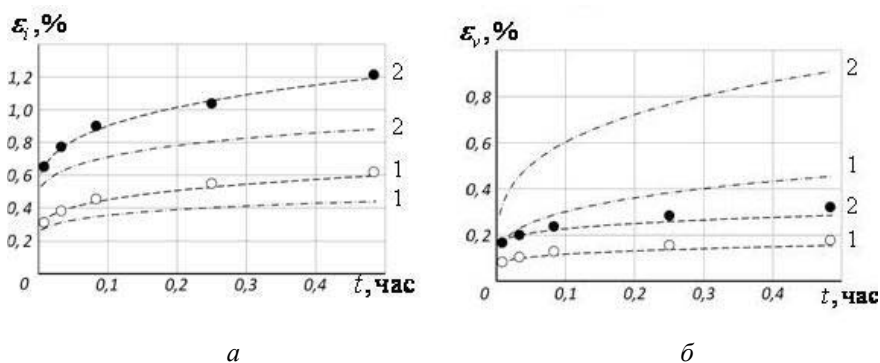


Рис. 2

Здесь и далее результаты расчетов, выполненные с использованием параметров ядер наследственности, которые определены, исходя из соотношений (2.7) и (2.11), нанесены штриховыми линиями, а исходя из соотношений (3.7) и (3.12) – штрихпунктирными линиями.

4.3. Продольная, поперечная и сдвиговая ползучесть. Решим задачу расчета деформаций продольной и поперечной ползучести тонкостенных трубчатых образцов при одноосном растяжении и растяжении с кручением, а также деформаций сдвиговой ползучести при чистом кручении и кручении с растяжением. Решение строится на

основе трехмерной модели вязкоупругости (1.1) с использованием значений упругих постоянных и значений параметров ядер наследственности, приведенных в табл. 1 и 2.

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(t)$ при комбинированном нагружении тонкостенных трубчатых образцов одноосным растяжением с кручением и соответствующие компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(t)$ записываются в виде

$$\sigma_{ij}(t) = h(t) \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}; \quad \varepsilon_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}(t) & \varepsilon_{21}(t) & 0 \\ \varepsilon_{12}(t) & \varepsilon_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(t) \end{Bmatrix}, \quad (4.5)$$

где σ_{11} – одноосное растягивающее напряжение; τ_{21} – касательное напряжение кручения; $\varepsilon_{11}(t)$, $\varepsilon_{22}(t)$, $\varepsilon_{33}(t)$ – продольная и поперечные деформации ползучести, соответственно; $\varepsilon_{21}(t)$ – сдвиговая деформация ползучести; $h(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Для компонент тензора деформаций ползучести $\varepsilon_{ij}(t)$ из (1.1) следует уравнение

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i, t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t), \quad (4.6)$$

откуда для деформаций продольной ползучести $\varepsilon_{11}(t)$ при двухосном комбинированном нагружении растяжением с кручением при $\sigma_{11} = \text{const}$ и $\tau_{21} = \text{const}$ с учетом (1.3) и (1.12) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) = & \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_{11} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right\} + \\ & + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{11} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

а для деформаций поперечной ползучести $\varepsilon_{22}(t)$ и $\varepsilon_{33}(t)$ – уравнение

$$\varepsilon_{22}(t) = \varepsilon_{33}(t) = -\nu \varepsilon_{11}(t) \quad (4.8)$$

и для деформаций сдвиговой ползучести $\varepsilon_{21}(t)$ – уравнение

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{1}{2G} \tau_{21} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right\}^k. \quad (4.9)$$

Результаты расчетов деформаций продольной $\varepsilon_{11}(t)$ и сдвиговой $\varepsilon_{21}(t)$ ползучести тонкостенных трубчатых образцов из полиэтилена высокой плотности ПЭВП, выполненных по уравнениям (4.7) и (4.9) с использованием приведенных в табл. 1 и 2 значений упругих постоянных и параметров ядер наследственности, сопоставлены на рис. 3 с экспериментальными данными. Результаты расчетов нанесены линиями, а экспериментальные данные – точками.

Деформации продольной ползучести (рис. 3, а) и деформации сдвиговой ползучести (рис. 3, б) рассчитаны при напряжениях $\sigma_{11} = 1,77$ МПа и $\tau_{21} = 0,83$ МПа (кривые 1; ○) и при напряжениях $\sigma_{11} = 3,54$ МПа и $\tau_{21} = 1,66$ МПа (кривые 2; ●).

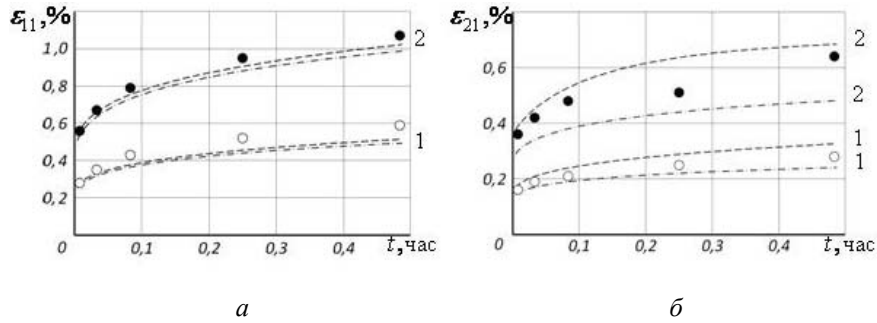


Рис. 3

4.4. Релаксация напряжений. Решим задачу расчета релаксации нормальных и касательных напряжений в тонкостенных трубчатых образцах при одноосном растяжении, чистом кручении и растяжении с кручением. Решение строим на основе трехмерной модели вязкоупругости (1.2) с использованием значений упругих постоянных и значений параметров ядер наследственности, приведенных в табл. 1 и 2.

Компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(t)$ и соответствующие им компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(t)$ при комбинированном деформировании тонкостенных трубчатых образцов одноосным растяжением с кручением записываем в виде

$$\varepsilon_{ij}(t) = h(t) \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}; \quad \sigma_{ij}(t) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(t) & \tau_{21}(t) & 0 \\ \tau_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.10)$$

где все обозначения совпадают с принятыми в (4.5).

Для зависящих от времени компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}(t)$ из первого соотношения в (1.2) следует уравнение

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(t, \varepsilon_i)}{\varepsilon_i(t)} \left(\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) \right) + \delta_{ij} \sigma_0(t), \quad (4.11)$$

откуда для нормальной компоненты $\sigma_{11}(t)$ при двухосном комбинированном нагружении растяжением с кручением при $\varepsilon_{11} = \text{const}$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \text{const}$ и $\varepsilon_{21} = \text{const}$ с учетом второго и третьего соотношения в (1.2) и второго соотношений в (1.12) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(t) = & \frac{2}{3} E \varepsilon_{11} \left[1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma(1+(1+n)(1+\alpha_i))} \right] + \\ & + \frac{1}{3} E \varepsilon_{11} \left[1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_v + \beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma(1+(1+n)(1+\alpha_v))} \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

а для касательной компоненты $\tau_{21}(t)$ – уравнение

$$\tau_{21}(t) = 2G \varepsilon_{21} \left[1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma(1+(1+n)(1+\alpha_i))} \right]. \quad (4.13)$$

Результаты расчетов релаксации нормальных $\sigma_{11}(t)$ и касательных $\tau_{21}(t)$ напряжений в тонкостенных трубчатых образцах из полиэтилена ПЭВП, выполненных по уравнениям (4.12) и (4.13) с использованием приведенных в табл. 1 и 2 значений уп-

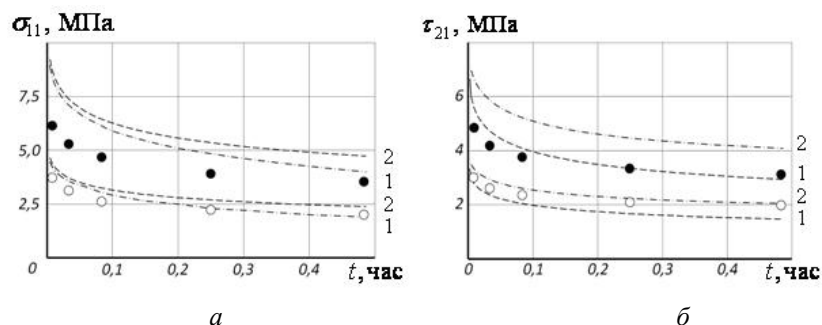


Рис. 4

ругих постоянных и параметров ядер наследственности, сопоставлены на рис. 4 с экспериментальными данными. Результаты расчетов нанесены линиями, а экспериментальные данные – точками.

Релаксация нормальных σ_{11} (рис. 4, а) и касательных τ_{21} (рис. 4, б) напряжений рассчитана при начальных значениях деформаций $\varepsilon_{11} = 0,71$ и $\varepsilon_{21} = 0,61\%$ (кривые 1; ○) и $\varepsilon_{11} = 1,41$ и $\varepsilon_{21} = 1,22\%$ (кривые 2; ●).

§5. Анализ полученных результатов.

Эффективность сформулированных в работе методов идентификации скалярных ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии основана на решении задач расчета деформаций ползучести и релаксации напряжений тонкостенных трубчатых элементов. Рассмотрено комбинированное нагружение трубчатых элементов растяжением с кручением. Рассчитаны – объемная деформация ползучести, интенсивность деформаций ползучести, деформации продольной, поперечной и сдвиговой ползучести, а также релаксация осевых и касательных напряжений. Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными.

В целом, как это следует из данных, приведенных на рис. 2 – 4, получено вполне удовлетворительное согласование результатов расчетов с результатами экспериментов. Максимальная погрешность при расчетах деформаций ползучести и релаксации напряжений в линейной области не превышает 20% и получена для деформаций сдвиговой ползучести ε_{21} (см. рис. 3, б) и релаксации напряжений кручения τ_{21} (см. рис. 4, б). Характерно, что результаты расчетов практически не зависят от того, какая система базовых экспериментов использована для идентификации ядер наследственности и определения параметров ядер.

Несколько отличающимися от приведенных выше оценок представляются результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных объемной ползучести (см. рис. 2, б). Как видно, расчеты, выполненные с использованием параметров ядер объемной ползучести, полученных по ядрам продольной и поперечной ползучести (штриховые линии), также весьма удовлетворительно согласуются с экспериментом. Однако, в случае использования в расчетах параметров ядер объемной ползучести, полученных по ядрам продольной и сдвиговой ползучести (штрих-пунктирные линии), погрешность между расчетными и экспериментальными данными может достигать 60%. Это может быть объяснено тем обстоятельством, что в этих расчетах коэффициент Пуассона принят постоянным, тогда как в действительности он зависит от времени. В первом случае зависимость коэффициента Пуассона от времени учитывается косвенно (за счет замеров поперечных деформаций ползучести).

Приведенные на рис. 2 – 4 результаты удовлетворительного согласования расчетных и экспериментальных данных получены для комбинации нормальных σ_{11} и касательных τ_{21} напряжений, удовлетворяющих условию линейности (4.2). Это условие

сформулировано для сложного напряженного состояния и предполагает, что при любом фиксированном времени t_i интенсивности деформаций ползучести $\varepsilon_i(t)$ находятся в таком же отношении друг к другу, как и интенсивности напряжений σ_i .

Дополнительным подтверждением справедливости условия линейности (4.2) могут служить результаты сопоставления расчетных и экспериментальных значений деформаций осевой (рис. 5, а) и сдвиговой (рис. 5, б) ползучести при уровнях нормальных и касательных напряжений, не удовлетворяющих условию (4.2). Деформации осевой $\varepsilon_{11}(t)$ и сдвиговой $\varepsilon_{21}(t)$ ползучести были рассчитаны при напряжениях $\sigma_{11} = 1,77$ МПа; $\tau_{21} = 0,83$ МПа (○) и $\sigma_{11} = 3,54$ МПа; $\tau_{21} = 1,66$ МПа (●), удовлетворяющих условию (4.2), а также при напряжениях $\sigma_{11} = 5,31$ МПа; $\tau_{21} = 2,49$ МПа (⊖) и $\sigma_{11} = 7,08$ МПа; $\tau_{21} = 3,32$ МПа (⊕), не удовлетворяющих условию (4.2). Максимальная погрешность в первом случае не превышает, как уже отмечалось, 20%, тогда как во втором случае она может достигать 300%.

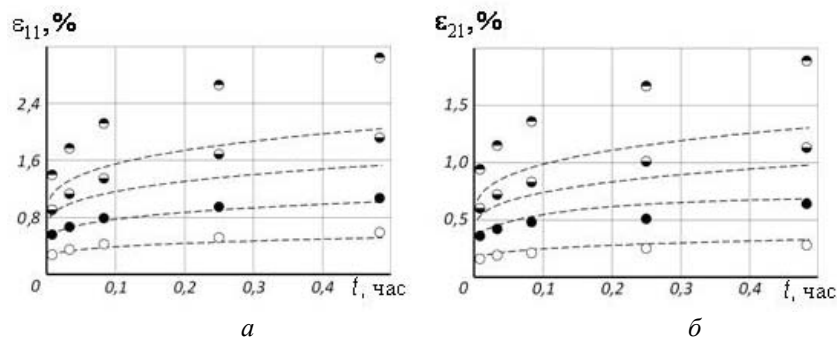


Рис. 5

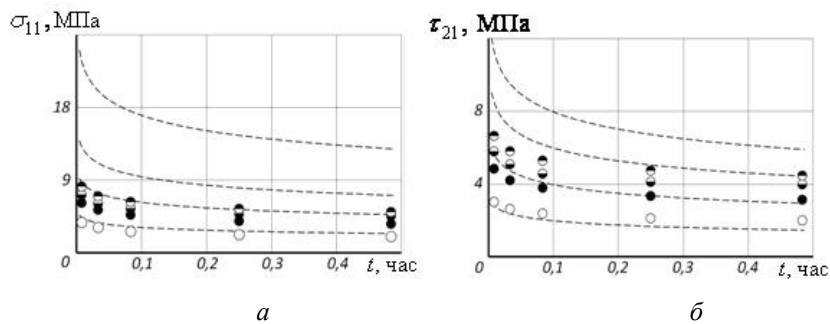


Рис. 6

Аналогичные оценки получены и по результатам сопоставления расчетных и экспериментальных данных релаксации нормальных (рис. 6, а) и касательных (рис. 6, б) напряжений. Релаксация нормальных $\sigma_{11}(t)$ и касательных $\tau_{21}(t)$ напряжений рассчитана при значениях деформаций $\varepsilon_{11} = 0,71\%$; $\varepsilon_{21} = 0,61\%$ (○) и $\varepsilon_{11} = 1,41\%$; $\varepsilon_{21} = 1,22\%$ (●), когда удовлетворялось условие линейности (4.2), а также при значениях деформации $\varepsilon_{11} = 2,12\%$; $\varepsilon_{21} = 1,84\%$ (⊖) и $\varepsilon_{11} = 2,83\%$; $\varepsilon_{21} = 2,45\%$ (⊕), когда условие линейности (4.2) не выполнено. Максимальная погрешность в первом случае, как и при сопоставлении расчетных и экспериментальных значений деформаций ползучести, не превышает 20%. Во втором случае максимальная погрешность также может достигать 300%.

Заклученне.

Один из эффективных методов определения параметров ядер наследственности при сложном напряженном состоянии может быть основан на использовании соотношений, устанавливающих зависимость между ядрами, задающими вязкоупругие свойства при сложном и одномерном напряженных состояниях. Для изотропных вязкоупругих материалов в качестве ядер наследственности при сложном напряженном состоянии могут быть использованы ядра интенсивности ползучести и ядра объемной ползучести. В качестве ядер наследственности при одномерном напряженном состоянии могут быть использованы ядра продольной, поперечной и сдвиговой ползучести.

РЕЗЮМЕ. Встановлено залежності між ядрами спадковості, що задають скалярні властивості ізотропних лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану, та ядрами повзучості, що отримані за умов одновісного розтягу та чистого скручення. Визначальні рівняння обрано у формі, що відповідає гіпотезі пропорційності дівіаторів. Розв'язано та апробовано експериментально задачі розрахунку деформацій повзучості та релаксації напружень тонкостінних трубчатих елементів за умов комбінованого навантаження розтягом із скрученням.

1. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с использованием весовых функций // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 70 – 80.
2. Ильин В.П., Мальцев Л.Е., Соколов В.Г. Расчет строительных конструкций из вязкоупругих материалов. – Ленинград: Стройиздат, 1991. – 190 с.
3. Колтунов А.А. Метод определения объемных и сдвиговых характеристик упруго-вязких наследственных сред по экспериментам на одноосное растяжение (сжатие) // Механика полимеров. – 1969. – № 4. – С. 754 – 758.
4. Крегерс А.Ф., Кулевич М.Р. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений // Механика композитных материалов. – 1985. – № 2. – С. 195 – 201.
5. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. An Introduction. – New-York and London: Academic Press Inc., 1971. – 338 p.
6. Ferry J.D. Viscoelastic properties of polymers. 2nd ed. – New-York: John Willey and Sons, 1981. – 633 p.
7. Findley W.N., Lai J.S., Onaran K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976. – 367 p.
8. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. 1. Superposition of Shear and Bulk Creep // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N2. – P. 165 – 175.
9. Golub V.P., Ragulina V.S., Fernati P.V. Determining the Parameters of the Hereditary Kernels of Nonlinear Viscoelastic Isotropic Materials in Torsion // Int. App. Mech. – 2015. – 51, N 2. – P. 196 – 206.
10. Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chernov Ivan Yu.A. Initial Fracture of a Viscoelastic Isotropic Plate with Two Collinear Cracks of Equal Length // Int. App. Mech. – 2014. – 50, N 3. – P. 310 – 321.
11. Rabotnov Y.N. Creep problems in structural members. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. – 822 p.
12. Rudin W. Principle of Mathematical Analysis. – New-York: McGraw-Hill Inc., 1976. – 342 p.
13. Schapery R.A. Nonlinear Viscoelastic and Viscoplastic Constitutive Equations Based on Thermodynamics // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 1997. – N 1. – P. 209 – 240.
14. Schapery R.A. Nonlinear Viscoelastic and Viscoplastic Constitutive Equations with Growing Damage // Int. Fracture – 1999. – 97, N 1. – P. 33 – 66.
15. Ward I.M. Mechanical properties of solid polymers. – New York: Willey and Sons, 1971. – 345 p.

Поступила 10.11.2015

Утверждена в печать 05.07.2016