УДК 517.928

©2017. **О. Д. Кичмаренко, Е. В. Платонова**

ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

Асимптотические методы широко используются при исследовании задач оптимального управления. В статье рассматривается приближённый метод решения линейных задач оптимального управления с разрывным оптимальным управлением. В работе Тынянского и Сокола рассмотрена линейная задача оптимального быстродействия, в которой оптимальные управления будут разрывны. Ими предложен приближённый метод решения задачи оптимального быстродействия. На основании этого метода предложены способы построения множества допустимых управлений, которые обеспечивают гладкость оптимальных управлений и близость траекторий приближённой и исходной задач управления. Предложенный способ построения множества допустимых управлений позволяет построить приближение для множества в пространствах R^2, R^3 и больших размерностей. Рассмотрен приближённый способ построения множества достижимости. Доказаны близость множеств достижимости и близость траекторий исходной и аппроксимирующей задач.

MSC: 34C29, 34B99, 49J15, 93C05, 34E99.

Ключевые слова: *оптимальное управление, множество достижимости, асимптотические методы, принцип максимума*

1 Введение

При конструировании систем автоматического управления возникает задача определения оптимального программного управления, которое реализует движение системы в оптимальном (в соответствии с некоторым критерием) режиме, а понимая законы управления, можно разработать некоторые управляющие устройства, обеспечивающие движение системы по траекториям близким к оптимальным.

Система дифференциальных уравнений с малым параметром является математической моделью сложных процессов, содержащих элементы с существенно различными инерционными свойствами. Асимптотические методы широко используются при исследовании систем с малым параметром. Строгое обоснование применения метода усреднения к дифференциальным уравнениям с малым параметром представлено в работах Крылова и Боголюбова [1, 2]. Идеи применения метода усреднения для задач оптимального управления впервые высказал Н. Н. Моисеев, определив два основных подхода [3]: первый – усреднение краевой задачи принципа максимума Понтрягина, второй – усреднение уравнений управляемого движения.

Реализация первого подхода, с одной стороны, позволяет получить асимптотически оптимальное управление, но, с другой, сопряжена с реализацией схемы усреднения краевой задачи с разрывной правой частью, которая возникает из-за природы управляющих функций: как правило, они являются разрывными. Метод усреднения краевых задач с разрывной правой частью был обоснован в работах В. А. Плотникова и его учеников [4]. Но всё же эти схемы не предполагали перехода к непрерывной задаче.

Поэтому представляется интересным для задач оптимального управления с разрывными управляющими функциями построение соответствующей задачи оптимального управления с непрерывными функциями управления таким образом, чтобы траектории этих систем были близкими.

В статье приведены несколько аппроксимаций множеств допустимых управлений, которые позволяют перейти к задачам с гладким оптимальным управлением, доказана близость множеств достижимости исходной и полученной систем.

2 Постановка задачи

Рассматривается линейная задача оптимального управления объектом, движение которого описывается системой дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad u \in U. \tag{1}$$

Здесь $x \in R^n$, $u \in U \subset conv(R^s)$ – множество допустимых управлений, которое является выпуклым компактом, содержащим начало координат; $A(t),\ B(t)$ – матрицы, удовлетворяющие условиям:

A1) матрицы $A(t),\ B(t)$ аналитические, $t \in [t_0, \infty]$;

A2) матрица $B(t)$ – обратима, $t \in [t_0, \infty]$.

В качестве класса допустимых управлений принимается класс измеримых ограниченных функций $u(t)$, зависящих от времени $t \in R^1$ и принимающих значения в U.

Будем рассматривать решение системы (1) на интервале $[t_0 = 0\,,\ T]$, где $T > 0$ – некоторый известный параметр.

Поставим в соответствие системе (1) следующую систему:

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u, \quad u \in U_k, \tag{2}$$

где множество U_k удовлетворяет условиям:

B1) множество U_k - сильно выпуклый компакт, содержащий начало координат;

B2) граница ∂U_k множества U_k бесконечно гладкая;

B3) для некоторого $\varepsilon_1 \leq 0$ выполняется $h(U_k, U) \leq \varepsilon_1$ ($h(\cdot,\cdot)$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами).

В данной работе рассмотрены вопросы близости траекторий и множеств достижимости систем (1) и (2), а также приведены несколько примеров построения множества U_k.

Построение множества U_k возможно в силу следующей леммы:

Лемма. [6] *Любой выпуклый компакт, содержащий начало координат, с любой степенью точности можно приблизить множеством со свойствами B1) и B2).*

В работе Н. Т. Тынянского и В. А. Сокола [6] показано, что для системы (2), удовлетворяющей условиям B1), B2) (для множества допустимых управлений) и A1), A2) (для матриц $A(t)$ и $B(t)$), оптимальное управление, с помощью которого осуществляется переход из точки x_0 в начало координат, бесконечно дифференцируемо по t.

3 Построение аппроксимаций для множества допустимых управлений

Пусть множество допустимых управлений системы (1) имеет вид:

$$U = [-\alpha_1, \alpha_1] \times [-\alpha_2, \alpha_2] \times ... \times [-\alpha_s, \alpha_s], \alpha_i > 0, i = 1, ..., s.$$

Рассмотрим сначала случай s=2, т.е. $U \subset R^2$.

Множество допустимых управлений $U = [-\alpha_1,\ \alpha_1] \times [-\alpha_2,\ \alpha_2]$ – выпуклый компакт содержащий начало координат, по лемме 1 его можно приблизить множеством U_k. Зададим, например, границу U_k следующим образом:

$$\partial U_k = \begin{cases} \left\{\alpha_1(1-\sin^{2k+1}\varphi), \alpha_2(1-\cos^{2k+1}\varphi)\right\}, & 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ \left\{\alpha_1(-1+\sin^{2k+1}\varphi), \alpha_2(1+\cos^{2k+1}\varphi)\right\}, & \frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi \\ \left\{\alpha_1(-1-\sin^{2k+1}\varphi), \alpha_2(-1-\cos^{2k+1}\varphi)\right\}, & \pi < \varphi \le \frac{3\pi}{2} \\ \left\{\alpha_1(1+\sin^{2k+1}\varphi), \alpha_2(-1+\cos^{2k+1}\varphi)\right\}, & \frac{3\pi}{2} < \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Полученное множество U_k является сильно выпуклым компактом, содержащим начало координат, его граница – бесконечно гладкая.

Например, для $U = [-1,\ 1] \times [-1,\ 1]$, при $k = 3$ множества U, U_k имеют вид, как на Рис.1.

Найдём расстояние по Хаусдорфу между множествами U и U_k.

$$h(U, U_k) = \min\{d > 0 | S_d(U_k) \subset U,\ S_d(U \subset U_k)\} = d_{\min}$$

$$h(U, U_k) = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot 2^{-2k+1/2}.$$

Можно выбрать k^0 так, чтобы выполнялось $h(U, U_{k^0}) \le \varepsilon_0$, для любого заданного ε_0:

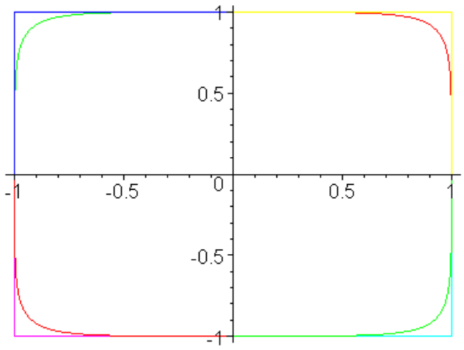

Рис. 1. Множество U, U_k при $k = 3$

$$k \geq 0.5 \cdot \left(-2 \cdot \frac{\ln \varepsilon_0 - 0.5 \cdot \ln(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{\ln 2} - 1 \right). \tag{3}$$

Таким образом, если $k^0 = 0.5 \cdot \left(-2 \cdot \frac{\ln \varepsilon_0 - 0.5 \cdot \ln \beta}{\ln 2} - 1 \right)$, где $\beta = f(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, то для любого $k \geq k^0$ выполняется $h(U, U_k) \leq \varepsilon_0$.

Таким же способом можно задать множество U_k для случая $s = 3, 4, \ldots$.

4 Построение множества достижимости для линейных систем

Пусть уравнение движения управляемого объекта имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \\ &u \in U \subset conv(R^s), \quad x \in R^n, \ x(t_0) \in M_0, \ x(T) \in M_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Для системы (4) поставим следующую задачу оптимального управления. Найти допустимое управление $u(t) \in U$ и соответствующую ему траекторию $x(t)$ системы (4), на которых достигает своего максимального значения функционал:

$$J[u] = c^T x(T) \to \max_{x \in R^n}. \tag{5}$$

Здесь $T > t_0$ – фиксированный момент окончания процесса, c – заданный ненулевой вектор, причем $\|c\| > 0$.

Пусть эта задача решена, и её решение есть пара функций – оптимальное управление $u^*(t)$ и оптимальная траектория $x^*(t)$. Тогда получаем оптимальное значение критерия (5):

$$J^* = c^T x^*(T) = \max_{x \in D(T, t_0, x_0)} (c, x)^*. \tag{6}$$

Выражение справа в (6) есть ни что иное, как опорная функция множества достижимости системы (4) из $t_0 = 0$ к моменту времени T, т.е.

$$C(D(T, t_0, x_0), c) = J^*.$$

Таким образом, решение задачи (4), (5) позволяет определить опорную функцию множества достижимости $D(T, t_0, x_0)$ для вектора c и построить опорную гиперплоскость к этому множеству в точке $x^*(T)$. Уравнение этой гиперплоскости $(c, x) = (c, x^*(T))$.

Решая задачу (4) для всевозможных векторов c, нормированных условием $\|c\| = 1$, будем получать при каждом c точку $x^*(T)$, лежащую на границе множества достижимости. Таким способом можно построить границу множества достижимости.

Пусть множество допустимых управлений имеет вид $U = [-1, 1] \times ... \times [-1, 1]$.

Для системы (4) с функционалом (5) оптимальное управление в соответствии с принципом максимума будет иметь вид:

$$u(t) = \begin{cases} sign\,(B(t)\psi(t))_i\,, B(t)\psi(t) \neq 0 \\ [-1, 1], B(t)\psi(t) = 0, \end{cases}$$

где $\phi(t)$ – решение краевой задачи сопряжённой системы

$$\dot{\phi} = -A^T(t)\phi,\ \phi(T) = c.$$

Таким образом, для некоторых задач оптимальное управление может быть разрывным, и мы получим систему дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, для которой неприменима классическая теория дифференциальных уравнений. Поэтому интерес представляет переход к задачам, в которых оптимальное управление будет гладким или непрерывным. Покажем близость траекторий и множеств достижимости непрерывной задачи к траекториям и множествам достижимости задачи (4), (5).

Рассмотрим задачу

$$\begin{array}{l} \dot{y} = A(t)y + B(t)u_k, \\ u_k \in U_k \subset conv(R^s), \quad y \in R^n,\ y(t_0) \in M_0,\ y(T) \in M_1, \end{array} \tag{7}$$

$$J[u_k] = c^T y(T) \to \max_{y \in R^n}, \tag{8}$$

где $T > t_0$ – фиксированный момент окончания процесса, c – заданный ненулевой вектор, причем $\|c\| > 0$, как и в задаче (4), (5).

Если множество допустимых управлений U_k будет удовлетворять условиям B1), B2) и B3), то оптимальное управление, с помощью которого будет осуществляться переход из точки x_0 в начало координат, будет бесконечно дифференцируемо по t. Следующая теорема устанавливает близость между множествами достижимости систем (4) и (7).

Теорема. *Пусть для систем* (4) *и* (7) *выполнены условия A1) и A2), а множества* U_k *удовлетворяет условиям B1) и B2).*

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $T > t_0$ *существуют такие* $\delta(\eta, T) > 0$ *и* $k^0(\delta, \eta, T) \geq 0$, *что для всех* $k \geq k^0$ *и* $t_0 \leq t \leq T$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\|x(t) - y(t)| \leq \eta \tag{9}$$

$$h(D(t, t_0, x_0), D_k(t, t_0, y_0)) < \eta, \tag{10}$$

где $x(t), y(t)$ *– траектории систем* (4) *и* (7), *соответствующие управлениям* $u \in U$ *и* $u_k \in U_k$ *соответственно,* $D(t, t_0, x_0)$ *и* $D_k(t, t_0, y_0)$ *– множества достижимости в момент времени* t *систем* (4) *и* (7) *соответственно, при* $x_{t_0} = y_{t_0}$ *и* $h(U, U_k) < \delta$.

Доказательство. По определению множества достижимости

$$D(t, t_0, x_0) = \{x(t) | \dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ x(t_0) = x_0, u \in U\}$$

$$D_k(t, t_0, y_0) = \{y(t) | \dot{y} = A(t)y + B(t)u_k,\ y(t_0) = y_0, u_k \in U_k\}.$$

Заменим системы (4) и (7) соответствующими интегральными уравнениями.

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + B(s)u(s)]ds \tag{11}$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A(s)y(s) + B(s)u_k(s)]ds. \tag{12}$$

Вычтем (12) из (11), и воспользуемся тем, что $x(t_0) = y(t_0)$.

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) - A(s)y(s)]ds + \cdot \int_{t_0}^{t} [B(s)u(s) - B(s)u_k(s)]ds.$$

Тогда,

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)\| \; \|x(s) - y(s)\| \, ds + \int_{t_0}^{t} \|B(s)\| \; \|u(s) - u_k(s)\| \, ds. \tag{13}$$

Потребуем чтобы $h(U, U_k) < \delta$. Тогда, как было показано выше, для любого $\delta > 0$можно выбрать k^0 так, что для любого $k \geq k^0$ будет выполняться $h(U, U_{k^0}) < \delta$.

Например, для $U = [-\alpha_1,\ \alpha_1] \times ... \times [-\alpha_n,\ \alpha_n]$ можно выбрать k^0 равным $k^0 = 0.5 \cdot \left(-2 \cdot \frac{\ln\delta - 0.5 \cdot \ln\beta}{\ln 2} - 1\right)$, где $\beta = f(\alpha_1, ..., \alpha_n) > 0$.

Тогда слева в (13) во втором интеграле для любого $u(s) \in U$ существует $u_k(s) \in U_k$ такое, что $\|u - u_k\| \leq \delta$, и наоборот. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t} \|B(s)\| \; \|u(s) - u_k(s)\| \, ds \leq \delta \int_{t_0}^{t} \|B(s)\| \, ds \leq \delta \int_{t_0}^{T} \|B(s)\| \, ds = \delta \cdot \gamma$$

(13) примет вид: $\|x(t) - y(t)\| \leq \|A(s)\| \cdot \|x(s) - y(s)\| \, ds + \delta \cdot \gamma$.
Воспользуемся леммой Гроноулла–Беллмана

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta \cdot \gamma \cdot \exp\left\{ \cdot \int_{t_0}^{L\varepsilon^{-1}} \|A(s)\| \, ds \right\}.$$

Тогда можно выбрать $\delta(\eta, T) > 0$ и $k^0(\delta, \eta, T) \geq 0$ так, чтобы для любого $k \geq k_0$ выполнялось:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta \cdot \gamma \cdot \exp\left\{ \int_{t_0}^{T} \|A(s)\| \, ds \right\} < \eta.$$

Таким образом, оценка (9) выполнена.

То есть, мы получили, что для любых $\eta > 0$ и $T > t_0$ можно выбрать $\delta(\eta, T) > 0$ и $k^0(\eta, T, \delta)$ такие, что для любых $k \geq k^0$ и $t_0 \leq t \leq T$ выполняется и неравенство (10) $h(D(t, t_0, x_0), D_k(t, t_0, y_0)) < \eta$, при $x_{t_0} = y_{t_0}$ и $h(U, U_k) < \delta$.

Теорема доказана. □

5 Выводы

Таким образом, в статье рассмотрен метод приближённого построения множества достижимости для задач оптимального управления. Рассмотрен случай задач с разрывным оптимальным управлением. Предложен способ построения множества допустимых управлений для приближённой задачи управления, обеспечивающий гладкость приближённого решения и близость к траекториям исходной задачи. Доказана близость множеств достижимости и траекторий исходной и приближённой систем.

Литература

1. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
3. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
4. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев–Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
5. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of optimal control theory. – Krieger Pub Co, 1986.
6. *Сокол В.А., Тынянский Н.Т.* Приближённый метод решения линейной задачи оптимального быстродействия // Журнал выч. математики и мат. физики. – 1980. – №2.

References

1. *Krylov, N.M., Bogoljubov N.N.* (1937). Vvedenie v nelinejnuju mehaniku. K.: Izd-vo AN USSR, 363 p.
2. *Bogoljubov, N.N., Mitropol'skij, Ju.A.* (1974). Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij. M.: Nauka, 503 p.
3. *Moiseev, N.N.* (1981). Asimptoticheskie metody nelinejnoj mehaniki. M.: Nauka, 400 p.

4. *Plotnikov, V.A.* (1992). Metod usrednenija v zadachah upravlenija. Kiev–Odessa:Lybid', 188 p.
5. *Lee, E.B., Markus, L.* (1986). Foundations of optimal control theory. Krieger Pub Co.
6. *Sokol, V.A., Tynjanskij, N.T.* (1980). Priblizhjonnyj metod reshenija linejnoj zadachi optimal'nogo bystrodejstvija. Zhurnal vych. matematiki i mat. fiziki, No. 2.

O. D. Kichmarenko, E. V. Platonova

The construction of approximation of reach set for linear control problems.

Asymptotic methods are widely used in the study of optimal control problems. In this paper we consider an approximate method for solving linear optimal control problems with discontinuous optimal control. In the work of Tyniansky and Sokol, a linear problem of optimal speed is considered, in which optimal controls will be discontinuous. They proposed an approximate method for solving the optimal speed problem. Methods are proposed for constructing a set of admissible controls that ensure the smoothness of the optimal controls and the closeness of the trajectories of the approximate and original control problems, based on Tyniansky method. The proposed method for constructing the set of admissible controls allows us to construct an approximation for the set in the spaces R^2, R^3 and higher dimensions. An approximate way of constructing the set of reach is considered. The proximity of sets of attainability and the proximity of trajectories of the initial and approximating problems is proved.

Keywords: *optimal control, set of reach, asymptotic methods, principle of maximum.*

О. Д. Кічмаренко, Є. В. Платонова

Побудова апроксимації множини досяжності для лінійних задач керування.

Асимптотичні методи широко використовуються при дослідженні задач оптимального керування. У статті розглядається наближений метод розв'язання лінійних задач оптимального керування з розривним оптимальним керуванням. В роботі Тинянского і Сокола розглянута лінійна задача оптимальної швидкодії, в якій оптимальні керування будуть розривні. Ними запропонований наближений метод розв'язання задачі оптимальної швидкодії. На підставі цього методу запропоновано способи побудови множини допустимих керувань, які забезпечують гладкість оптимальних керувань і близькість траєкторій наближеною і вихідної задач керування. Запропонований спосіб побудови множини допустимих керувань дозволяє побудувати наближення для множини в просторах R^2, R^3 і більших розмірностей. Розглянуто наближений спосіб побудови множини досяжності. Доведено близькість множин досяжності і близькість траєкторій вихідної і апроксимуючої задач.

Ключові слова: *оптимальне керування, множина досяжності, асимптотичні методи, принцип максимума.*

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса
`olga.kichmarenko@gmail.com, jane.platonova@gmail.com`

Получено 19.05.17