

А. В. Константинов¹, О. С. Лимарченко²,
В. Н. Мельник², И. Ю. Семенова²

ЗАДАЧА О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ РЕЗЕРВУАРА
НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ЖИДКОСТЬЮ
СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

¹Институт математики НАН Украины,

ул. Терещенковская, 3, 01601, Киев, Украина; e-mail: akonst.im@mail.ru;

²Киев. нац. ун-т им. Т.Г.Шевченко, просп. Глушкова, 4е, 01033, Киев, Украина;
e-mail: olelim2010@yahoo.com

Abstract. A nonlinear dynamics of mechanical system “reservoir – liquid with free surface” is considered for the generalized Faraday problem in the case of reservoir of cylindrical shape. In contrast to the classical statement of Faraday problem, an additional degree of freedom is assumed in the system – a possibility of reservoir transverse motion in the horizontal plane. Second, additionally, the reservoir can undergo the vertical harmonic oscillations both by a given law (like the classical Faraday problem) and under action of the vertical force. Third, a case of parametric oscillations of liquid free surface is considered for reservoirs of non-cylindrical shape. It is shown that in the presence of an additional degree of freedom the dynamical processes in the system are developed as some aggregate of parametric resonance and forced oscillations. In this case, the system can oscillate nonlinearly both owing to kinematic perturbations and dynamical (force) excitation. It is established also how the inclinations of reservoir walls effect a development of parametric oscillations.

Key words: nonlinear dynamics, combined motion, generalized Faraday problem, parametric resonance, effect of inclinations of reservoir walls.

Введение.

Задача о параметрическом резонансе механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» практически всегда рассматривается для случая цилиндрического резервуара, совершающего заданное движение в вертикальном направлении. В последнее время постановки задач о параметрических колебаниях в системе «резервуар – жидкость» усложнились за счет рассмотрения движения с дополнительными степенями свободы: допускается горизонтальное и наклонное движение резервуара, а также задача рассматривается в совместной постановке [1, 2]. В тоже время задача Фарадея для случая резервуаров нецилиндрической формы до недавнего времени не исследована, хотя во многих практически важных случаях резервуары имеют нецилиндрическую форму [10, 11]. Смена формы резервуара имеет двойное значение. Во-первых, меняется наклон стенок и площадь плоской части дна, что представляется особо важным при вертикальных движениях системы. Во-вторых, форма резервуара определяет величину отношения подвижной части жидкости к общей. Известно, что при колебаниях жидкости только незначительная часть объема жидкости у свободной поверхности движется активно, тогда как амплитуды движения в донной части сильно убывают с ростом глубины. Если в цилиндре объем донной части жидкости велик, то в резервуарах нецилиндрической формы он значительно меньше (например, в перевернутом конусе он в три раза меньше чем в цилиндре такого же ра-

диуса у свободной поверхности как и в конусе), что предопределяет существенно больший вклад подвижности жидкости в формирование процессов при учете совместного характера движения резервуара с жидкостью [1, 2, 8 – 12].

Как уже было показано [1] для случая цилиндрического резервуара, исследование задачи в совместной постановке приводит к значительно более сложным эффектам и, прежде всего, к смещению проявления эффектов по частоте. Причем для резервуаров в форме тел вращения с формой, сужающейся ко дну, такое смещение частот будет более существенным по сравнению со случаем цилиндра [10, 11].

По сравнению со случаем классической постановки задачи Фарадея о развитии параметрических колебаний жидкости со свободной поверхностью [3 – 7] предложены следующие обобщения:

рассмотрен резервуар в форме усеченного конуса (рассмотрено несколько вариантов, когда размер дна менялся от точки до случая днища цилиндра);

наряду со случаем, когда резервуар движется вертикально по заданному гармоническому закону, рассмотрен случай строго вертикального движения резервуара под действием силы, меняющейся по гармоническому закону;

принята возможность движения резервуара в горизонтальном направлении.

Исследование проведено на основе нелинейной динамической модели совместного движения резервуара и жидкости, в которой в отличие от большинства современных подходов, не применяется гипотеза о возможности пренебрежения колебаниями на собственных частотах системы (анализ показал, что учет колебаний свободной поверхности жидкости на собственных и комбинационных частотах является определяющим для большинства динамических эффектов, включая сам факт возможности выхода системы на режим установившихся колебаний). Исследование выполнено на основе многомодовой модели (10 форм колебаний свободной поверхности жидкости) совместного движения жидкости и резервуара [10]. При этом существенное внимание уделено выполнению условий разрешимости краевой задачи Неймана для потенциала скоростей жидкости, что позволило построить решения, которые с высокой точностью удовлетворяют условиям непротекания на стенках жидкости не только под свободной поверхностью в невозмущенном состоянии, но и на гребнях волн над уровнем невозмущенной свободной поверхности.

1. Объект исследования и математическая модель.

Рассмотрим резервуар в форме перевернутого усеченного конуса, частично заполненный жидкостью. Резервуар полагается абсолютно твердым телом, которое движется поступательно; жидкость считаем идеальной, несжимаемой, однородной, а ее начальное движение безвихревым. В классической постановке задачи Фарадея резервуар совершает только вертикальные движения по заданному гармоническому закону $\varepsilon_z = H_z \cos pt$, а в обобщенной задаче Фарадея резервуар может также перемещаться поступательно в горизонтальной плоскости вдоль поперечной оси OY . Кроме того, рассмотрено обобщение задачи Фарадея, когда резервуар движется только вертикально под действием силы, а также с возможностью поступательного движения в горизонтальной плоскости вдоль оси OY . Поступательные перемещения резервуара вдоль осей OZ и OY задаются переменными $\varepsilon_z, \varepsilon_y$, соответственно; H_z, p – амплитуда и частота внешнего параметрического воздействия, F_z – функция внешней вертикальной силы. Величина внешней вертикальной силы F_z подбирается таким образом, чтобы обеспечить резервуару такое же ускорение вдоль оси OZ , как и в случае классической задачи Фарадея.

Согласно методу работы [10], математическая модель системы “резервуар – жидкость со свободной поверхностью” в резервуаре нецилиндрической формы строится на основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского

$$\delta I = 0, \quad \text{где} \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при этом функция Лагранжа задается в классической форме Гамильтона – Остроградского как разность между кинетической и потенциальной энергией

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}_3 \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \frac{1}{2} \rho g \int_S (\xi^2 - H^2) dS + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon},$$

где ρ – плотность жидкости; τ – область, занимаемая жидкостью; $d\tau = r dr d\theta dz$ – элемент объема в цилиндрических координатах, причем ось Oz направлена противоположно вектору ускорения свободного падения \vec{g} , а система координат неподвижно связана с резервуаром; φ – потенциал скоростей жидкости; ξ – возмущение свободной поверхности жидкости по отношению к невозмущенной свободной поверхности некапиллярной жидкости; S – поперечное сечение цилиндрического резервуара; H – глубина жидкости в резервуаре; M_{res} – масса резервуара; M_{liq} – масса жидкости; $\vec{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$ – вектор перемещения резервуара; \vec{F} – главный вектор внешних сил, действующих на стенки резервуара; $\vec{\nabla}_3 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}$, $\vec{\nabla}_2 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Основная идея решения задачи в вариационной постановке заключается в сведении описания задачи к минимальному числу независимых переменных, описывающих движение резервуара с жидкостью, т.е. фактически требуется построить разложения искомых переменных, удовлетворяющие всем кинематическим граничным условиям. Так как безвихревое движение идеальной однородной несжимаемой жидкости полностью определяется движением ее границ, возмущения свободной поверхности жидкости ξ и радиус-вектор перемещения резервуара $\vec{\varepsilon}(t)$ полностью характеризуют движение объема жидкости и поэтому потенциал скоростей жидкости φ следует считать зависимой переменной.

Нелинейная краевая задача динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью в отличие от цилиндрического случая содержит сложности при решении, связанные с тем, что область определения формы возмущенной поверхности изменяется во времени и не совпадает с невозмущенной свободной поверхностью. Поэтому для описания движения жидкости и по аналогии с работами [2, 10] вводится недекартова параметризация области, занимаемой жидкостью τ , т.е.

$$\alpha = \frac{r}{f(z)}; \quad \beta = \frac{z}{H}. \quad (1)$$

Здесь $r = f(z)$ – уравнение образующей полости, заданное в цилиндрической системе координат; H – глубина полости, а $z=0$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью жидкости S_0 . В параметрах α , θ , β , которые вводятся вместо цилиндрической системы координат, область, занимаемая жидкостью, принимает цилиндрическую форму $\alpha \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$, а в невозмущенном состоянии $\beta \in [-1,0]$. Поэтому уравнение свободной поверхности жидкости в возмущенном состоянии можно представить в виде, разрешенном относительно β , т.е.

$$\beta = \frac{1}{H} \xi(\alpha, \theta, t).$$

Следуя методике работ [2, 10], разложения искомым переменных представим в виде

$$\xi = \dot{\xi} \cdot \vec{r} + \bar{\xi}(t) + \sum_i a_i \bar{\psi}_i(\alpha) T_i(\theta); \quad \varphi_0 = \sum_i b_i \psi_i(\alpha, \beta) T_i(\theta), \quad (2)$$

причем

$$\bar{\psi}_i(\alpha) = \left. \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right|_{\beta=0} = \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\beta=0}.$$

Условие разрешимости исходной задачи Неймана для потенциала скоростей φ заключается в выполнении граничных условий непротекания: через боковые стенки Σ_0 в невозмущенном состоянии; через возмущенную свободную поверхность S и через продолжение боковой поверхности $\Delta\Sigma$, до которого может достигать жидкость на гребнях волн,

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma + \int_{\Delta\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma + \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0. \quad (3)$$

Выполнение этих кинематических по своей природе условий разрешимости (3) следует производить независимо для каждой поверхности и с высокой точностью. Если граничные условия на стенах в невозмущенном состоянии удовлетворяются на основе решения линейной задачи, то для выполнения условий на свободной поверхности необходимо удовлетворять нелинейным соотношениям

$$\Delta V = V - V_0 = \int_{\tau} d\tau - \int_{\tau_0} d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\int_0^{\xi/H} [f(H\beta)]^2 d\beta \right] \alpha H d\alpha d\theta = 0$$

– для определения величины $\bar{\xi}$ и

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}, \quad \text{при } \beta = \frac{1}{H} \xi(\alpha, \theta, t)$$

для уточненного выполнения граничного условия на свободной поверхности жидкости и исключения нелинейной зависимости между потенциалом скоростей и возмущениями свободной поверхности жидкости. Для удовлетворения граничному условию на продолжении боковой границы $\Delta\Sigma$ применяется метод вспомогательной области [10], который позволил построить координатные функции для большинства практически важных резервуаров (цилиндр, усеченный конус, гиперболоид, параболоид, эллипсоид) с точностью до 10^{-5} на поверхности Σ_0 и с точностью 10^{-3} на продолжении боковой границы $\Delta\Sigma$. Условия на свободной поверхности удовлетворились с точностью до кубических членов.

На основе разработанного метода, базирующегося на идеях аналитической механики, вариационных методов математической физики и асимптотических методов нелинейной механики, построена [2, 10, 11] математическая модель механической системы “резервуар нецилиндрической формы – жидкость со свободной поверхностью” минимальной размерности, позволяющая исследовать поступательные движения механической системы при различных видах кинематического возмущения и динамического возбуждения. Эта модель представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно независимых параметров a_i – коэффициентов разложений в ряд возмущений свободной поверхности

жидкости ξ по формам колебаний свободной поверхности ψ_i и ε_i – компонент вектора перемещений центра невозмущенной свободной поверхности жидкости относительно некоторой неподвижной системы отсчета

$$\begin{aligned} & \sum_i \ddot{a}_i \left\{ V_{ir}^1 + \sum_j a_j V_{irj}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k V_{irjk}^3 \right\} + \\ & + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \bar{U}_r^1 + \sum_i a_i \bar{U}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{U}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \bar{U}_{rijk}^4 \right\} = \\ & = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j V_{ijr}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k V_{ijk}^{3*} + \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & + \dot{\varepsilon} \cdot \left\{ \sum_i \dot{a}_i \bar{U}_{ir}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{U}_{irj}^{3*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \bar{U}_{ijk}^{4*} \right\} - \\ & - g \left\{ \sum_i a_i W_{ir}^2 + \frac{3}{2} \sum_{i,j} a_i a_j W_{ijr}^3 + 2 \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k W_{ijk}^4 \right\} \quad r=1,2,\dots,N; \\ & \frac{\rho}{(M_{rez} + M_{liq})} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\bar{U}_i^1 + \sum_j a_j \bar{U}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{U}_{ijk}^3 \right] \right\} + \ddot{\varepsilon} = \\ & = \frac{F}{(M_{res} + M_{liq})} - g\bar{z}_0 - \frac{\rho}{(M_{res} + M_{liq})} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \left\{ \bar{U}_{ij}^2 + 2 \sum_k a_k \bar{U}_{ijk}^3 \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (4) – (5) включает в себя $N + 3$ уравнений (N – число рассматриваемых форм колебаний жидкости) и описывает динамику совместного движения резервуара и жидкости при различных видах кинематического возмущения и динамического возбуждения. Уравнения (4) описывают динамику амплитуд a_i форм колебаний свободной поверхности жидкости, а уравнения (5) – динамику поступательного движения резервуара ε_i , однако эти уравнения взаимозависимы и включают силы взаимодействия между компонентами механической системы.

Совокупность коэффициентов, входящих в уравнения (4) – (5), определяет свойства рассматриваемой механической системы и особенности проявления в ней внутренних линейных и нелинейных связей. Эти коэффициенты определяются через квадратуры от решения краевой задачи по определению форм колебаний свободной поверхности жидкости для произвольного числа форм колебаний жидкости [10].

2. Обобщение классической задачи Фарадея для случая колебаний жидкости в баке в форме усеченного конуса.

Все численные примеры выполнены для случаев усеченного конического резервуара на основе расчетной схемы работ [2, 10] при учете десяти форм колебаний жидкости и в рамках нелинейной модели, принимающей во внимание совместный характер движения резервуара и жидкости со свободной поверхностью.

Прежде всего рассмотрим случай неклассической задачи Фарадея для случая начальных возмущений жидкости по оси Ox с амплитудами 0,02; 0,05; 0,08; 0,1 для усеченных конических резервуаров с радиусами днищ $R = 0$; $R = 0,25$; $R = 0,5$; $R = 0,75$; $R = 1,00$ (заметим, что первый вариант соответствует неусеченному конусу, а последний вариант – цилиндру).

Рассмотрена задача, когда система приводится в движение вертикальной силой, частота которой в два раза больше собственной частоты по первой форме, а амплитуда силы принималась равной половине веса системы. Результаты исследований приведены в таблице, где представлены максимумы наблюдаемых волн и время их проявления.

$a_2(0)$	Таблица максимумов									
	R=0		R=0,25		R=0,5		R=0,75		R=1	
	max	t_{\max}	max	t_{\max}	max	t_{\max}	max	t_{\max}	max	t_{\max}
0,02	0,105	48,42	0,1094	46,7	0,1101	43,17	0,112	40,25	0,1149	38,12
0,05	0,1074	26,36	0,1118	24,38	0,1126	22,54	0,1146	22,63	0,1165	21,44
0,08	0,1188	14,31	0,1216	13,22	0,1226	12,21	0,1242	13,02	0,125	12,33
0,1	0,1303	10,31	0,1326	9,51	0,1334	8,78	0,1347	9,83	0,1356	7,75

Анализ табличных данных позволяет сделать следующие выводы. Независимо от амплитуды начальных возмущений в системе устанавливаются подобные предельные волны, при этом чем больше начальное возмущение в системе, тем меньше времени требуется на выход на предельную волну. Если обратить внимание на влияние наклона стенок и площади днища на величины предельных волн, то видно, что максимальные волны развиваются в случае цилиндрического резервуара, когда площадь днища максимальна, а отклонение формы резервуара от цилиндрической минимально. Такая зависимость монотонна и в случае неусеченного конуса (площадь днища ноль, наклон стенок по сравнению с цилиндрической формой максимален) амплитуда предельной волны минимальна. В целом зависимость предельных волн от наклона стенок резервуара является достаточно слабой (отличия не превышают 10% для рассматриваемых случаев). Типичные картины волн представлены на рис. 1, 2 (рис. 1 соответствует случаю обратного конуса, а рис. 2 – случаю цилиндра; в обоих случаях принималось начальное возмущение по первой антисимметричной форме с амплитудой 0,1 радиуса свободной поверхности). При этом заметен эффект модуляции колебаний, который в классической задаче Фарадея не проявляется и обусловлен фактором совместности движения резервуара с жидкостью при возбуждении движения силой, приложенной к резервуару в вертикальном направлении.

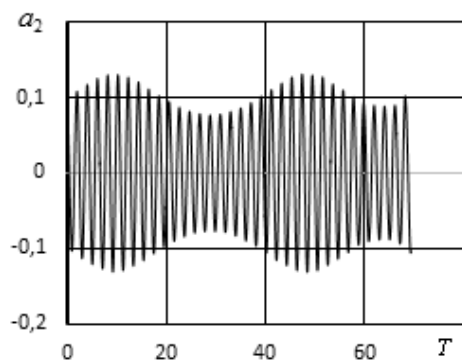


Рис. 1

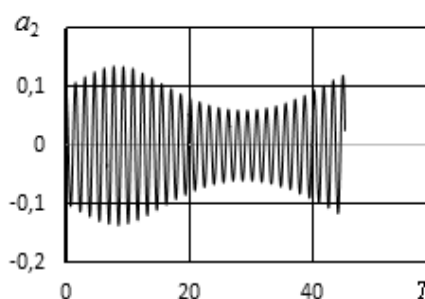


Рис. 2

Рассмотрим также случай развития колебаний на свободной поверхности в резервуаре конической формы при заданных вертикальных движениях резервуара, однако для случая, когда резервуар может совершать совместные движения в горизонтальном направлении, обусловленные взаимодействием жидкости со стенками резервуара.

Для сравнения рассмотрим случай, когда движение резервуара в поперечном направлении исключается (классическая задача Фарадея). В обоих случаях начальное возмущение по первой форме принимается с амплитудой 0,025, а вертикальные колебания системы происходят с амплитудой 0.01 на удвоенной собственной частоте колебаний по первой антисимметричной форме. Важно отметить, что для классической и неклассической постановок задач частоты колебаний будут отличаться. Так, собственная частота колебаний по первой форме в классической задаче Фарадея будет 3,13209 Гц (совпадает с парциальной частотой), тогда как частота совместных колебаний жидкости со свободной поверхностью по первой форме с учетом совместности движения жидкости и резервуара будет 5,36356 Гц (для случая, когда масса резервуара равно 13,8% от массы жидкости). Изменение частот происходит более чем в 1,7 раза. Соответственно, параметрические резонансы происходят для классической и неклассической задач Фарадея на разных частотах. Результаты определения роста амплитуды колебаний жидкости на стенке резервуара во времени для классической и неклассической задач Фарадея представлены на рис. 3 и 4, соответственно.

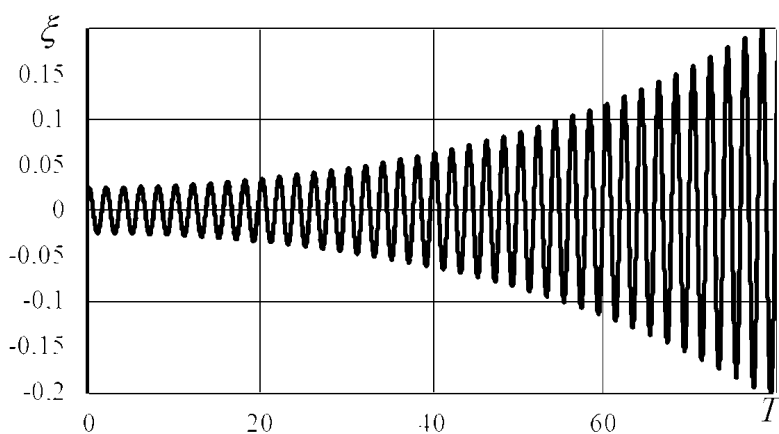


Рис. 3

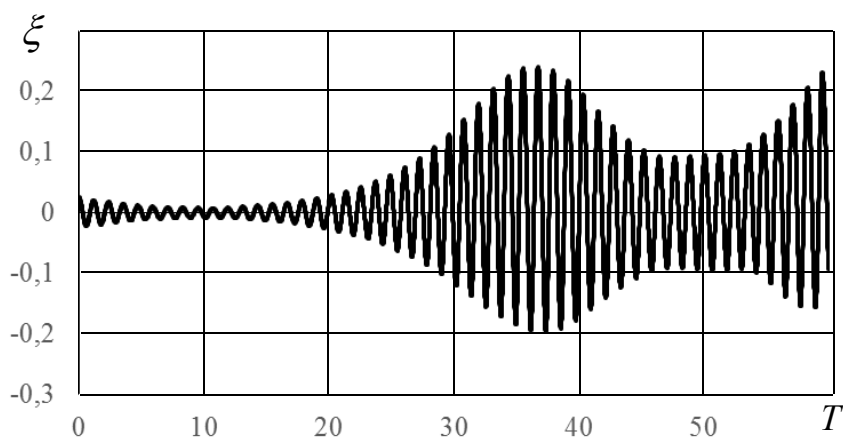


Рис. 4

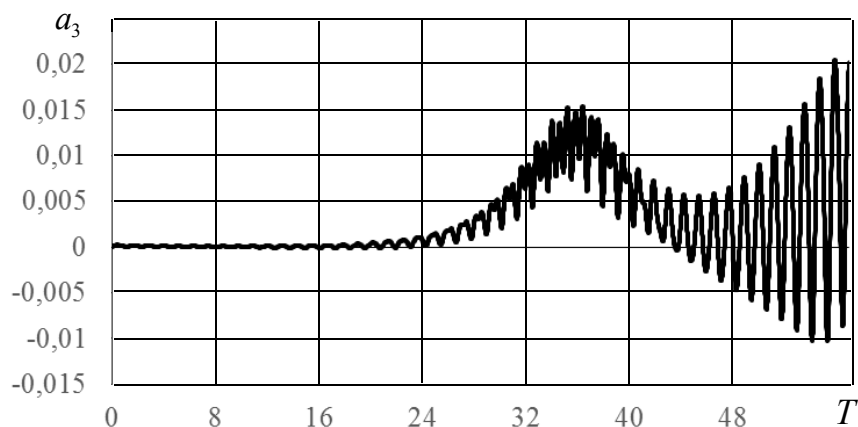


Рис. 5

Отметим, что в случае классической задачи Фарадея рост возмущений жидкости на стенке резервуара происходит с огибающей, меняющейся монотонно. В тоже время в случае неклассической задачи изменение амплитуд колебаний жидкости на стенке происходит при наличии существенной модуляции. Анализ изменения амплитуды осесимметричной формы a_3 как показателя степени нелинейности процессов также значительно отличается (рис. 5). Если для классической задачи Фарадея амплитуда a_3 также меняется монотонно, то в неклассической варианте задачи Фарадея с учетом совместности движения жидкости и несущего тела характер изменения a_3 сложнее. Так, в моменты времени между 32 и 40 сек происходит увеличение амплитуд колебаний на свободной поверхности и a_3 растет. Такой рост a_3 отображает нелинейность профилей волн, когда высота гребня волны превышает глубину впадины. Таким образом, в неклассическом варианте задачи Фарадея сильнее и раньше во времени проявляются нелинейные эффекты. Заметим также, что эффекты совместности движения в системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» для случая конического резервуара проявляются существенно, чем для случая цилиндрического резервуара. Это обусловлено тем, что в коническом резервуаре зона малоподвижной жидкости у дна значительно меньше, чем в случае цилиндрического резервуара. В модели системы это связано с изменением величины коэффициента \vec{U}_r^1 , определяющего меру взаимосвязи движения по форме колебаний r (в данном случае первой антисимметричной формы) с параметром поступательного движения резервуара.

Выводы.

В работе исследована нелинейная динамика механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» в обобщенной задаче Фарадея, когда рассмотрены резервуары нецилиндрической формы с разными наклонами стенок, а также в систему вносилась дополнительная степень свободы – возможность поступательного движения резервуара в горизонтальной плоскости за счет колебаний свободной поверхности жидкости.

В отличие от классического случая, когда движение резервуара принято заданным, задача рассмотрена в совместной постановке. Показано, как наклон стенок влияет на рост амплитуды волн на поверхности жидкости в режиме параметрического резонанса. Исследован также случай обобщенной задачи Фарадея для конического резервуара, совершающего заданные вертикальные и совместные с жидкостью горизонтальные движения. Установлено значительное (до 1,7 раз) изменение частот проявле-

ния параметрического резонанса, обусловленных совместностью движения компонент системы (для случая обратного конуса такое увеличение частоты значительно больше, чем в случае цилиндрического резервуара, где объем жидкости у дна существенно больше) и более раннее и существенное проявление нелинейных эффектов взаимодействия по сравнению с классическим вариантом задачи Фарадея.

РЕЗЮМЕ. Досліджено нелінійну динаміку механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" для узагальненої задачі Фарадея у випадку резервуара нециліндричної форми. На відміну від класичної постановки задачі Фарадея, в системі допускається додатковий ступінь свободи – можливість поперечного руху резервуару в горизонтальній площині; також резервуар може виконувати вертикальні гармонічні коливання як за заданим законом (як в класичній задачі Фарадея), так і під дією вертикальної сили. Розглянуто випадок параметричних коливань вільної поверхні рідини для резервуарів нециліндричної форми. Показано, що при наявності додаткового ступеня свободи динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і вимушених коливань. В цьому випадку система може здійснювати нелінійні коливання як за рахунок кінематичних збурень, так і за рахунок динамічного збудження (сили). Встановлено вплив нахилу стінок резервуара на розвиток параметричних коливань.

1. *Константинов О.В., Лимарченко О.С.* Узагальнена задача Фарадея про рух резервуару з рідиною // Фіз.-матем. моделювання та інформац. технології. – 2012. – Вип. 16. – С. 76 – 85.
2. *Лимарченко О.С., Ясинский В.В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – К.: НТТУ КПИ, 1997. – 338 с.
3. *Ibrahim R.A.* Liquid Sloshing Dynamics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 970 p.
4. *Ibrahim R.* Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems // J. of Fluid Engineering. – September 2015. – **135**. – P. 090801-1 – 090801-52.
5. *Ikeda T.* Autoparametric Resonances in Elastic Structures Carrying Two Rectangular Tanks Partially Filled with Liquid // J. Sound and Vibr. // 2007. – **302**, N 4 – 5. – P. 657 – 682.
6. *Ikeda T., Murakami Sh.* Nonlinear Vibrations of Elastic Structures Containing a Cylindrical Liquid Tank under Vertical Excitation // J. Syst. Design and Dynam. – 2008. – **2**, N 3. – P. 822 – 836.
7. *Ikeda T., Murakami Sh., Ushio Sh.* Nonlinear Parametric Vibrations of Elastic Structures Containing Two Cylindrical Liquid-Filled Tanks // J. Syst. Design and Dynam. – 2009. – **3**, N 1. – P. 120 – 134.
8. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances // Int. Appl. Mech. – 2015. – **50**, N 3. – P. 353 – 364.
9. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 12 – 63.
10. *Limarchenko O.S.* Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape // Укр. матем. журн. – 2007. – **59**, № 1. – P. 44 – 70.
11. *Limarchenko O.S., Semenova I.Yu.* Nonlinear wave generation on a fluid in a moving parabolic tank // Int. Appl. Mech. – 2011. – **46**, N 8. – P. 864 – 868.
12. *Limarchenko O.S., Tkachenko R.V.* Influence of Spring Attachment on the Dynamics of a Fluid-Filled Cylindrical Tank on a Moving Platform // Int. Appl. Mech. – 2015. – **50**, N 3. – P. 289 – 294.

Поступила 28.12.2015

Утверждена в печать 05.07.2016