UDK 517.9

©2017. **М. В. Дзюба**

ПРО НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНОГО АЛГЕБРАЇЧНОГО РІВНЯННЯ РІККАТІ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

У статті для наближеного розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті побудовано ітераційну схему за класичною схемою методу найменших квадратів, а також знайдені умови її збіжності до розв'язку матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті. Запропоновану схему наближеного розв'язання та перевірку умов збіжності до розв'язку матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті детально проілюстровано на прикладі. Крім того, запропонована схема розв'язання та отримані умови збіжності до розв'язку матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті можуть бути перенесені на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, у тому числі, у частинних похідних.

MSC: 34B15, 15A24.

Ключові слова: *матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті, метод найменших квадратів, матриця Грама.*

1. Вступ. Лінійні та нелінійні матричні алгебраїчні рівняння широко використовуються при розв'язанні диференціальних рівнянь Ріккаті та Бернуллі, в теорії стійкості руху, у теорії оптимального керування, а також у задачах на відновлення та покращення зображень. Ключовими проблемами при розв'язанні лінійних та нелінійних матричних рівнянь є визначення умов розв'язності та побудова схеми знаходження розв'язків таких рівнянь. У 2001 р. О.А. Бойчук та С.А. Кривошея з використанням теорії узагальнених обернених операторів встановили критерій розв'язності матричних рівнянь вигляду AX - XB = D та X - AXB = D типу Ляпунова та дослідили структуру сім'ї розв'язків цього рівняння, при цьому суттєвим було псевдообернення лінійного матричного оператора, відповідного до однорідної частини рівнянь AX - XB = D та X - AXB = D типу Ляпунова. У роботах С.М. Чуйка визначено оператор $\mathcal{M}$, який перетворює лінійне матричне рівняння загального вигляду до традиційного лінійного матричного рівняння з прямокутною матрицею і таким чином встановлено критерій розв'язності лінійних матричних рівнянь загального вигляду та побудовано сім'ю розв'язків таких рівнянь. У роботах О.А. Бойчука, С.А. Кривошеї та С.М. Чуйка суттєво використовується техніка псевдообернених (за Муром–Пенроузом) матриць і проекторів. У данній роботі суттєво використовується також класичний метод найменших квадратів, побудований К.Ф. Гаусом та А.М. Лежандром і розвинутий А.А. Марковим та Н.І. Ахієзером. Таким чином, досліджуємо задачу про знаходження розв'язків

$$Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Роботу виконано за фінансової підтримки МОН України. Номер державної реєстрації 0115U003182.

матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті

$$A\,Z\,Z^* + B\,Z + C = 0; \tag{1}$$

тут $A,\ B,\ C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – сталі $(n \times n)$ – вимірні матриці. Визначимо оператор

$$\mathcal{M}[\mathcal{A}] :\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

як оператор, який ставить у відповідність матриці $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор $b := \mathcal{M}[\mathcal{A}]$, утворений з n стовпців матриці $\mathcal{A}$, а також обернений оператор [8]:

$$\mathcal{M}^{-1}[b] :\ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектору $b \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицю $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Визначений оператор приводить матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті (1) до рівнозначного

$$f(z) = 0,\ f(z) := \mathcal{M}[\,A\,Z\,Z^* + B\,Z + C\,],\ z := \mathcal{M}[Z]. \tag{2}$$

Для побудови ітераційної схеми $\{z_k\}$, збіжної до розв'язку $\tilde z \in \mathbb{R}^{n^2}$ рівняння (2), використовуємо класичний метод найменших квадратів [9, 10]. Припустимо, що знайдено наближення z_k, досить близьке до точного розв'язку $\tilde z$ рівняння (2). У малому околі точного розв'язку $\tilde z$ рівняння (2) має місце наближена рівність

$$f(z_k) + J_k\,(\tilde z - z_k) \approx 0,\ J_k := f'(z_k) \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2},$$

тому для знаходження наступного наближення z_{k+1} до точного розв'язку $\tilde z$ природно покласти

$$f(z_k) + J_k\,x_{k+1} = 0,\ x_{k+1} := z_{k+1} - z_k,\ k \in \mathbb{N}.$$

2. Ітераційна схема. Вимагаючи [9, 10]

$$\varphi(z_k) := ||f(z_k) + J_k\,x_{k+1}||_{\mathbb{R}^{n^2}} \to \min,$$

за умови невиродженості матриці Грама [9, 10]

$$\Gamma_k := J_k^* J_k \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2},$$

отримуємо ітераційну схему $\{z_k\}$

$$z_{k+1} = z_k + x_{k+1},\ x_{k+1} = -\Gamma_k^{-1} J_k^*\, f(z_k),\ k \in \mathbb{N},$$

збіжну до розв'язку $\tilde z$ рівняння (2), якщо оператор

$$\psi(z) := z - \Gamma^{-1}(z) J^*(z)\, f(z),\ J(z) := f'(z),\ \Gamma(z) := J(z)^* J(z) \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$$

є оператором стиснення [11] у малому околі наближення z_k, досить близького до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (2). Таким чином, у малому околі точного розв'язку рівняння (2) за умови

$$\det \Gamma_k \neq 0, \ ||\psi'(z_k)||_{\mathbb{R}^{n^2 \times n^2}} < p < 1, \ k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

ітераційна схема

$$Z_{k+1} := \mathcal{M}[z_{k+1}], \ z_{k+1} = z_k - \Gamma_k^{-1} J_k^* \, f(z_k), \ k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

збігається до розв'язку рівняння (2), а отже, і рівняння (1).

Теорема. *Припустимо, що для матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті (1) виконуються настунні умови.*

1. *Рівняння (1) має розв'язок $\tilde{Z}$.*

2. *У малому околі точного розв'язку $\tilde{Z}$ рівняння (2) виконується умова (3).*

У такому разі для знаходження розв'язку $\tilde{Z}$ рівняння (1) застосовна ітераційна схема (4) яка збігається до розв'язку рівняння (1).

Зазначимо, що для знаходження розв'язку матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті (1) застосовний також метод Ньютона–Канторовича [11, 12]. Запропонована у статті техніка розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті (1) аналогічно [14, 15, 16] може бути перенесена на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, у тому числі, у частнинних похідних [17, 18].

3. Приклад побудови ітераційної схеми. Запропонована у теоремі схема дослідження застосовна до матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті

$$Z\,Z^* + Z + C = 0, \ C := -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для нульового наближення

$$Z_0 := \frac{5}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ ||f(z_0)|| = \frac{\sqrt{157}}{36} \approx 0,348\ 055$$

умова (3) виконується:

$$\det \Gamma_0 = 1 \neq 0, \ \Gamma_0 = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 15 \\ 30 & 0 & 68 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 43 \end{pmatrix},$$

крім того

$$||\psi'(z_0)||_{\mathbb{R}^4} = \frac{1}{108}\sqrt{\frac{37}{2}\left(79 + \sqrt{3649}\,\right)} \approx 0,470\ 223 < 1.$$

Для першого наближення

$$Z_1 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1 & 36 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ ||f(z_1)|| = \frac{37}{1296} \approx 0,0285\ 494$$

умова (3) також виконується:

$$\det \Gamma_1 = \frac{494\ 209}{419\ 904} \neq 0, \ \Gamma_1 = \frac{1}{648}\begin{pmatrix} 722 & 0 & 1368 & 0 \\ 0 & 685 & 18 & 684 \\ 1368 & 18 & 3240 & 648 \\ 0 & 684 & 648 & 1944 \end{pmatrix},$$

крім того

$$||\psi'(z_1)||_{\mathbb{R}^4} \approx 0,0766\ 725 < 1.$$

Для другого наближення

$$Z_2 = \frac{1}{1368}\begin{pmatrix} 1 & 1368 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ ||f(z_2)|| = \frac{1\ 369}{1\ 871\ 424} \approx 0,000\ 731\ 529$$

умова (3) також виконується:

$$\det \Gamma_2 = \frac{879\ 403\ 195\ 225}{875\ 556\ 946\ 944} \neq 0\ ,$$

крім того

$$||\psi'(z_2)||_{\mathbb{R}^4} \approx 0,00\ 220\ 254 \ll 1;$$

тут

$$\Gamma_2 = \frac{1}{935\ 712}\begin{pmatrix} 938\ 450 & 0 & 1\ 874\ 160 & 0 \\ 0 & 937\ 081 & 684 & 937\ 080 \\ 1\ 874\ 160 & 684 & 4\ 678\ 560 & 935\ 712 \\ 0 & 937\ 080 & 935\ 712 & 2\ 807\ 136 \end{pmatrix}.$$

Для третього наближення

$$Z_3 = \frac{1}{1\ 874\ 160}\begin{pmatrix} 1 & 1\ 874\ 160 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ ||f(z_3)|| = \frac{1\ 369}{1\ 871\ 424} \approx 0,000\ 731\ 529$$

умова (3) також виконується:

$$\det \Gamma_3 = \frac{3\ 084\ 381\ 270\ 031\ 172\ 630\ 449\ 681}{3\ 084\ 371\ 395\ 607\ 554\ 467\ 840\ 000} \neq 0\ ,$$

крім того

$$||\psi'(z_3)||_{\mathbb{R}^4} \approx 1,61\ 162 \times 10^{-6} \ll 1;$$

тут

$$\Gamma_3 = \frac{1}{1\ 756\ 237\ 852\ 800} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1\ 756\ 241\ 601\ 122 & 0 & 3\ 512\ 479\ 453\ 920 & 0 \\ 0 & 1\ 756\ 239\ 726\ 961 & 937\ 080 & 1\ 756\ 239\ 726\ 960 \\ 3\ 512\ 479\ 453\ 920 & 937\ 080 & 8\ 781\ 189\ 264\ 000 & 1\ 756\ 237\ 852\ 800 \\ 0 & 1\ 756\ 239\ 726\ 960 & 1\ 756\ 237\ 852\ 800 & 5\ 268\ 713\ 558\ 400 \end{pmatrix}.$$

Для четвертого

$$Z_4 = \frac{1}{3\ 512\ 479\ 453\ 920}\begin{pmatrix} 1 & 3\ 512\ 479\ 453\ 920 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ ||f(z_4)|| \approx 2,84\ 699 \times 10^{-13}$$

і п'ятого наближень

$$Z_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12\ 337\ 511\ 914\ 217\ 166\ 362\ 274\ 240} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ ||f(z_5)|| \approx 8,10\ 536 \times 10^{-26}$$

умова (3) також виконується

$$\det\Gamma_4 \neq 0,\ \det\Gamma_5 \neq 0,$$

крім того

$$||\psi'(z_4)||_{\mathbb{R}^4} \approx 8,59\ 919 \times 10^{-13} \ll 1,\ ||\psi'(z_5)||_{\mathbb{R}^4} \approx 2,44\ 818 \times 10^{-25} \ll 1.$$

Про збіжність до розв'язку рівняння (5) знайденої послідовності наближень, визначених ітераційною схемою (4), свідчить послідовне зменшення величин

$$||f(z_k)||,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Рівняння (5) має точний розв'язок

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тому про збіжність до розв'язку рівняння (5) знайденої послідовності наближень, визначених ітераційною схемою (4), свідчить послідовне зменшення величин

$$||Z_k - \tilde{Z}||,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

зокрема

$$||Z_0 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{6},\ ||Z_1 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{36},\ ||Z_2 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{1368},\ ||Z_3 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{1\ 874\ 160},$$

$$||Z_4 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{3\ 512\ 479\ 453\ 920} \approx 2,84\ 699 \times 10^{-13},$$

$$||Z_5 - \tilde{Z}|| = \frac{1}{12\ 337\ 511\ 914\ 217\ 166\ 362\ 274\ 240} \approx 8,10\ 536 \times 10^{-26}.$$

Цитована література

1. *Boichuk A.A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – T. 50, № 8. – P. 1162–1169.
2. *Palin V. V.* Solvability of Quadratic Matrix Equations // Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika. Mekhanika. – 2008. – **63**, № 6. – P. 36–41.
3. *Кувшинов В. М.* Особенности численного решения матричного алгебраического уравнения Риккати методом установления // Ученые записки ЦАГИ. – 1979. – **X**, № 1. – С. 69–87.
4. *Boichuk A.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – T. 37, № 4. – P. 464–471.
5. *Зеликин М.И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. – М.: Факториал, 1998. – 350 с.
6. *Справочник по теории автоматического управления* / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987.
7. *Годунов С.К.* Нормы решений матричных уравнений Лурье–Риккати как критерии качества стабилизируемости и детектируемости // Вычислительные проблемы в задачах математической физики (Труды Института математики СО РАН ; т. 22). – Новосибирск : Наука, 1992. – С. 3–21.
8. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – **210**, № 1. – P. 9–21.
9. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
10. *Chuiko S.M.* About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods // Nonlinear oscillation. – 2009. – **12**, № 4. – P. 556–573.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
12. *Chuiko S.M.* To the generalization of the Newton–Kantorovich theorem // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2017. – **85**. – P. 62–68.
13. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1958. – 334 p.
14. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
15. *Chuiko S.M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. – 2015. – **56**, № 4. – P. 752–760.
16. *Chuiko S.M.* Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – **38 (2)**. – P. 236–244.
17. *Gutlyanskii V.Ya, Ryazanov V.I., Yakubov E.H.* The Beltrami equations and prime ends // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – **210**. – P. 22–51.
18. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption // Israel Journal of Mathematics. – 2016. – **215**, No. 1. – P. 163–179.

References

1. *Boichuk, A.A.* (1998). Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. Ukrainian Mathematical Journal, 50, No. 8, pp. 1162–1169.
2. *Palin, V.V.* (2008). Solvability of Quadratic Matrix Equations. Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika. Mekhanika, 63, No. 6, pp. 36–41.
3. *Kuvshinov, V.M.* (1979). Peculiarities of the numerical solution of the matrix algebraic Riccati equation by the establishment method. Uchenye zapiski TsAGI, X, No. 1, pp. 69–87 (in Russian).
4. *Boichuk, A.A.* (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations. Differential Equations, 37, No. 4, pp. 464–471.
5. *Zelikin, M.I.* (1998). Homogeneous spaces and the Riccati equation in the calculus of variations. M .: Factorial, 350 p. (in Russian).
6. *Handbook on the theory of automatic control*, ed. A.A. Krasovsky. M .: Science, 1987 (in Russian).
7. *Godunov, S.K.* (1992). Norms of solutions to the Lurie–Riccati matrix equations as criteria of the quality of stabilizability and detectability. Siberian Advances in Mathematics, 2, No. 3, pp. 135–

157 (in Russian).
8. *Chuiko, S.M.* (2015). A generalized matrix differential-algebraic equation. Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), 210, No. 1, pp. 9–21.
9. *Akhiezer, N.I.* (1965). Lectures on approximation theory. M.: Science, 408 p. (in Russian).
10. *Chuiko, S.M.* (2009). About an approximate solution of autonomous boundary-value problem with a least-squares methods. Nonlinear oscillation, 12, № 4, pp. 556–573.
11. *Kantorovich, L.V., Akilov, G.P.* (1977). Functional analysis. M .: Science, 744 p. (in Russian).
12. *Chuiko, S.M.* (2017). To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, 85, pp. 62–68.
13. *Linnik, Yu. V.* (1958). The method of least squares and the foundations of the mathematical and statistical theory of processing observations. M .: Fizmatgiz, 334 p. (in Russian).
14. *Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M.* (2016). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition), Berlin; Boston: De Gruyter, 298 p.
15. *Chuiko, S.M.* (2015). The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem. Siberian Mathematical Journal, 56, № 4, pp. 752–760.
16. *Chuiko, S.M.* (2017). Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem. Lobachevskii Journal of Mathematics, 38 (2), pp. 236–244.
17. *Gutlyanskii, V.Ya, Ryazanov, V.I., Yakubov, E.H.* (2015). The Beltrami equations and prime ends. Journal of Mathematical Sciences, 210, pp. 22–51.
18. *Skrypnik, I.I.* (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. Israel Journal of Mathematics, 215, № 1, pp. 163–179.

M. V. Dzuba

On approximate solution of Riccati equation by the least square method.

Linear and nonlinear matrix algebraic equations are widely used in solving the Riccati and Bernoulli differential equations, in the theory of motion stability, in the theory of optimal control, as well as in problems for the restoration and improvement of images. The key problems in solving linear and nonlinear matrix equations is the definition of solvability conditions and the construction of a scheme for finding solutions of such equations. In 2001 O. A. Boichuk and S. A. Krivoshey using the theory of generalized inverse operators, established the criterion of solvability of the matrix equations of the form AX-XB = D and X-AXB = D of Lyapunov type, and investigated the family structure of the solutions of this equation, while the pseudo-inversion of the linear matrix operator corresponding to the homogeneous part of the equations AX - XB = D and X - AXB = D type Lyapunov. In works S. M. Chuiko the operator $\mathcal{M}$, which transforms the linear matrix equation of a general form into a traditional linear matrix equation with a rectangular matrix, is defined as a chute, and thus the criterion of solvability of linear matrix equations of general form is established and the family of solutions of such equations is constructed. In works O. A. Boychuk, S. A. Krivoshei and S. M. Chuiko essentially uses the technique of pseudo-turned (by Moore–Penrose) matrices and projectors. In this paper, the classic method of least squares, used by K.F. Gauss and A.M. Legendre, is also considerably used and developed A. A. Markov and N. I. Ahiezer In the article for an approximate solution of the matrix algebraic Riccati equation, an iterative scheme is constructed according to the classical scheme of the least squares method, and the conditions of its convergence are found for the solution of the matrix algebraic Riccati equation. The proposed scheme of an approximate solution and the verification of the convergence conditions to the solution of the matrix algebraic Riccati equation is illustrated in detail in the example. In addition, the proposed solution scheme and the convergence conditions obtained to the solution of the matrix algebraic Riccati equation can be transferred to nonlinear matrix differential algebraic boundary value problems, including partial derivatives.

Keywords: *matrix algebraic Riccati equation, least square method, Gram matrix.*

М. В. Дзюба

О приближенном решении матричного алгебраического уравнения Риккати методом наименьших квадратов.

Линейные и нелинейные матричные алгебраические уравнения широко используются при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли, в теории устойчивости движения, в теории оптимального управления, а также в задачах на восстановление и улучшение изображений. Ключевыми проблемами при решении линейных и нелинейных матричных уравнений является определение условий разрешимости и построение схемы нахождения решений таких уравнений. В 2001 г. А. А. Бойчук и С. А. Кривошея с использованием теории обобщенных обратных операторов установили критерий разрешимости матричных уравнений вида AX - XB = D и X - AXB = D типа Ляпунова и исследовали структуру семьи решений этого уравнения, при этом существенно было псевдообращение линейного матричного оператора, относительно однородной части уравнений AX - XB = D и X - AXB = D типа Ляпунова. В работах С. М. Чуйко определено оператор $\mathcal{M}$, который преобразует линейное матричное уравнение общего вида к традиционному линейному матричному уравнению с прямоугольной матрицей и таким образом установлен критерий разрешимости линейных матричных уравнений общего вида и построено семью решений таких уравнений. В работах А. А. Бойчука, С. А. Кривошеи и С. М. Чуйко существенно используется техника псевдообратных (по Муру–Пенроузу) матриц и проекторов. В данной работе существенно используется также классический метод наименьших квадратов, построенный К. Ф. Гауссом и А. М. Лежандром и развитый А. А. Марковым и Н. И. Ахиезером. В статье для приближенного решения матричного алгебраического уравнения Риккати построено итерационную схему по классической схеме метода наименьших квадратов, а также найдены условия ее сходимости к решению матричного алгебраического уравнения Риккати. Предложенную схему приближенного решения и проверку условий сходимости к решению матричного алгебраического уравнения Риккати подробно проиллюстрировано на примере. Кроме того, предложенная схема решения и полученные условия сходимости к решению матричного алгебраического уравнения Риккати могут быть перенесены на нелинейные матричные дифференциально-алгебраические краевые задачи, в том числе, в частных производных.

Ключевые слова: *матричное алгебраическое уравнение Риккати, метод наименьших квадратов, матрица Грама.*

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
`chujko-slav@inbox.ru`
Отримано 27.12.17