**А . Г . З а б у г а**

## МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРА ТВЕРДЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,*
*ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** Different models of a perfectly inelastic impact of rigid bodies under a plane-parallel motion are compared. For three models, the formulas are obtained for impact impulses that arise under perfectly inelastic impact with friction – for the Kane-Levinson-Whittaker's model that is based on using the kinematic restitution factor, the Routh's model that is based on using the kinetic restitution factor, and the Stronge's model that is based on using the energetic restitution factor. It is shown that the formulas for impact impulses are the same for the models considered above.

**Key words:** perfectly inelastic impact, restitution factor, rigid body, limiting friction factor, Amontons-Coloumb's law.

**Введение.**

Механико-математические модели удара недеформируемых (абсолютно твердых) тел основаны на следующих предположениях [4, 6 – 8, 14, 15, 17]: 1) деформации при ударе являются величинами бесконечно малыми по сравнению с размерами механической системы; 2) силы, с которыми взаимодействуют тела при ударе, являются бесконечно большими по сравнению с другими силами, действующими в механической системе; 3) интервал времени, на протяжении которого происходит удар, является бесконечно малым по сравнению с интервалом времени, на котором изучается движение системы.

Из указанных предположений следует, что удар приводит к мгновенному изменению скоростей точек системы, а их координаты не изменяются при ударе. Вследствие этого при изучении механического удара оказывается более удобным использование не сил, а ударных импульсов, которые представляют собой интегралы от составляющих сил реакции тел в точке их контакта по времени, на протяжении которого происходит удар. Здесь следует заметить, что, вследствие третьего предположения, понятие времени, на протяжении которого происходит удар, имеет смысл только при рассмотрении непосредственно процесса удара, а в случае рассмотрения движения системы можно говорить лишь о моменте времени, когда происходит удар.

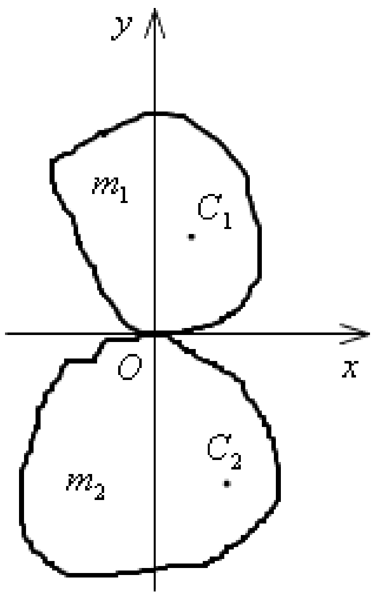
Указанных выше предположений оказывается недостаточно для описания механического удара, поскольку необходимо ещё знать свойства соударяющихся тел. Во всех рассматриваемых здесь моделях предполагается, что закон трения Амонтона – Кулона остается справедливым для нормальной и касательной составляющих ударного импульса в точке контакта соударяющихся тел. Отличие этих моделей заключается только в последнем предположении, где вводится коэффициент восстановления. Так, в модели Кейна – Левинсона – Уиттекера [9, 11, 12, 17] используется кинематический коэффициент восстановления, который, согласно гипотезе Ньютона, равен обратному отношению нормальных составляющих скорости сближения центров масс соударяющихся тел после и до удара. Модель Рауса [4, 5, 8, 14] основывается на применении кинетического коэффициента восстановления, который, согласно гипотезе Пуассона, равен отношению нормальной составляющей ударного импульса на интервале времени от максимального сжатия до окончания удара к нормальной составляющей ударного импульса на интервале времени от начала удара до максимального сжатия. В модели Стронджа [15, 16] применяется энергетический коэффициент восстановления, квадрат которого, согласно гипотезе Стронджа, равен обратному отношению работы нормальной составляющей ударного импульса на интервале времени от максимального сжатия до окончания удара к работе нормальной составляющей ударного импульса на интервале времени от начала удара до максимального сжатия.

В [7, 15] доказано, что в некоторых случаях все три упомянутые модели приводят к одним и тем же результатам. К таким случаям относится соударение без трения, центральный удар (линия, соединяющая центры масс соударяющихся тел, проходит в момент удара через точку их контакта) и удар, при котором скорость скольжения одного из соударяющихся тел относительно другого в точке их контакта не меняет знак на противоположный и не обращается в нуль. Отметим, что именно вследствие того, что в случае систем без трения результат моделирования механического удара не зависит от того, какой из упомянутых коэффициентов восстановления выбрать, во многих учебниках по теоретической механике (например, [1 – 3]) данные коэффициенты вообще не различаются и используется только гипотеза Ньютона.

Целью данного исследования является описание абсолютно неупругого соударения недеформируемых тел при плоскопараллельном движении с помощью трех упомянутых выше моделей.

**§1. Постановка задачи.**

Рассмотрим материальную систему, изображенную на рисунке, где показаны два твердых тела с массами $m_1$ и $m_2$ и центрами масс в точках $C_1$ и $C_2$ в процессе удара. Начало декартовой системы координат $Oxy$ находится в точке контакта твердых тел. Ось $Ox$ направлена вдоль общей касательной, а ось $Oy$ – вдоль общей нормали к поверхности тел $m_1$ и $m_2$. Плоскопараллельное движение тел $m_1$ и $m_2$ происходит в плоскости рисунка. В этой же плоскости находится система координат $Oxy$.




Используя теоремы об изменении количества движения и момента количества движения, и учитывая третий закон Ньютона, определим для изменения скоростей поступательного движения и вращения тел $m_1$ и $m_2$ такие соотношения:

$$\begin{cases} m_1\left(v_{1x}-v_{1x0}\right)=-I_T; \\ m_1\left(v_{1y}-v_{1y0}\right)=I_N; \\ G_1\left(\omega_1-\omega_{10}\right)=-I_N x_1-I_T y_1; \\ m_2\left(v_{2x}-v_{2x0}\right)=I_T; \\ m_2\left(v_{2y}-v_{2y0}\right)=-I_N; \\ G_2\left(\omega_2-\omega_{20}\right)=I_N x_2+I_T y_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $v_{1x}$ и $v_{1x0}$ – направленная вдоль оси $Ox$ составляющая скорости движения центра масс тела $m_1$ после и до удара, соответственно; $v_{1y}$ и $v_{1y0}$ – направленная вдоль оси $Oy$ составляющая скорости движения центра масс тела $m_1$ после и до удара, соответственно; $G_1$ – момент инерции тела $m_1$ относительно оси, которая проходит через его центр масс перпендикулярно плоскости рисунка; $\omega_1$ и $\omega_{10}$ – угловая скорость вращения вокруг этой оси тела $m_1$ после и до удара, соответственно; $x_1$ и $y_1$ – координаты центра масс тела $m_1$ в системе $Oxy$; $I_T$ – касательная (направленная вдоль оси $Ox$) составляющая ударного импульса; $I_N$ – нормальная (направленная вдоль оси $Oy$) составляющая ударного импульса; $v_{2x}$ и $v_{2x0}$ – направленная вдоль оси $Ox$ составляющая скорости движения центра масс тела $m_2$ после и до удара, соответственно; $v_{2y}$ и $v_{2y0}$ – направленная вдоль оси $Oy$ составляющая скорости движения центра масс тела $m_2$ после и до удара, соответственно; $G_2$ – момент инерции тела $m_2$ относительно оси, которая проходит через его центр масс перпендикулярно плоскости рисунка; $\omega_2$ и $\omega_{20}$ – угловая скорость вращения вокруг этой оси тела $m_2$ после и до удара, соответственно; $x_2$ и $y_2$ – координаты центра масс тела $m_2$ в системе $Oxy$.

Основная задача теории механического удара при плоскопараллельном движении заключается в том, чтобы, зная $v_{1x0}$, $v_{1y0}$, $\omega_{10}$, $v_{2x0}$, $v_{2y0}$ и $\omega_{20}$, определить $v_{1x}$, $v_{1y}$, $\omega_1$, $v_{2x}$, $v_{2y}$ и $\omega_2$. Для этого следует, используя уравнения (1.1), определить составляющие ударного импульса $I_N$ и $I_T$, значения которых зависят, в общем случае, от выбора модели механического удара.

Перед тем как перейти к рассмотрению различных моделей механического удара, удобно ввести скорость сближения тел $m_1$ и $m_2$ вдоль оси $Oy$ в точке контакта (нормальная составляющая скорости), значения которой после и до удара обозначим $v_N$ и $v_{N0}$, соответственно, а также скорость скольжения тел $m_1$ и $m_2$ одного относительно другого вдоль оси $Ox$ в точке их контакта (касательная составляющая скорости), значения которой до и после удара обозначим $v_T$ и $v_{T0}$, соответственно. Исходя из кинематики изучаемой системы, получаем для $v_N$, $v_{N0}$, $v_T$ и $v_{T0}$ такие соотношения:

$$\begin{gathered} v_N = v_{2y} - \omega_2 x_2 - v_{1y} + \omega_1 x_1;\ v_{N0} = v_{2y0} - \omega_{20} x_2 - v_{1y0} + \omega_{10} x_1; \\ v_T = v_{1x} + \omega_1 y_1 - v_{2x} - \omega_2 y_2;\ v_{T0} = v_{1x0} + \omega_{10} y_1 - v_{2x0} - \omega_2 y_2. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Исключая из уравнений (1.1) и (1.2)величины $v_{1x}$, $v_{1x0}$, $v_{1y}$, $v_{1y0}$, $\omega_1$, $\omega_{10}$, $v_{2x}$, $v_{2x0}$, $v_{2y}$, $v_{2y0}$, $\omega_2$ и $\omega_{20}$, получим равенства

$$v_N = v_{N0} - aI_N - bI_T;\ v_T = v_{T0} - bI_N - \tilde{a}I_T, \tag{1.3}$$

где введены такие обозначения: $a = 1/m_1 + 1/m_2 + x_1^2/G_1 + x_2^2/G_2$, $\tilde{a} = 1/m_1 + 1/m_2 + {}$ ${} + y_1^2/G_1 + y_2^2/G_2$, $b = x_1 y_1/G_1 + x_2 y_2/G_2$.

Обратим внимание на тот факт, что, поскольку массы и моменты инерции всегда положительны, то, как несложно убедиться, всегда имеют место неравенства: $a > 0$, $\tilde{a} > 0$ и $a\tilde{a} > b^2$.

Отметим, что во всех рассматриваемых в данной работе моделях механического удара шероховатых недеформируемых тел вводится предположение о том, что закон трения Амонтона – Кулона имеет место для нормальной и касательной составляющих ударного импульса [6 – 10, 13 – 15, 17]. Это означает, что необходимо рассматривать *три возможных случая*. В *первом случае* скорость скольжения не обращается в нуль и не меняет знак в процессе удара. При этом закон Амонтона – Кулона имеет вид

$$I_T = -\mu I_N \operatorname{sign} v_{T0}, \tag{1.4}$$

где $\mu$ – коэффициент трения скольжения.

Во *втором случае* скорость скольжения обращается в процессе удара в нуль и сохраняет нулевое значение до окончания удара. При этом имеем равенства

$$I_T = I_{T1} + I_{T2}; \quad I_N = I_{N1} + I_{N2}; \quad I_{T1} = -\mu I_{N1} \operatorname{sign} v_{T0}; \quad I_{T2} = -\frac{b}{\tilde{a}} I_{N2}, \tag{1.5}$$

где $I_{T1}$ и $I_{N1}$ – касательная и нормальная составляющие ударного импульса, соответственно, на интервале времени от начала удара до момента времени, когда скорость скольжения обращается в нуль, а $I_{T2}$ и $I_{N2}$ – касательная и нормальная составляющие ударного импульса, соответственно, на интервале времени от момента времени, когда скорость скольжения обращается в нуль, до окончания удара.

В *третьем случае* скорость скольжения проходит в процессе удара через нуль, меняя знак на противоположный. Закон Амонтона – Кулона для составляющих ударного импульса имеет при таких условиях вид

$$I_T = I_{T1} + I_{T2}; \; I_N = I_{N1} + I_{N2}; \; I_{T1} = -\mu I_{N1} \operatorname{sign} v_{T0}; \; I_{T2} = \mu I_{N2} \operatorname{sign} v_{T0}. \tag{1.6}$$

Определить, какой из трех упомянутых выше случаев имеет место, можно следующим образом. Сначала предполагаем, что имеет место первый случай. Если в результате вычислений полученное значение $v_T$ имеет тот же знак, что и $v_{T0}$, либо $v_T = 0$, тогда указанное предположение является правильным и имеет место первый случай, т.е. справедлива формула (1.4). Если же $v_T$ и $v_{T0}$ имеют разные знаки, тогда имеет место либо второй, либо третий случай. Причем, второй случай, т.е. соотношения (1.5) будут иметь место, если $|b|/\tilde{a} \le \mu$, а третий, т.е. формулы (1.6), – если $|b|/\tilde{a} > \mu$.

**§2. Исследование абсолютно неупругого соударения при плоскопараллельном движении с помощью модели Кейна – Левинсона – Уиттекера.**

Модель Кейна – Левинсона – Уиттекера [9, 17] основана на предположении о том, что для изучаемой системы справедлива гипотеза Ньютона, согласно которой имеет место соотношение

$$e_K = -v_N / v_{N0}, \tag{2.1}$$

где $e_K$ – кинематический коэффициент восстановления, который предполагаем известным. Здесь рассматривается абсолютно неупругий удар, для которого $e_K = 0$. Подставляя $e_K = 0$ в (2.1), получаем, что в случае абсолютно неупругого соударения $v_N = 0$.

В *первом случае* удара с трением, когда скорость скольжения не обращается в нуль и не меняет знак в процессе удара, определим из уравнений (1.3), (1.4) и (2.1), учитывая, что $e_K = 0$, такие значения составляющих ударного импульса:

$$I_N = \frac{v_{N0}}{a - \mu b \operatorname{sign} v_{T0}}; \; I_T = -\mu I_N \operatorname{sign} v_{T0}. \tag{2.2}$$

Формулы (2.2) и уравнения (1.1) представляют собой решение основной задачи механического удара с трением в первом случае. Отметим, что в данном случае соотношения (2.2) будут справедливы также в случае использования моделей Рауса и Стронджа, поскольку, как было указано во введении, все рассматриваемые здесь подходы приводят к одинаковым результатам, если скорость скольжения не меняет знак и не обращается в нуль в процессе удара.

Рассмотрим второй случай удара с трением, когда скорость скольжения обращается в нуль в процессе удара и сохраняет нулевое значение до окончания соударения. Из второго уравнения системы (1.3), учитывая, что $v_T = 0$, получаем

$$I_T = \left(v_{T0} - bI_N\right)/\tilde{a}. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в первое уравнение системы (1.3) и учитывая, что после абсолютно неупругого соударения $v_N = 0,$ получим

$$I_N = \frac{\tilde{a}v_{N0} - bv_{T0}}{a\tilde{a} - b^2}. \tag{2.4}$$

Формулы (1.1), (2.3) и (2.4) представляют собой решение основной задачи механического удара с трением во втором случае в рамках модели Кейна – Левинсона – Уиттекера.

Чтобы применить модель Кейна – Левинсона – Уиттекера в третьем случае удара с трением, удобно выделить два этапа процесса соударения. На первом этапе скорость скольжения уменьшается от начального значения $v_{T0}$ до нуля, на втором – возрастает по модулю от нуля до конечного значения $v_T$ и имеет направление и знак, противоположные направлению и знаку начального значения $v_{T0}$. Применяя к указанным двум этапам те же самые рассуждения, что и при выведении уравнений (1.3), получим

$$\begin{cases} v_{N1} = v_{N0} - aI_{N1} - bI_{T1}; \\ 0 = v_{T0} - bI_{N1} - \tilde{a}I_{T1}; \end{cases} \quad \begin{cases} v_N = v_{N1} - aI_{N2} - bI_{T2}; \\ v_T = -bI_{N2} - \tilde{a}I_{T2}, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $v_{N1}$ – нормальная составляющая скорости после первого этапа соударения. Ясно, что первая система уравнений (2.5) соответствует первому этапу соударения, а вторая – второму, причем составляющие ударного импульса $I_{N1}$, $I_{T1}$, $I_{N2}$ и $I_{T2}$ имеют тот же смысл, что и в формулах (1.6). Несложно убедиться в том, что, складывая уравнения систем (2.5) и учитывая первые два соотношения (1.6), получим уравнения (1.3).

Исключая из уравнений (1.6) и (2.5) неизвестные $v_{N1}$, $I_{N1}$, $I_{T1}$, $I_{N2}$ и $I_{T2}$ и учитывая, что для абсолютно неупругого соударения $v_N = 0$ , получим, что

$$I_N = \frac{v_{N0}\left(b - \mu\tilde{a}\operatorname{sign}v_{T0}\right) + 2\mu b v_{T0}\operatorname{sign}v_{T0}}{\left(a + \mu b\operatorname{sign}v_{T0}\right)\left(b - \mu\tilde{a}\operatorname{sign}v_{T0}\right)}; \; I_T = \mu\left(I_N - \frac{2v_{T0}}{b - \mu\tilde{a}\operatorname{sign}v_{T0}}\right)\operatorname{sign}v_{T0}. \tag{2.6}$$

Формулы (1.1) и (2.6) представляют собой решение основной задачи механического удара с трением в третьем случае в рамках модели Кейна – Левинсона – Уиттекера.

### §3. Исследование абсолютно неупругого соударения при плоскопараллельном движении с помощью моделей Рауса и Стронджа.

Модель Рауса [8, 14] основана на предположении о том, что для изучаемой системы справедлива гипотеза Пуассона, согласно которой имеют место соотношения

$$e_D = I_{NA}/I_{NB}; \; I_{NB} + I_{NA} = I_N, \tag{3.1}$$

где $e_D$ – кинетический (динамический) коэффициент восстановления, который предполагается известным; $I_{NB}$ – нормальная составляющая ударного импульса на интервале времени от начала удара до момента времени, когда достигается максимальное сжатие (т.е. нормальная составляющая скорости обращается в нуль); $I_{NA}$ – нормальная составляющая ударного импульса на интервале времени от момента, когда достигается максимальное сжатие, до окончания удара. Отметим, что значения нормальных составляющих ударного импульса $I_{NB}$ и $I_{NA}$, которые содержатся в (3.1), в общем случае, не совпадают со значениями нормальных составляющих ударного импульса $I_{N1}$ и $I_{N2}$, которые содержатся в (1.5) и (1.6); конечно, всегда справедливо равенство $I_{NB} + I_{NA} = I_{N1} + I_{N2} = I_N$ .

В случае абсолютно неупругого соударения имеем $e_D = 0$. В результате, из уравнений (3.1) определим $I_{NA} = 0$ и $I_{NB} = I_N$. Равенство $I_{NA} = 0$ означает, что абсолютно неупругий удар заканчивается в момент времени достижения максимального сжатия, откуда следует, что использование модели Рауса приводит к равенству $v_N = 0$, т.е. к такому же результату, который был получен ранее при использовании модели Кейна – Левинсона – Уиттекера. Кроме того, как было отмечено выше, уравнения (1.1) – (1.6) и (2.2) справедливы для всех рассматриваемых в данной работе моделей. То же самое относится и к уравнениям (2.3) и (2.5), поскольку они были получены без использования каких-либо предположений относительно выбора типа коэффициента восстановления. Отсюда следует, что соотношения (2.4) и (2.6) для, соответственно, второго и третьего случаев абсолютно неупругого удара с трением также будут справедливы, поскольку они являются следствием равенства $v_N = 0$, а также формул (1.1) – (1.6), (2.3) и (2.5). В итоге приходим к выводу о том, что использование моделей Кейна – Левинсона – Уиттекера и Рауса приводит во всех трех случаях абсолютно неупругого удара с трением к одинаковым результатам.

Рассмотрим, наконец, модель Стронджа [15, 16]. Она основывается на предположении о том, что для изучаемой системы справедлива гипотеза Стронджа, согласно которой имеет место соотношение:

$$e_E^2 = -W_{NA}/W_{NB}, \tag{3.2}$$

где $e_E$ – энергетический коэффициент восстановления, который принимается известным; $W_{NB}$ – работа нормальной составляющей силы реакции в точке контакта на интервале времени от начала удара до момента времени, когда достигается максимальное сжатие; $W_{NA}$ – работа нормальной составляющей силы реакции в точке контакта на интервале времени от момента, когда достигается максимальное сжатие, до окончания удара.

Для использования модели Стронджа следует определить работу нормальной составляющей силы реакции в точке контакта при ударе. Как известно, в случае движения материальной точки по прямой, работа силы может быть определена выражением $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)ds$, где $F(s)$ – проекция силы, действующей на материальную точку, на прямую, вдоль которой движется точка; $s$ – путь, пройденный этой точкой; $[s_1; s_2]$ – интервал пути, на котором вычисляется работа силы $F(s)$. Однако применять определение работы в таком виде в случае удара неудобно, поскольку силы реакции, действующие в процессе удара, являются бесконечно большими величинами, а интервал пути, по которому ведется интегрирование – бесконечно малая величина, поскольку деформации предполагаются пренебрежимо малыми. Поэтому при изучении удара удобно, воспользовавшись соотношением $ds = v(t)dt$, где $v(t)$ – скорость материальной точки, как функция времени $t$, перейти от интегрирования по пути к интегрированию по времени, а затем, воспользовавшись соотношением $F(t)dt = I_F$, где $I_F$ – импульс силы, к интегрированию по импульсу. Совершая указанный переход, получаем $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)ds = \int_{t(s_1)}^{t(s_2)} F(t)v(t)dt = \int_{I_F(s_1)}^{I_F(s_2)} v(I_F)dI_F$, где $t(s_1)$ и $I_F(s_1)$ – значения времени и импульса, соответственно, когда точка прошла путь $s_1$, где $t(s_2)$ и $I_F(s_2)$ – значения времени и импульса, соответственно, когда точка прошла путь $s_2$, и $v(I_F)$ – скорость материальной точки, определенная, как функция импульса $I_F$. Аналогичным образом можно представить входящие в (3.2) работы $W_{NB}$ и $W_{NA}$ (пример с движением материальной точки по прямой был выбран для простоты изложения). В результате получим

$$W_{NB}=\int_0^{I_{NB}}v_N\left(I\right)dI;\quad W_{NA}=\int_{I_{NB}}^{I_N}v_N\left(I\right)dI\quad\left(I_{NB}+I_{NA}=I_N\right),\tag{3.3}$$

где $v_N\left(I\right)$ – нормальная составляющая скорости, как функция ударного импульса $I$. Явный вид функции $v_N\left(I\right)$ может быть получен тем же способом, что и уравнения (1.3) и (2.5), в которые входит нормальная составляющая скорости. Ударные импульсы $I_{NB}$ и $I_{NA}$, входящие в соотношения (3.1) и (3.3), имеют один и тот же смысл, но их значения, полученные при использовании модели Рауса и модели Стронджа, будут, в общем случае, различны.

В случае абсолютно неупругого соударения имеем $e_E=0$. Следовательно, исходя из формул (3.2), получим $W_{NA}=0$. Это означает, что после достижения максимального сжатия нормальная составляющая ударного импульса не выполняет работы. Таким образом, из соотношений (3.3) следует, что $I_{NA}=0$ и $I_{NB}=I_N$. Кроме того, значение ударного импульса $I_{NB}$ достигается по определению при максимальном сжатии, а это значит, что $v\left(I_{NB}\right)=0$. Из всего этого заключаем, что в случае абсолютно неупругого соударения из равенства $I_N=I_{NB}$ следует, что $v_N=v\left(I_N\right)=v\left(I_{NB}\right)=0$. В результате приходим к выводу, что, в случае абсолютно неупругого удара с трением, применение модели Стронджа, так же, как и моделей Кейна – Левинсона – Уиттекера или Рауса, приводит к результату $v_N=0$. Далее, повторяя те же самые рассуждения, что и при использовании модели Рауса, приходим к выводу, что формулы (2.2) – (2.6) будут справедливы и в случае использования модели Стронджа для исследования абсолютно неупругого удара с трением.

Окончательно можно сделать вывод о том, что решение задачи механического удара с трением при плоскопараллельном движении с помощью моделей Кейна – Левинсона – Уиттекера, Рауса и Стронджа будет одним и тем же. Это решение представлено формулами (2.2) – (2.6).

**Заключение.**

Проведено сравнение различных моделей абсолютно неупругого соударения шероховатых недеформируемых тел при плоскопараллельном движении. Выражения для ударных импульсов, которые возникают при абсолютно неупругом ударе с трением, получены для: модели Кейна – Левинсона – Уиттекера, которая основана на использовании кинематического коэффициента восстановления; модели Рауса, которая основана на использовании кинетического коэффициента восстановления, и модели Стронджа, которая основана на использовании энергетического коэффициента восстановления. Доказано, что в случае абсолютно неупругого соударения шероховатых недеформируемых тел при плоскопараллельном движении выражения для ударных импульсов будут одинаковы для моделей Кейна – Левинсона – Уиттекера, Рауса и Стронджа.

Р Е З Ю М Е . Проведено порівняння різних моделей абсолютно непружного удару шорстких недеформівних тіл при плоскопаралельному русі. Формули для ударних імпульсів, що виникають при абсолютно непружному ударі з тертям, отримано для моделі Кейна – Левінсона – Уіттекера, що ґрунтується на використанні кінематичного коефіцієнту відновлення; моделі Рауса, що ґрунтується на використанні кінетичного коефіцієнту відновлення та моделі Стронджа, що ґрунтується на використанні енергетичного коефіцієнту відновлення. Доведено, що у випадку абсолютно непружного удару шорстких недеформівних тіл при плоскопаралельному русі формули для ударних імпульсів будуть однакові для моделей Кейна – Левінсона – Уіттекера, Рауса і Стронджа.

1. *Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики. Т. 2. – М.: Наука, 1979. – 544 с.
2. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. Часть вторая. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
3. *Журавлев В. Ф.* Основы теоретической механики. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
4. *Иванов А. П.* Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Международная программа образования, 1997. – 336 с.
5. *Косарчук В. В., Агарков А.В.* Прогнозирование долговечности рельсов по критерию возникновения трещин контактной усталости // Зб. наук. праць ДЕТУТ. Серія «Техніка і технології». – 2012. – **20**. – С. 77 – 90.
6. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
7. *Gilardi G., Sharf I.* Literature survey of contact dynamics modeling // Mechanism and Machine Theory. – 2002. – **37**. – P. 1213 – 1239.
8. *Goldsmith W.* Impact: The theory and physical behavior of colliding solids. – London: Edward Arnold Ltd, 1960. – 450 p.
9. *Kane T. R., Levinson D. A.* Dynamics. Theory and Applications. – New York: McGraw-Hill Book Company, 2005. – 402 p.
10. *Kubenko V. D.* Stress State of an Elastic Half-Plane under Nonstationary Loading // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 121 – 129.
11. *Larin V. B.* Algorithms for Solving a Unilateral Quadratic Matrix Equation and the Model Updating Problem // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 321 – 334.
12. *Martynyuk A. A., Nikitina N. V.* On Periodic Motion in Three-Dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 369 – 379.
13. *Plakhtienko N. P.* Translation of a Rigid Body with Gravity–Friction Seismic Dampers // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 7. – P. 786 – 796.
14. *Routh E. J.* Dynamics of a system of rigid bodies. – London: Edward Arnold Ltd., 1860. – 450 p.
15. *Stronge W. J.* Impact mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 302 p.
16. *Stronge W. J.* Unraveling Paradoxical Theories for Rigid Body Collisions // ASME J. of Appl. Mech. – 1991. – **58**, N 4. – P. 1049 – 1055.
17. *Whittaker E. T.* A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. – Cambridge: Cambridge University Press, 1917. – 456 p.

Поступила 28.12.2015 Утверждена в печать 05.07.2016